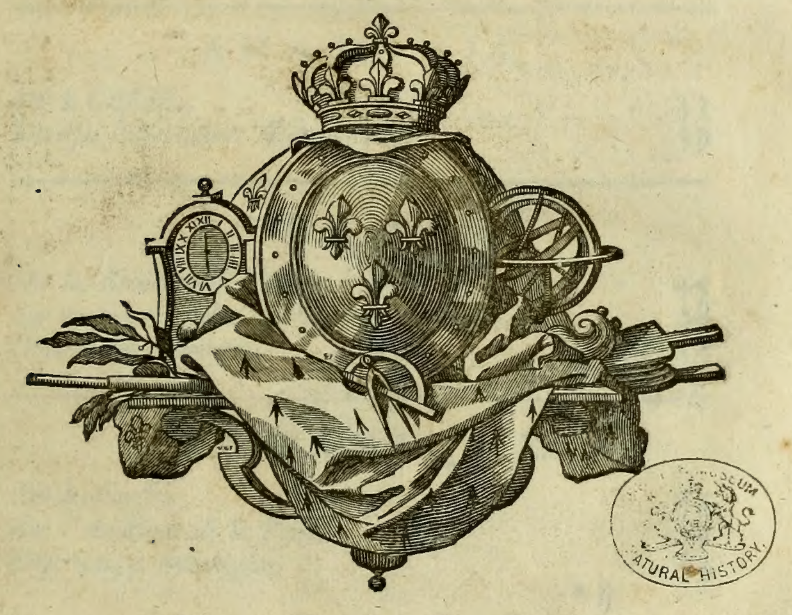
HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXXXII.

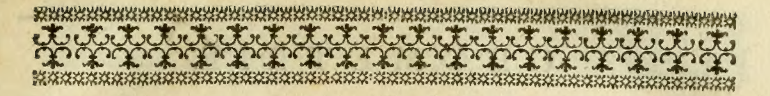


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

GÉOMÉTRIE.

ASTRONOMIE.

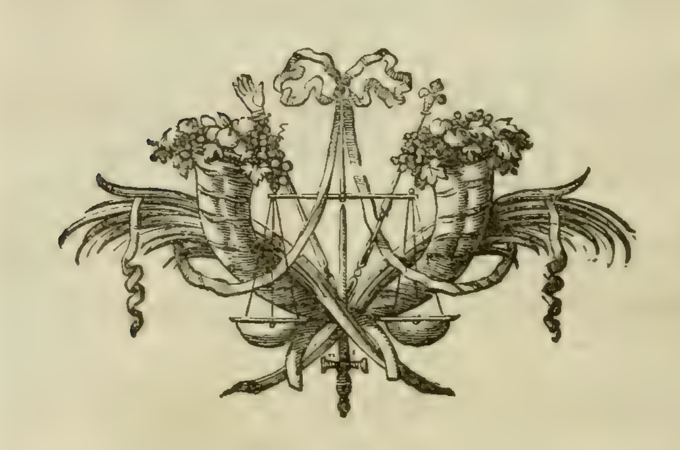
GÉOGRAPHIE.

MÉCHANIQUE.





TABLE
POUR
LES MEMOIRES.



HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCXXX.

PHISIQUE GENERALE.

SUR QUELQUES EXPÉRIENCES DE L'AIMAN.



NOUS supposons ici tout ce qui a été dit en 1728*, sur des Expériences de l'Aiman, faites par M. du Fay. Il en résulte que le Tourbillon, qui se forme autour de tout Aiman, n'est pas double, comme M. Descartes l'avoit conçû, mais simple; toute la matiére magnétique entre par le Nord de l'Aiman, & sort par le Sud, pour rentrer ensuite par le

V. les M. p. 142.
* p. 1. & suiv.

Nord. Il faut développer un peu plus cette idée pour l'intelligence de ce qui suivra.

On doit concevoir un Aiman comme un corps où sont ouvertes une infinité de routes paralleles, telles que par quelque cause que ce soit la matiére magnétique qui pénétre ce corps s'y peut mouvoir en un certain sens, du Nord au Sud, & ne le pourroit du Sud au Nord. Et parce que cette matiére se meut avec beaucoup plus de facilité dans l'Aiman que dans l'air, lorsqu'après être entrée par le Nord de la Pierre elle en est sortie par le Sud, elle ne continüe pas son chemin en ligne droite dans l'air, comme il semble qu'elle le devroit, mais elle se réfléchit pour retourner au Nord de l'Aiman, & y rentrer par-là, c'est ce qui fait le Tourbillon. Tout cela, quoique sujet à de grandes difficultés, est si constant par les faits visibles, qu'on ne peut se dispenser de l'admettre, en attendant l'éclaircissement des difficultés.

Les Phisiciens prennent la Terre pour un grand Aiman. La matiére magnétique entrée uniquement par le Nord de la Terre, selon M. du Fay, sort donc par le Sud. Si l'on suppose un Aiman ordinaire, posé de sorte que son Nord soit tourné vers le Nord de la Terre, la matiére magnétique sortie par le Sud de la Terre, & qui en va chercher le Nord, rencontre le Sud de l'Aiman par où elle ne peut entrer; & si cet Aiman est aisément mobile, comme il le sera étant posé sur l'eau dans une petite Gondole, elle le tournera de façon qu'elle le puisse pénétrer, c'est-à-dire, qu'elle fera prendre à son Nord la place de son Sud, & par conséquent le Sud de l'Aiman sera dirigé vers le Nord de la Terre. Il peut y avoir de l'équivoque ou de l'embarras dans les expressions dont on se sert sur ce sujet, parce que c'est le Sud propre d'un Aiman qui se dirige vers le Nord de la Terre, & M. du Fay a crû devoir fixer les idées en ne distinguant les Poles d'un Aiman que par la direction qu'ils prennent.

Dans un Aiman les routes de la matiére magnétique sont déterminées, comme nous venons de le dire, elles ne lui permettent de se mouvoir qu'en un sens, mais le Fer, qui

certainement eſt un Aiman imparfait, l'eſt en ce que ces mêmes routes n'y ſont pas ſi déterminées, les petits poils dont il eſt hériſſé intérieurement, peuvent ſe coucher en un ſens, & après cela ſe coucher en ſens contraire, ſelon qu'il a été expliqué en 1728, & par conſéquent la même route admettra la matiére magnétique müe tantôt en un ſens, tantôt dans le ſens oppoſé.

Voilà quels ſont les principes eſſentiels du Siſtême de M. du Fay, il a ſongé à le fortifier ſoit en l'employant à expliquer des phénomenes, qui ne l'ont pas été ſi heureuſement juſqu'ici, ſoit en ſatisfaiſant aux objećtions dont on pourroit l'attaquer.

La plûpart des Phiſiciens prétendent que dans un Aiman le pole qui ſe dirige vers le Nord a beaucoup plus de force que l'autre, & ils croyent que la proximité du pole Boréal de la Terre en eſt la cauſe, mais ſans compter que ce devroit être le contraire dans les pays ſitués au de-là de l'Equateur, ce qui n'eſt rien moins que certain, une expérience, qui paroît déciſive, renverſe cette explication. M. du Fay a approché aſſés près l'un de l'autre deux Aimans aſſés égaux en force, il ne faut pas qu'ils ſe touchent, car ils ne ſeroient plus qu'un Aiman, il a plongé dans de la limaille de Fer le pole de l'un, qui en a pris autant qu'il en pouvoit porter; ſi le voiſinage du ſecond a rendu ce premier capable de porter plus de limaille, il a dû en lâcher, en laiſſer tomber une partie, quand on a éloigné le ſecond, c'eſt cependant ce qui n'eſt jamais arrivé dans l'expérience bien répétée.

Ce fait ſe déduira ſans peine de l'hipotheſe d'un Tourbillon, ou courant unique. La matiére magnétique une fois entrée dans un Aiman n'en ſort, pour ainſi dire, que le plus tard qu'elle peut, parce qu'elle trouve beaucoup plus de facilité à s'y mouvoir que dans l'air; quand elle eſt entrée, elle ſortoit de l'air, elle n'avoit qu'un mouvement pénible, elle eſt entrée toute diſperſée, & a pris une aſſés grande étendüe autour du pole qui ſe préſentoit, mais quand il a été queſtion de ſortir de la pierre, elle y a prolongé ſon cours

autant qu'il se pouvoit pour éviter l'air, & par-là elle s'est rassemblée & serrée vers le pole de la sortie. Or le pole de l'entrée a été le Nord de l'Aiman dirigé vers le Sud de la Terre, & le pole de la sortie est le Sud de l'Aiman dirigé vers le Nord de la Terre. De-là suit évidemment la conséquence.

M. du Fay assûre en général que l'hipothese du courant simple s'accommodera mieux avec les phénomenes de l'Aiman, & il fait voir qu'elle quadreroit fort bien avec l'idée qu'a eûë le célébre M. Halley de rapporter les Aurores Boréales à la matiére magnétique. Mais cette idée n'est pas encore elle-même assés établie pour donner beaucoup de poids à celles qu'elle confirmeroit.

On objecte à l'hipothese de M. du Fay que le courant unique formé d'une matiére sortie par le Sud de la Terre, & qui va retrouver le Nord, pousseroit selon la direction du Sud au Nord tous les Aimans qui pourroient se mouvoir librement, & leur donneroit en ce sens un mouvement de progression, au lieu qu'ils n'ont constamment que celui de direction, par lequel leurs poles se tournent comme il convient. On ne doit pas trouver cet inconvénient dans l'hipothese des deux courants, qui étant opposés, se balancent l'un l'autre. La réponse est aisée. La matiére magnétique qui va du Sud au Nord pousseroit en effet l'Aiman selon cette direction, si en venant heurter sa surface extérieure elle y trouvoit de la résistance, mais elle n'y en trouve aucune, elle ne la heurte pas, elle la pénétre dès qu'elle la rencontre, & se plonge dans l'intérieur de la pierre. On sçait que cette extrême facilité de la matiére magnétique à pénétrer l'Aiman n'a pas été imaginée pour le besoin présent, mais qu'elle est établie depuis long-temps par les phénomenes. Cette matiére n'agit que sur les parties intérieures de l'Aiman, qu'elle arrange & qu'elle accommode à son cours, mais ce ne sont que celles qui sont de la derniére finesse.

Il suit de-là qu'elle se meut dans des espaces extrémement étroits, & d'où l'air est exclus, & cela même fournit à M. du Fay une réponse à l'objection qu'on lui a faite contre les

petits poils du Fer, qu'il a ſuppoſé qui tomboient par leur poids d'un ſens ou d'un autre. Ce poids, a-t-on dit, doit être compté pour nul à cauſe de l'extrême délicateſſe des poils. Il devroit être effectivement compté pour nul, ſi les poils étoient dans l'air, mais ils n'y ſont pas, & il leur arrive la même choſe qu'à une Plume, qui dans le Vuide de la Machine Pneumatique tombe avec la même vîteſſe, ou a le même poids, que ſi elle étoit de Plomb.

La vîteſſe de la matiére magnétique doit être proportionnée à ſa ſubtilité, & à cette occaſion M. du Fay a eu la penſée de meſurer cette vîteſſe. Il a conçû que ſi une Aiguille de Fer non aimantée paſſoit dans le Tourbillon d'un Aiman avec la même vîteſſe dont ce Tourbillon ſe meut, elle ne s'y aimanteroit point, parce que la matiére magnétique du Tourbillon ne pourroit faire aucune impreſſion ſur elle. Il y a fait paſſer une Aiguille avec toute la vîteſſe qu'elle avoit pû prendre de la détente ſubite d'un Reſſort de Montre, mais elle s'eſt aimantée comme elle auroit fait à la maniére ordinaire, & par conſéquent elle auroit eu beſoin d'une vîteſſe beaucoup au de-là de celle qu'elle avoit. Il n'eſt pas permis de conjecturer ſeulement juſqu'où cela pourroit aller. Cette tentative inutile n'eſt rapportée ici que pour donner lieu à d'autres qui pourroient réüſſir, quelquefois il ne faut qu'avertir les bons eſprits de tourner leurs vûës d'un certain côté.

Pour derniére preuve des petits poils du Fer, & des qualités qu'on eſt obligé de leur attribuer, M. du Fay apporte la différence des effets magnétiques du Fer, de l'Acier & de l'Acier trempé. Cette tranſpoſition de poles, dont nous avons parlé en 1728, ſi facile & ſi prompte dans le Fer, l'eſt beaucoup moins dans l'Acier, & moins encore dans l'Acier trempé, &, ce qui en eſt une ſuite, l'Acier trempé, toutes choſes d'ailleurs égales, a plus de force, & une force plus durable que l'Acier, & l'Acier plus que le Fer. La raiſon en ſaute aux yeux, les poils du Fer ont perdu leur extrême mobilité, & ſe ſont roidis plus ou moins, ou collés les uns contre les autres, ou avec les parties voiſines.

Toute cette Théorie n'eſt pas une pure Théorie, qui ne produiſe rien. M. du Fay en tire quelle eſt la meilleure maniére d'aimanter les Aiguilles, & on la devinera de ſoi-même, pourvû qu'on ait une idée bien nette du Tourbillon unique, de ſa direction, des petits poils du Fer. On travaille avec une ſorte de ſupériorité ſur ſa matiére, quand on opere en vertu d'un Siſtême.

SUR LA LUMIE'RE SEPTENTRIONALE,

ET SUR UNE AUTRE LUMIE'RE.

LE ſpectacle de la Lumiére Septentrionale a continué en 1730, rarement à la vérité, mais en recompenſe avec des circonſtances toutes nouvelles, comme s'il les affectoit de peur d'ennuyer.

M. Boüillet, Correſpondant de l'Académie, dont nous avons déja parlé pluſieurs fois, la vit à Beſiers le 6 Mars, à 7 heures du ſoir, d'un fort beau rouge, élevée de plus de 20 degrés ſur l'Horiſon, mais la Lune, qui ſe leva à 7 heures 30′ la fit diſparoître, & il ne ſçût que ſur le rapport de quelques Peſcheurs de Vendres, qu'elle avoit été vûë encore à 11 heures.

Une Lumiére, & plus viſible, & tout-à-fait ſinguliére, fut obſervée le ſoir du 9 Octobre, d'un côté par M. Caſſini en Picardie, & de l'autre par M. de Mairan à Breüilpont. M. de Mairan qui commença à l'obſerver à 8 heures, & qui ſe tient ſûr qu'elle ne commença pas plûtôt, la vit à la place, de la couleur, & de la forme ordinaire des Aurores Boréales, c'eſt-à-dire, ſans jets & ſans colonnes qui en partiſſent, longue de 9 à 10 degrés, dont elle s'étendoit horiſontalement vers le Midi, à compter des Pleïades d'où elle partoit, & large de 4 degrés. Mais 7 ou 8 minutes après, elle commença à s'ébrecher vers le milieu, comme pour ſe diviſer, & ſe diviſa en effet en deux Ovales lumineuſes inclinées à l'Horiſon, longues chacune de 15 à 18 degrés,

ſur 5 à 6 de largeur, entre leſquelles on voyoit les Pleïades qui les ſeparoient. Ce fut en cet état que M. Caſſini vit le Phénomene à 7 heures 20′. Alors qui ne l'avoit pas vû dans ſa premiére forme ne le pouvoit guére reconnoître pour une Aurore Boréale.

Enſuite les deux Ovales s'affoiblirent de clarté, & changérent de contours ou de figure, mais inégalement & différemment l'une & l'autre, & enfin un peu après 9 heures, elles ne ſubſiſtoient plus.

Cependant à 10 heures $\frac{3}{4}$ ou 11 heures, M. de Mairan vit ſûrement l'Aurore Boréale, foible, à la vérité, mais à ſa place naturelle & ſous l'Etoile Polaire. Elle étoit contigüe à l'Horiſon, ſans interpoſition de nuages obſcurs, & elle y étoit plus marquée que par-tout ailleurs. Elle alla en s'affoibliſſant juſque vers Minuit, où l'Obſervateur la quitta.

Le P. Rouché, Religieux de l'Ordre de S. François, obſerva auſſi à Poitiers le même Phénomene du 9 Octobre, depuis 8 heures du ſoir juſqu'à 9, mais il le vit ſous une autre forme que M.[rs] Caſſini & de Mairan, quoiqu'à peu près dans le même lieu du Ciel. C'étoit d'abord un demi-Cercle, dont le diametre, tourné en haut, étoit parallele à l'Horiſon, & long de plus de 20 degrés. Enſuite ce demi-Cercle ſe partagea en deux autres moindres & contigus par leurs diametres, qui faiſoient une même droite, parallele encore à l'Horiſon. Ces figures ſi réguliéres ne durérent pas long-temps, les deux petits demi-Cercles ſe réünirent pour former un plus grand Cercle preſque entier, mais très-mal terminé dans la portion qui lui manquoit. Enfin cela devint une eſpece de Segment de Cercle, qui finiſſoit par un Trident, dont les dents étoient fort longues & bien ſéparées. Ces apparences-là ſont aſſés différentes des autres, & peut-être difficiles à concilier avec elles. Tout le Phénomene avoit une très-grande blancheur, & un mouvement très-lent.

Juſqu'ici nous n'avons rapporté que des Aurores ou Lumiéres Septentrionales, différentes ſeulement entre elles par des circonſtances plus ou moins particuliéres. Mais voici enfin

une Lumiére différente par l'endroit qui paroît leur être le plus essentiel, une Lumiére entiérement Méridionale Elle fut vûë à Bésiers le 15 Février de cette année, par M.rs Boüillet & Astier l'aîné, trois quarts d'heure après le coucher du Soleil. Elle commençoit à l'endroit où il s'étoit couché, passoit du côté de l'Occident par les derniéres Etoiles des Poissons, s'élevoit vers le Zénit jusqu'à l'Oeil du Taureau, & se terminoit dans la constellation du Lion, en suivant, mais non pas toûjours exactement, la position & le cours de l'Ecliptique. On voit par-là qu'elle étoit toute Méridionale, beaucoup plus remarquable & plus parfaite sur ce point que le demi-grand Cercle vertical, dont nous avons parlé en 1729, & qui jusque-là étoit unique.

Cette Lumiére formoit une Zone ou bande d'environ 10 degrés de largeur, & qui dans sa plus grande hauteur étoit élevée de 52 degrés sur l'Horison. Elle étoit fort rouge; & selon l'ordinaire de ces Phénomenes n'effaçoit pas les Etoiles qu'elle couvroit. Au de là de cette Zone rouge, il y avoit vers le Midi une autre Zone de Lumiére blancheâtre, presque contigüe à la premiére du côté de l'Orient, & qui s'en éloignoit en allant vers le Méridien, & au-dessous de cette Lumiére blanche étoit un nuage obscur, qui s'étendoit jusqu'à l'Horison, tandis que le reste du Ciel étoit fort serein.

Par la position qu'avoit la Lumiére rouge rapportée aux Etoiles fixes, M. Astier s'apperçût que cette position changeoit, & que la Lumiére avoit un mouvement, mais assés petit, du Nord au Sud. La Lumiére blanche qui se tenoit toûjours à la même distance de l'autre, en avoit un pareil.

Les deux Observateurs eurent des affaires, qui ne leur permirent pas de pousser l'observation au de là de 8 heures $\frac{1}{2}$. Ils ne virent point d'Aurore Boréale, seulement M. Astier, qui se retira le dernier, en soupçonna une en se retirant, mais elle a été vûë sûrement ailleurs dans le même Pays. Par les observations de M. de Guibal, qui étoit à S. Chignan, M. Astier conjecture qu'il y avoit quelque correspondance entre la Lumiére Méridionale & la Septentrionale, parce que

que la premiére baiſſoit, tandis que l'autre s'élevoit; mais on n'a rien d'aſſés poſitif ſur ce point. Quelque différentes que ſoient ces deux Lumiéres par leur poſition, elles ſont d'ailleurs ſi ſemblables, que la préſomption eſt grande pour la correſpondance.

Comme depuis 15 ans, que nous parlons toûjours de cette matiére, il ſemble qu'elle ne fait que s'embarraſſer de plus en plus par la multitude & la variété des circonſtances & des accidents du Phénomene, peut-être ferons-nous plaiſir au Public, d'annoncer que M. de Mairan a entrepris de réduire le tout à un Siſtême reglé, qui paroîtra dans peu.

SUR UNE NOUVELLE CONSTRUCTION DE THERMOMETRE.

ON ſçait aſſés par ſes propres reflexions, pour peu qu'on en ait fait en obſervant le Thermometre, combien cet Inſtrument ſi commode, d'un ſi grand uſage, & même ſi agréable, eſt cependant défectueux; nous ne parlons que de celui de Florence ou de Sanctorius, qui eſt preſque le ſeul, car celui de M. Amontons, dont nous avons parlé en 1702*, eſt peu connu & peu uſité, quoique conſtruit ſur de meilleurs principes, & d'une maniére fort ingénieuſe, mais comme il eſt d'une conſtruction difficile, & qui demandoit, du moins pour un temps, la main de l'Auteur lui-même, ſa mort, qui ſurvint, empêcha qu'il ne s'en répandît un aſſés grand nombre.

V. les M. p. 452.

* p. 1. & ſuiv.

Nos Thermometres ordinaires marquent, à la vérité, les différents degrés de chaud ou de froid, mais chacun les marque pour ſoi & à ſa maniére, parce qu'ils ne ſont partis d'aucun point de chaud ou de froid, qui leur fût commun. C'eſt ainſi que deux Pendules qui n'auroient pas été miſes d'abord ſur la même heure au Soleil, marqueroient bien chacune, que pendant un certain temps il ſe ſeroit écoulé une heure, deux heures, &c. mais non pas quelle heure il ſeroit

au Ciel. De plus, en ſuppoſant les deux Pendules juſtes, on pourroit bien s'aſſûrer que le même temps ſe ſeroit écoulé, quand elles le marqueroient toutes deux, mais on ne peut pas s'aſſûrer pareillement que quand la liqueur s'eſt élevée d'un degré dans deux Thermometres différents, il y ait eu de part & d'autre un nouveau degré de chaleur égal; car 1.° l'Eſprit de Vin peut n'être pas le même dans les deux Thermometres, & ſelon qu'il ſera plus ou moins bien rectifié, il ſe dilatera plus ou moins à une même chaleur, ou, ce qui revient au même, celui qui a été bien rectifié ſe dilatera & montera d'un degré à une certaine chaleur, tandis que l'autre ne ſera monté du même degré qu'à une chaleur plus forte. 2.° En graduant les Thermometres, on prend pour degrés égaux de l'aſcenſion de la liqueur des parties égales de la longueur des tuyaux, cependant en ſuppoſant les diametres des tuyaux d'une égalité parfaite, ce qui eſt tout au moins très-difficile, ils ont ſouvent dans leur intérieur des inégalités conſidérables, & quelquefois telles qu'il faudra pour remplir une certaine longueur d'un tuyau près du double de la liqueur qu'il faudroit pour remplir la même longueur dans un autre tuyau. Cela vient de l'inégalité d'épaiſſeur qu'ils ont en différents endroits, des boſſes, des monticules qui ſe trouvent à leur ſurface intérieure, & ſurtout de ce qu'ils ſont ordinairement plus gros à un bout qu'à l'autre.

Voilà donc trois inconvénients principaux, qui rendent la comparaiſon des Thermometres très-incertaine & très-fautive, & ce ſeroit pourtant cette comparaiſon qui en ſeroit l'uſage le plus curieux, & le plus intéreſſant, du moins pour les Phiſiciens. On ſçauroit quel eſt le chaud ou le froid d'une Saiſon, d'une Année, d'un Climat, par rapport à celui d'une autre Saiſon, d'une autre Année, d'un autre Climat, &c. quel eſt le plus grand chaud ou le plus grand froid que des Hommes, que d'autres Animaux, ſoûtiennent ou puiſſent ſoutenir, &c. Il eſt aiſé de voir combien de ces comparaiſons éxactes il naîtroit de connoiſſances, & l'on peut même aſſûrer

qu'il en naîtroit d'imprévûës. Pour nous mettre à portée d'y parvenir, M. de Reaumur a entrepris de remédier aux trois inconvénients par une nouvelle construction de Thermometre à Esprit de vin.

D'abord il adopte la belle & heureuse découverte de M. Amontons rapportée en 1702, que la chaleur de l'eau boüillante est un point fixe. Ce n'est pas que ce principe n'ait été attaqué, M. Taglini Professeur en Philosophie à Pise a trouvé qu'en faisant boüillir l'eau avec plus de force, on lui donnoit plus de chaleur, cela est vrai, & M. de Reaumur en convient, mais au lieu que M. Taglini s'est contenté de voir une premiére augmentation de chaleur, M. de Reaumur a poussé l'expérience jusqu'au bout, & a trouvé qu'enfin l'eau qui avoit boüilli un quart d'heure, ou un peu plus, ne pouvoit plus donner de nouveau degré de chaleur à l'Esprit de vin contenu dans un vase mis au milieu de l'eau boüillante. Le principe de M. Amontons, qui paroissoit détruit, subsiste donc, seulement demande-t-il une légere modification. En effet puisque l'eau la plus boüillante ne peut pas parvenir à la chaleur d'un métal fondu, il faut bien qu'elle ait un certain point fixe, prescrit par sa nature, & qu'elle ne peut passer.

Ce n'est pourtant pas la chaleur de l'eau boüillante que M. de Reaumur employe le plus souvent pour point fixe, il faudroit des tuyaux trop longs pour aller jusque là, & jamais l'air n'est à beaucoup près échauffé jusqu'à ce point dans les climats les plus ardents. Il prend le point opposé, celui de la congélation de l'eau, non de la congélation naturelle, mais de l'artificielle, qui se fait par de la glace & des Sels. On a appris par les Thermometres ordinaires que de la glace est plus froide que d'autre glace, & la raison en est que l'air a été plus froid dans un temps que dans un autre. Mais cette raison cessera à l'égard de la congélation artificielle, si on la fait, comme il est ordinaire, dans un temps où l'air n'ait aucune disposition à geler l'eau; & comme il pourroit rester le scrupule que la glace naturelle qu'on employera seroit plus ou moins froide, il faudra s'en tenir au point où la premiére

ſurface de l'eau, qui ſe gelera artificiellement, ſera priſe, car, ſelon la remarque de M. de Reaumur, cette premiére action du froid doit être toûjours aſſés égale, & il ne peut guere ſurvenir d'inégalités que dans la ſuite par une eſpece d'accélération plus ou moins forte. Quand de la matiére, dont le mouvement cauſoit & entretenoit la liquidité, une eau en a aſſés perdu pour n'être plus liquide dans ſa ſurface, il paroît qu'une autre eau en doit perdre préciſément autant pour ſe trouver au même état; quoique les cauſes de froid, qui agiſſent ſur l'une & ſur l'autre, ne ſoient pas exactement égales, ce ne ſera que leur action continuée qui rendra leur différence ſenſible. Après tout il ne s'agit en tout ceci que d'égalités Phiſiques, qui ne peuvent jamais être auſſi juſtes que les Géométriques.

Le froid de la congélation artificielle de l'eau étant pris pour point fixe, & en même temps, ſi l'on veut, la chaleur de l'eau boüillante, il faut graduer un Thermometre par rapport à ces points, c'eſt-à-dire, le diviſer en degrés égaux, tels que l'Eſprit de vin y montera depuis un froid plus grand que celui de la congélation juſqu'à cette congélation, & de-là juſqu'à la chaleur de l'eau boüillante. M. de Reaumur a pris une idée fort nouvelle ſur cette graduation. Les degrés égaux le ſont, non par rapport à la longueur du tuyau, nous en avons vû l'erreur manifeſte, mais par rapport aux dilatations de la liqueur; ſi le volume de la liqueur eſt de 100 parties, le Thermometre marquera 1 degré, quand ce volume ſera augmenté de $\frac{1}{100}$ partie par la dilatation, 2 degrés quand il ſera augmenté de $\frac{2}{100}$, &c. ainſi les inégalités intérieures du tuyau ne ſont plus à craindre, & quelles que ſoient celles qui s'y trouveront, il n'en arrivera autre choſe, ſinon que des degrés égaux de dilatation ſeront des degrés inégaux ſur la longueur du tuyau. Les yeux n'en ſeront peut-être pas ſi contents, mais on aura l'avantage réel & ſolide de ſçavoir au juſte de combien une liqueur a augmenté ſon volume par la chaleur, juſqu'où elle le peut augmenter, combien elle eſt de temps à prendre cette augmentation, quel eſt ſon rapport

de dilatabilité à une autre liqueur, instructions qu'on ne pouvoit pas tirer des anciens Thermometres, qui n'en disoient rien, ou ne le disoient que d'une maniére équivoque & confuse.

Graduer le Thermometre selon des degrés égaux d'augmentation de volume, c'est le graduer selon des degrés égaux de capacité de la boule & du tuyau. Que la boule seule, ou la boule, & une certaine partie du tuyau, si l'on veut, contiennent juste 100 parties égales d'eau, chacune de ces parties étant d'une quantité bien exactement connüe, il est clair que si ensuite on en verse une nouvelle dans le tuyau, une 2de, une 3me, &c. & que l'on marque les endroits où la liqueur totale du tuyau se sera élevée, on aura des degrés égaux de la capacité du tuyau, & par conséquent aussi de la dilatation d'une liqueur qui en se rarefiant monteroit à ces différents endroits marqués, car la capacité du Thermometre ayant été mesurée de cette maniére, on en ôtera toute l'eau, qui n'a servi qu'à mesurer, & on y mettra l'Esprit de vin dont on veut observer la dilatation.

Le nombre des degrés de division est arbitraire, mais il ne laisse pas de demander un choix. 100 est trop petit, un plus grand nombre donnera des divisions plus fines, & le Thermometre en sera à cet égard ce qu'on appelle plus *sensible*. M. de Reaumur juge plus commode de prendre toûjours des centaines, & il va jusqu'à 1000. Par-là il évite le plus souvent les fractions de degré, & quand il s'en trouve, elles sont assés petites pour pouvoir être négligées.

Quand on a gradué avec de l'eau la capacité du Thermometre, il a fallu déterminer l'endroit où l'on veut que soit l'Esprit de vin après s'être condensé par la congélation artificielle. Cet endroit sera à peu-près au tiers de la longueur du tuyau à compter de la boule, car l'Esprit de vin peut ensuite se dilater de plus du double par la chaleur. Il faut que cet endroit soit le nombre de la division choisie, par ex. 1000, si la division est 1000. Lorsqu'on aura versé l'Esprit de vin, & qu'on viendra à le condenser par la congélation, s'il est

au deſſus ou au deſſous de l'endroit marqué, on lui ôtera, ou bien on lui ajoûtera la quantité néceſſaire pour l'amener au point requis, & alors on ſera ſûr qu'on a le volume de 1000 parties connües d'Eſprit de vin condenſées par la congélation artificielle.

En voilà aſſés pour faire entendre en général les principes de la nouvelle conſtruction. Le plus important, c'eſt l'exactitude parfaite des meſures. Il en faut d'abord de petites, dont chacune contienne ce qu'on appelle une partie, ou de l'eau, ou de l'Eſprit de Vin, & M. de Reaumur en indique de ſi juſtes qu'elles ne perdront pas par le mouvement, ni par le tranſport néceſſaire, une ſeule goutte de la liqueur qu'elles contiendront. Il faut enſuite pour hâter l'ouvrage, en avoir de plus grandes, qui contiendront ces petites un certain nombre de fois précis. Il vaut mieux que ce nombre ſoit une aliquote de 100, comme 25. Mais nous ſupprimons tous ces détails, quoiqu'inſtructifs, & ſouvent curieux, on les apprendra du Mémoire de M. de Reaumur, & encore mieux de la pratique.

Dans les Thermometres communs on a adapté à une aſſés groſſe boule un tuyau délié & preſque capillaire, afin qu'une très-petite augmentation de volume dans la liqueur de la boule en produisît une grande & bien ſenſible dans la liqueur du tuyau. C'en étoit aſſés pour voir que la liqueur étoit rarefiée, dès qu'elle l'étoit, & même qu'elle l'étoit plus ou moins, & l'on ne s'embarraſſoit pas de ſçavoir de combien elle l'étoit préciſément. Mais dans les Thermometres nouveaux où l'on veut arriver à cette connoiſſance, qui ne peut réſulter que de la meſure exacte des volumes, il eſt inévitable que les tuyaux ſoient beaucoup plus gros, parce que l'exactitude & la ſenſibilité du Thermometre, à meſure qu'on les veut plus grandes, demandent un plus grand nombre de parties de liqueur, & que quelques petites que ſoient ces parties, elles font un tout conſidérable. M. de Reaumur eſt donc obligé de choquer l'habitude des yeux, & de renoncer à l'agrément du tuyau capillaire. Ce n'eſt pas la peine de plaider ici la

cauſe de l'utilité & de la juſteſſe contre un agrément ſi léger. Cependant par une eſpece de condeſcendance, les nouveaux Thermometres pourront avoir des tuyaux qui ne ſeront pas plus gros que ceux des gros Barometres, auſquels on eſt aſſés accoûtumé.

M. de Reaumur haſarde encore une autre difformité de ce genre. On dit qu'un Thermometre eſt plus ou moins ſenſible, ſelon qu'une même rarefaction ou condenſation arrivée à la liqueur de la boule, eſt marquée ſur le tuyau dans une plus grande ou moindre étenduë. M. de Reaumur imagine avec raiſon une autre ſorte de ſenſibilité. Elle conſiſtera dans la promptitude avec laquelle la liqueur ſentira l'action du chaud ou du froid, & la marquera. Comme les boules de ſes Thermometres ſeront plus groſſes qu'à l'ordinaire, il a fait réfléxion qu'il leur faudroit néceſſairement plus de temps pour recevoir juſqu'à leur centre, & dans la totalité de la liqueur l'action du chaud ou du froid de l'air extérieur. Un remede très-ſimple à cet inconvénient eſt que les boules, ſans rien perdre de leur capacité, ſoient applatties autant qu'on le jugera à propos, mais il eſt vrai que les yeux pourront encore le trouver mauvais, du moins dans les commencements. Peut-être auſſi que ces nouveautés de conſtruction ſeront d'autant plus agréables qu'elles ſeront plus marquées, parce qu'elles promettront plus ſenſiblement une plus grande juſteſſe.

On ne peut guére comparer deux anciens Thermometres, ce qui les rend aſſés inutiles pour des recherches Phiſiques un peu délicates. Le plus ou le moins d'élevation de la liqueur dépend du rapport de la capacité ou du diametre de la boule à la capacité ou au diametre du tuyau. Plus le diametre de la boule eſt grand par rapport à celui du tuyau, plus la liqueur monte haut par un même degré de chaleur, pour comparer deux Thermometres différents, ou les degrés de chaleur qui ont agi ſur chacun d'eux, il faudroit ſçavoir quel eſt dans chacun le rapport de ces diametres; mais on ne le ſçait point, & on ne le peut ſçavoir, ne fût-ce qu'à cauſe

des inégalités intérieures des boules & des tuyaux, qui ſont toûjours inconnuës, car il ſe trouveroit encore d'autres difficultés. Dans les Thermometres de M. de Reaumur, il ne s'agit plus du tout de ce rapport des diametres des boules & des tuyaux; dès que le point où s'arrête l'Eſprit de Vin condenſé par la congélation artificielle eſt marqué ſur deux Thermometres, & je ſuppoſe ce point inégalement élevé dans les deux, & dès que l'on ſçait que de part & d'autre l'Eſprit de Vin a un certain nombre de parties égales entr'elles dans chaque Eſprit de Vin, il n'en faut pas davantage, les deux Thermometres marqueront toûjours les mêmes degrés de chaleur, quoique ces degrés puiſſent être inégaux dans l'étendüe qu'ils tiendront ſur le tuyau. Quand un Eſprit de Vin qui aura, par exemple, 400 parties égales, montera d'un degré au-deſſus de la congélation, ou, ce qui eſt le même, aura augmenté ſon volume de $\frac{1}{400}$, & quand un autre Eſprit de Vin qui aura 500 parties élementaires, pour ainſi dire, égales entr'elles, & égales à celles du premier, ſera monté d'un degré au-deſſus de la congélation, ou aura augmenté ſon volume de $\frac{1}{500}$, ce ſera toûjours le même degré de chaleur qui aura cauſé la même rarefaction dans les deux volumes différents, quelle que ſoit d'ailleurs l'étenduë dans laquelle ce degré ſera marqué à cauſe de la différente capacité des boules & des tuyaux des deux Thermometres. Si les parties élementaires d'un Eſprit de Vin ont été priſes plus grandes que celles de l'autre, mais en même nombre, les degrés d'un des Thermometres ſeront naturellement plus grands, mais un degré d'élevation plus grand ne ſera que l'effet de la même chaleur. Ce ſera la même choſe, ſi les parties élémentaires ſont priſes plus grandes, & en plus grand nombre. Il ſeroit bon que l'on convînt d'une même meſure exacte pour les parties élementaires, & d'un même nombre total, comme de 1000 pour le nombre de ces parties condenſées par la congélation.

Il y a ici une remarque importante à faire d'après M. de Reaumur. Chacun de ces degrés inégaux en étendüe dans deux

deux Thermometres, & peut-être dans le même, marquera bien un degré égal de la dilatation de l'Eſprit de vin, mais non pas un degré égal de chaleur. Il n'eſt pas ſûr que la chaleur, toûjours augmentée par degrés égaux, produiſe dans l'Eſprit de vin des augmentations égales de volume, il eſt poſſible qu'à meſure qu'elle croît également, elle trouve toûjours ou d'autant plus de facilité ou d'autant plus de difficulté à rarefier l'Eſprit de vin, que les premiéres dilatations coûtent à la même cauſe plus ou moins d'effort que les derniéres; cette inégalité eſt plus que vraiſemblable, & l'une & l'autre progreſſion de l'inégalité l'eſt à peu-près également. Nous pouvons ajoûter encore, quoiqu'il ne s'agiſſe ici que de la même liqueur, qu'une liqueur peut ſe rarefier ſelon la progreſſion croiſſante, & une autre ſelon la progreſſion décroiſſante. Deux Thermometres, où l'Eſprit de vin ſera inégalement élevé, marqueront donc ſeulement que l'un aura reçû un certain nombre de degrés de chaleur plus que l'autre, mais non pas quel ſera le rapport de ces différents degrés entre eux. M. de Reaumur ne croit pas qu'on puiſſe arriver à cette connoiſſance exacte, tant il eſt arrêté qu'il reſtera toûjours beaucoup d'obſcurité dans nos lumiéres.

Tout ce que nous avons dit juſqu'ici ſuppoſe que l'Eſprit de vin ſoit le même dans les différents Thermometres, mais ce ſeroit une ſuppoſition bien fauſſe dans la pratique. Deux Eſprits de vin different extrêmement en qualité, en dilatabilité; cependant les Thermometres ordinaires n'ont aucun égard à cette différence, & c'eſt là le dernier que nous ayons à traiter de leurs principaux inconvénients.

L'Eſprit de vin eſt un mêlange d'une Huile éthérée, ſubtile, inflammable, & d'une eau ou flegme; l'Eau de vie n'eſt auſſi que ce mêlange, & elle devient Eſprit de vin quand on y diminüe la doſe de l'eau par rapport à celle de l'Huile, ce qu'on appelle *rectification*. L'Eſprit de vin eſt plus ou moins rectifié, & par conſéquent différent, ſelon que la doſe de l'Huile eſt plus ou moins forte, il en eſt plus ou moins dilatable par la chaleur.

Pour meſurer la dilatabilité d'un Eſprit de vin quelconque, M. de Reaumur en prend dans un Matras à long col 400 parties telles qu'elles ſont quand la congélation artificielle les a condenſées, & enſuite il voit juſqu'où les éleve la chaleur de l'eau boüillante, ce qui donnera les deux points fixes. L'opération ne promet pas d'abord un bon ſuccès, car long-temps avant que l'eau boüille, l'Eſprit de vin bout, & s'éleve beaucoup & irréguliérement, deſorte qu'il ſemble qu'on ne peut ni marquer alors le terme précis de ſon élévation, ni attendre le temps où l'eau boüillira. Mais il y a un expédient facile & heureux. On n'a qu'à retirer de l'eau chaude l'Eſprit de vin qui en eſt entouré, auſſi-tôt ſes boüillonnements ceſſent, ſa ſurface s'applanit, & ſe met tranquillement à un certain point plus élevé que celui où elle étoit, cela vient de la chaleur acquiſe, qui ſe conſerve quelque temps. On remet enſuite le Matras dans l'eau qu'on rend plus chaude, l'Eſprit de vin s'éleve encore, boüillonne, mais on le retire encore, & ſa ſurface applanie ſe remet à un nouveau point plus élevé. On recommence ce manege juſqu'à ce que l'eau étant boüillante, la ſurface applanie de l'Eſprit de vin, qu'on aura retiré de cette eau, & qu'on y aura remis, ſe tienne conſtamment au même point d'élévation dans ces changements alternatifs, car cela arrivera quand l'Eſprit de vin aura pris toute la chaleur qu'il peut prendre par l'eau boüillante ſans être échauffé juſqu'au point de boüillir.

L'Eſprit de vin le mieux rectifié que M. de Reaumur ait pû trouver à Paris chés les Marchands ordinaires, eſt tel que s'il eſt 400 par la congélation artificielle de l'eau, il devient 435 par l'eau boüillante, ce qui eſt le rapport de 80 à 87. On voit par là l'intervalle où ſeront renfermés les degrés moyens pour des Eſprits de vin moins rectifiés. Il ſeroit à propos, & même néceſſaire d'écrire ſur chaque Thermometre la qualité de l'Eſprit de vin exprimée par la dilatation qu'il peut prendre depuis le point où il eſt 400 par la congélation juſqu'à celui où il ſera 435, par ex. ou 434, &c. par l'eau boüillante. Deux Thermometres ſeront aiſés à comparer

malgré la différente dilatabilité de leurs Esprits de vin, puisque des degrés inégaux d'élévation de la liqueur, mais correspondants, ne seront que les effets du même degré de chaleur.

Il n'est nullement nécessaire de pousser la longueur des Thermometres jusqu'où la chaleur de l'eau boüillante le demanderoit, puisque celle de l'air n'ira jamais si loin à beaucoup près, cela n'est indispensable que pour l'épreuve de la qualité de l'Esprit de vin; hors de-là de moindres tuyaux suffisent, & il est plus aisé de s'en fournir. Par la même raison de facilité & de commodité M. de Reaumur n'est pas d'avis qu'on se picque d'employer le meilleur Esprit de vin, il ne s'en trouveroit pas par tout, le plus médiocre, & même l'Eau de vie suffira, bien entendu toûjours que la qualité en sera connüe. Les tuyaux seront plus courts pour une liqueur moins dilatable, & les Thermometres pourront assés aisément, si l'on veut, être égaux.

On peut ramener deux différents Esprits de vin à être de la même dilatabilité. Cette liqueur est un composé d'eau & d'huile éthérée, & toute sa dilatabilité n'appartient pas à l'huile seule, l'eau en a aussi sa part, quoique moindre. M. de Reaumur ayant fait prendre à 400 parties d'eau de la Seine tout le froid que pouvoit lui donner d'autre eau qui l'entouroit, & commençoit à se glacer, trouva que par la chaleur de cette même eau boüillante le volume de l'eau de Seine devenoit 415. Ayant pris ensuite de l'Esprit de vin dont le volume condensé par la congélation artificielle de l'eau étoit 400, & devenoit 435 par l'eau boüillante, il a mêlé 300 parties de cet Esprit de vin avec 100 d'eau de Seine, & il a eu un Esprit de vin, dont la dilatation extrême, au lieu d'être 435, n'étoit plus que 430, & c'est précisément ce qu'on trouvera par le calcul que devoient donner les 100 parties d'eau mêlées aux 300 d'Esprit de vin selon la proportion de leurs dilatations extrêmes connües par expérience. 200 parties d'eau de Seine mêlées avec 200 parties du même Esprit de vin font un Esprit de vin dont la dilatation extrême n'est plus que 425. La dilatation extrême de l'Esprit de vin affoibli

ſe trouve toûjours ou à peu-près celle qui devoit venir ſelon le calcul.

L'Inverſe de cette Méthode ſeroit de fortifier, pour ainſi dire, un Eſprit de vin foible par un autre plus fort, après avoir connu par les épreuves rapportées la dilatabilité de l'un & de l'autre. M. de Reaumur donne la regle mathématique pour avoir par cet alliage des Eſprits de vin de tel titre qu'on voudra, car on peut tranſporter à ce ſujet les expreſſions qui appartiennent aux métaux, puiſqu'il eſt tout pareil. On pourroit donc avoir par tout de l'Eſprit de vin de la même qualité, & des Thermometres parfaitement ſemblables, ce qui ſeroit bien le mieux, du moins pour les Sçavants, mais les Sçavants eux-mêmes auront peut-être de la peine à entrer dans une convention générale, tant il eſt difficile que des hommes conviennent.

M. de Reaumur étend juſqu'à une curioſité de Phiſique aſſés intéreſſante, la méthode qu'il a trouvée pour meſurer la dilatabilité de différents Eſprits de vin. Un Eſprit de vin quelconque eſt un composé de deux ſubſtances différentes, l'eau & l'huile éthérée, toutes deux dilatables, mais différemment, & il s'agit de découvrir autant qu'on le peut, quelle eſt cette différence. Nous avons vû que ſi d'un très-bon Eſprit de vin, qui de 400 deviendroit 435, on en ôtoit 200 parties qu'on remplaçât en eau de Seine, il n'iroit plus que de 400 à 425. Suppoſons que les 200 parties reſtantes d'Eſprit de vin ne ſoient que de l'huile éthérée pure; ſur la dilatation 25, il en appartient $7\frac{1}{2}$ parties à l'eau, puiſque cette eau a 200 parties, & que la dilatation de 400 de ces parties iroit à 415, donc 25 moins $7\frac{1}{2}$, ou $17\frac{1}{2}$ ſont ce qui appartient à la dilatation de l'huile, & les dilatations de l'huile & de l'eau ſont comme $17\frac{1}{2}$ à $7\frac{1}{2}$, ou 7 à 3. Mais il s'en faut bien que dans le mêlange d'Eſprit de vin & d'eau les 200 parties reſtantes d'Eſprit de vin ne fuſſent que de l'huile, M. Géoffroy le cadet a fait voir que dans l'Eſprit de vin le mieux rectifié, il y a plus de la moitié de flegme ou d'eau, & cette eau peut légitimement paſſer

pour être toute pareille à nôtre eau commune. Dans le mêlange ſuppoſé de 200 parties d'eau, & de 200 d'Eſprit de vin, il y avoit donc au plus 100 parties d'huile éthérée, & au moins 300 d'eau, n'en prenons que 300. On verra aiſément qu'il leur appartient 11 $\frac{1}{4}$ parties de la dilatation totale 25, dont le reſte qui eſt 13 $\frac{3}{4}$ appartient aux 100 parties d'huile. Mais il faut bien remarquer qu'au lieu que dans la premiére ſuppoſition les parties d'eau & d'huile étoient en nombre égal, dans celle-ci leurs nombres ſont comme 3 & 1. C'eſt le volume 3 d'eau qui a pris l'augmentation 11 $\frac{1}{4}$, & c'eſt le volume 1 d'huile qui a pris l'augmentation 13 $\frac{3}{4}$. Or les dilatations ſont d'autant plus grandes, non-ſeulement en même raiſon que les augmentations de volume ſont plus grandes, mais encore en même raiſon que les volumes primitifs étoient plus petits. Donc la dilatation de l'huile eſt à celle de l'eau comme le produit de 13 $\frac{3}{4}$ par 3 au produit de 11 $\frac{1}{4}$ par 1, ce qui donne le rapport de 33 à 9, beaucoup plus grand que le premier de 7 à 3.

C'eſt-là ce qui ſe trouve, en ſuppoſant que dans les 200 parties d'Eſprit de vin, il y en avoit 100 d'huile éthérée; mais s'il n'y en avoit que 50, ce qui eſt très vrai-ſemblable, auquel cas l'huile ne ſeroit que la 8me partie du mêlange total, on trouveroit en faiſant le même calcul que la dilatation de l'huile ſeroit à celle de l'eau dans un rapport beaucoup plus grand que celui de 33 à 9. M. de Reaumur ne croit nullement impoſſible que cela n'aille encore plus loin.

Quoi-qu'il en ſoit, il a fait une obſervation, qui ne doit pas être obmiſe. C'eſt que les degrés moyens de dilatation de l'huile & de l'eau ou flegme d'un même Eſprit de vin, ne ſont pas proportionnels aux dilatations extrêmes. L'eau ſe dilate d'abord plus difficilement que l'huile, & enſuite plus facilement, de ſorte que par la continuation du mouvement de dilatation elle repare une partie du déſavantage qu'elle avoit eu dans le commencement. C'eſt ce qui a été reconnu en comparant les dilatations moyennes d'une eau pure à celles d'un Eſprit de vin d'une dilatabilité connüe. Si les

dilatations de l'eau & de l'Eſprit de vin par la chaleur de l'eau boüillante devoient être comme 1 & 2, chaque premier degré de dilatation des deux liqueurs depuis la congélation artificielle, étoient comme 1 & 10. De-là il ſuit que de deux différents Eſprits de vin, le plus foible, qui par conſéquent aura plus d'eau, s'élevera moins que l'autre dans le commencement de leur marche par un même degré de chaleur, & que par-là les deux différents Thermometres ſeront difficiles à comparer, ou même que la comparaiſon jettera dans l'erreur. Il eſt vrai que pour les premiers degrés, on pourra compter que la dilatation de l'eau ou flegme ſera nulle, mais on ne ſçait pas précisément à quel nombre de ces premiers, cette ſuppoſition peut s'étendre ſans une erreur trop ſenſible; il eſt vrai auſſi que les dilatabilités extrêmes des deux Eſprits de vin étant connües, on pourra faire des réductions, en concevant que le plus foible des deux n'eſt que le plus fort affoibli par une certaine quantité d'eau pure, mais ce ſeront des réductions, & du calcul, & il vaut beaucoup mieux que tous les Thermometres ſoient faits, s'il eſt poſſible, avec le même Eſprit de vin, ce qui ſera fort aiſé, puiſqu'on peut l'amener à telle qualité que l'on veut.

On a vû par les Thermometres, & l'on a dû en être d'abord fort étonné que le froid faiſoit monter la liqueur, & que le chaud la faiſoit deſcendre, mais on a bien-tôt obſervé que ce n'étoit que dans les commencements de l'action de l'un & de l'autre, & l'on a conçû que la boule qui ſe reſſerroit par le froid avant qu'il ſe fût fait aſſés ſentir à la liqueur, la faiſoit monter dans le tuyau, & qu'au contraire cette même boule échauffée avant que la liqueur le fût, & par conſéquent dilatée, la faiſoit deſcendre en devenant d'une plus grande capacité. M. de Reaumur a pouſſé l'exactitude juſqu'à vouloir déterminer dans quelles bornes cet effet, qui ne pouvoit être conſidérable, étoit renfermé, & il a trouvé que la diminution de la capacité de la boule par le froid, ou ſon augmentation par le chaud n'alloit qu'à faire monter ou deſcendre la liqueur dans le tuyau de $\frac{1}{1200}$ partie de ſon

volume total, & par conſéquent de $\frac{1}{3}$ de partie ſur 400, ce qui peut bien être négligé par les plus ſcrupuleux.

Il ne reſte plus qu'une circonſtance à examiner. On laiſſe au haut du tuyau, dont le bout eſt ſcellé hermétiquement, un eſpace que la liqueur dans ſa plus grande élevation n'achevera point de remplir. Faut-il que cet eſpace ſoit ce qu'on appelle vuide, c'eſt-à-dire, plein d'un air très-rarefié, ou faut-il y laiſſer de l'air ordinaire? il y a avantage & inconvénient de part & d'autre. Si l'air eſt très-rarefié, ce qu'on aura aiſément executé en échauffant beaucoup le bout du tuyau, après quoi on le ſcellera bruſquement, le jeu de la liqueur ſera fort libre dans le tuyau, elle montera dans ce vuide, ſans y trouver de réſiſtance; mais auſſi l'air contenu dans l'Eſprit de vin s'en dégagera aiſément, parce qu'il ne ſera point preſſé, il enlevera avec lui les parties les plus ſubtiles de l'Eſprit, & cela en changera la qualité, qu'on ſuppoſe pourtant devoir être toûjours la même. Si l'air du haut du tuyau eſt de l'air ordinaire, la qualité de l'Eſprit de vin ne changera pas, mais cet air ſe rarefiera par la chaleur auſſi-bien que l'Eſprit de vin, & repouſſera en embas cet Eſprit qui tendoit à ſe dilater. Dans l'embarras de ce pour & de ce contre qui ne peuvent être évalués préciſément, M. de Reaumur prend le parti que la prudence conſeille en pareil cas, un parti moyen; il faudra de l'air médiocrement échauffé.

SUR LA NATURE DE LA TERRE EN GENERAL, ET SUR SES CARACTERES.

NATURELLEMENT on ne s'aviſera point de douter, ſi l'on ſçait bien ce que c'eſt que de la Terre, ſi l'on diſtinguera bien cette matiére ſi commune d'avec toute autre, & particuliérement d'avec le Sable. Mais dès que l'on vient à conſidérer la formation des Pierres, par exemple, qui ſont

V. les M. p. 243.

quelquefois un mêlange visible de Terre & de Sable, ou, ce qui est encore plus important, si l'on travaille en Poterie, en Verrerie, en Porcelaine, tous Arts qui demandent une connoissance très-exacte des matiéres terreuses qu'on y employe, alors on s'apperçoit, ou qu'on ne sçait pas assés, ou qu'il faut sçavoir mieux qu'on ne le sçait d'ordinaire, quelle est la nature de la Terre, quels sont ses caracteres spécifiques, & si elle differe ou ne differe pas du Sable, qui entre dans les mêmes compositions, car suivant cela, on aura différentes vûës, & les raisonnements ou les opérations se regleront différemment.

Il ne s'agit point ici de remonter jusqu'aux premiers principes, jusqu'aux particules primordiales, dont la Terre peut être formée. Sans compter que l'entreprise seroit apparemment impossible, elle seroit inutile pour le dessein present, il ne faut que des caracteres sensibles & palpables, une Phisique plus grossiére suffira, mais malgré sa grossiéreté, elle demandera encore assés de subtilité & de finesse.

Quand on n'y regarde pas de près, on peut croire, & plusieurs Phisiciens même sont dans ce sentiment, ou à très-peu près, que la Terre n'est que du Sable dont les grains sont plus fins. Mais M. de Reaumur établit des différences spécifiques entre ces deux matiéres,* & il n'est plus permis ni dans la Théorie, ni dans la Pratique de ne compter que sur cette prétenduë différence de la grosseur de leurs parties.

Par des expériences de M. de Reaumur très-simples & très-aisées à vérifier, la Terre s'imbibe d'eau de maniére à en être augmentée de volume, & réciproquement elle revient à son premier volume lorsqu'elle se desséche. Le Sable imbibé d'eau autant qu'il peut l'être n'augmente point son volume, & n'en perd rien en se desséchant. De-là il suit évidemment que l'eau ne fait que remplir les interstices que les grains du Sable laissent entre eux, mais qu'outre cette fonction qu'elle a aussi par rapport aux interstices des grains de la Terre, elle pénétre dans l'intérieur de ces grains, les gonfle, & les étend. Si elle ne faisoit qu'y pénétrer, & y remplir

remplir de petites cavités, elle ne feroit rien de plus que ce qu'elle faiſoit dans les interſtices, le volume total de la Terre n'en augmenteroit pas, il eſt néceſſaire pour cette augmentation que les grains ſoient gonflés & étendus. La ſimple pénétration, ſoit dans les interſtices, ſoit dans les cavités des grains de la Terre n'a beſoin que de la peſanteur, de la mobilité, & de la fineſſe des particules d'eau, mais la *diſtenſion* des grains a un beſoin indiſpenſable d'une autre force qui faſſe entrer violemment dans les grains plus d'eau qu'ils n'en recevroient naturellement, & qui ſurmonte la réſiſtance qu'ils apportent à cette diſtenſion. Quelle eſt cette force? il ſeroit bien difficile de le dire. C'eſt ſans doute celle qui fait que des Cordes imbibées d'eau, venant à ſe raccourcir parce qu'elles ſe gonflent, élevent des poids énormes, c'eſt celle qui fait que des Coins de bois bien ſec entrés de force dans une Roche, la fendent & en détachent de groſſes Meules de Moulin, lorſqu'ils ſe gonflent par l'eau dont ils ſont abbreuvés. Ces effets de l'eau, beaucoup plus étonnants que celui dont il s'agit ici, nous apprennent ſeulement qu'appliquée d'une certaine maniére elle a une force prodigieuſe, l'exiſtence de la force eſt prouvée de reſte, mais ſa nature demeure toûjours inconnüe.

Le Sable, quelque broyé qu'il puiſſe être, n'en eſt pas plus ouvert à l'eau, il ne la laiſſe entrer que dans les interſtices de ſes grains, & jamais dans leur intérieur, ſi ce n'eſt peut-être dans leurs petites cavités, mais alors même l'eau ne les étend pas, puiſque le volume total du Sable ne reçoit ni augmentation par l'introduction de l'eau, ni diminution par ſa ſortie, ou par le deſſéchement. La Terre eſt donc une eſpece de corps ſpongieux, dont les particules ſont fléxibles & capables d'extenſion, celles du Sable au contraire en ſont incapables par leur roideur.

Si l'on veut diſtribuer les Corps en certaines Claſſes ſelon leur pénétrabilité par l'eau, on aura trois Claſſes, la 1re de corps abſolument impénétrables à l'eau, tels que le Verre, l'Argent, l'Or, la 2de de corps peu pénétrables, tels que les

Cailloux & les Criſtaux, qui ne le ſont que quand ils n'ont pas encore été aſſés long-temps expoſés à l'air, & endurcis par ſon action, la 3me de corps abſolument pénétrables, tels que les bois, les peaux ſéches des Animaux, &c. le Sable ſe rangera dans la 1re Claſſe, & la Terre dans la 3me, & par-là on voit preſque à l'œil que ce ſont deux matiéres fort différentes.

Elles le ſont encore par un autre endroit qui n'eſt pas moins marqué, ni moins déciſif. La Terre abbreuvée d'eau eſt ductile, elle prend telle forme que l'on veut, & on le voit tous les jours par l'Art de la Poterie; cette qualité répond à la malléabilité des Métaux, & apparemment n'eſt au fond que la même. Elle ne ſe trouve point dans le Sable, ſes parties ſont trop roides, & trop infléxibles, & ſans doute cela tient à ce qu'on a déja vû qu'il n'eſt pas ſpongieux comme la Terre.

Plus la Terre eſt graſſe, plus elle eſt ductile, mais elle eſt plus ou moins graſſe, ou par elle-même, par le plus ou le moins qu'elle contient d'une certaine onctuoſité, ou par la différente quantité de Sable avec lequel elle eſt mêlée. Le Sable la rend toûjours plus maigre.

On pourroit penſer que la ductilité qui ſe trouve dans la Terre, & non dans le Sable, vient de ce que les grains de la Terre ſont plus fins, ainſi qu'ils le paroiſſent ordinairement, car cette fineſſe contribüe certainement à la ductilité, qui conſiſte en ce que les petites parties gliſſent aiſément les unes ſur les autres ſans perdre leur liaiſon, ou en prenant des liaiſons nouvelles, mais M. de Reaumur a fait des expériences qui détruiſent entiérement cette idée.

Qu'avec de la Terre mêlée de Sable, comme elle l'eſt toûjours, & une quantité ſuffiſante d'eau, on faſſe une eau bourbeuſe, qu'on laiſſera repoſer dans un Vaiſſeau, le Sable le plus groſſier ſe précipitera au fond en un certain temps, & laiſſera la Terre le ſurnager, parce qu'il eſt ſpécifiquement plus peſant qu'elle. Sur ce principe de la différence de peſanteur, il eſt viſible que par cette opération réïtérée, par différentes lotions ſucceſſives, on aura enfin le Sable & la Terre

aussi séparés, aussi purs chacun qu'il soit possible. Ce Sable bien pur, on le broye extrêmement fin, on réduit de même en poudre la Terre pure, & l'on voit que ces deux poudres mêlées ensemble & mises dans l'eau s'y soûtiennent également. Il faut donc que les particules de l'une & de l'autre soient d'une petitesse à trouver de la part de l'eau une égale résistance à leur descente, c'est-à-dire, qu'elles soient d'une égale finesse. Il faut même à la rigueur que celle des particules de Sable soit la plus grande, car elles sont spécifiquement plus pesantes que celles de Terre, & elles descendroient plûtôt qu'elles, ou sans elles, si elles n'avoient une plus grande surface en même raison qu'elles ont plus de pesanteur, or pour avoir une plus grande surface en raison de la pesanteur, elles doivent être plus petites, comme le sçavent les Géométres. Cependant une pâte faite de cette même poudre de Sable ne sera point ductile, & celle de la poudre de Terre le sera. La ductilité de la Terre lui vient donc d'une qualité plus intrinséque que la finesse de ses grains, qui n'appartiendroit qu'à des parties intégrantes, & par conséquent elle est propre à être un caractere spécifique qui distingue la Terre d'avec le Sable.

La ductilité de la Terre tient à ce qu'elle est spongieuse. Ses grains non seulement pénétrés & amollis par l'eau, mais gonflés & étendus, vont à la rencontre les uns des autres à cause de cette nouvelle extension, prennent aisément à cause de leur mollesse les figures nécessaires pour s'ajuster exactement ensemble, & sont en état par la même cause de perdre aisément ces figures pour en prendre d'autres. Quand la Terre, dont on avoit fait une pâte en l'abbreuvant d'eau, est desséchée, elle en est plus dure, & mieux liée, parce que les nouveaux engrénements de particules que l'eau y avoit produits subsistent même après l'évaporation. Il est clair que ce seroit le contraire de tout cela pour du Sable qu'on auroit traité comme la Terre.

La pénétrabilité de la Terre par l'eau, est ce qui rend la Terre la plus parfaite impénétrable à l'eau jusqu'à un certain

point. Cette Terre la plus parfaite eſt la Glaiſe, qui eſt moins mêlée de Sable, plus pure qu'aucune autre, & tout le monde ſçait que l'eau ne paſſe point au travers, ſi ce n'eſt à une très-petite épaiſſeur. C'eſt que l'eau qui en a pénétré une premiére couche, & l'a pénétrée d'autant mieux qu'elle n'y a trouvé qu'une pure Terre, en a tellement gonflé tous les grains, & ſi également, qu'ils ne lui permettent plus de paſſer juſqu'à une ſeconde couche. Quelques-uns ont crû que l'eau entraînoit de la premiére couche dans la ſeconde des grains, qui lui fermoient enſuite le paſſage, mais M. de Reaumur oppoſe à ce ſentiment entre autres raiſons, que la ſimple vapeur d'une eau chaude, qui ne peut être ſoupçonnée de déplacer des grains, fait le même effet ſur la Glaiſe.

On pourroit imaginer ſans choquer la vraiſemblance, que la ductilité de la Terre viendroit de la figure de ſes particules, qui ſeroient des lames bien polies, poſées les unes ſur les autres, unies par un attouchement immédiat, mais faciles à ſéparer faute d'engrénement. Cette diſpoſition ſi favorable ne peut pourtant ſuffire ici, elle ſeroit bientôt troublée quand on viendroit à pêtrir la pâte de Terre, & à changer ſa forme, & les lames prendroient elles-mêmes les arrangements les moins réguliers & les plus bizarres. De plus les Talcs & les Gypſes ſont certainement formés par lames, & on trouve qu'ils le ſont tant que leur diviſion peut aller, ce qui donne un juſte ſujet de croire que cette diſpoſition s'étend juſqu'à leurs petites particules. Cependant qu'on les réduiſe en poudre fort fine, & qu'on en faſſe des pâtes bien humectées d'eau, ces pâtes n'auront point de ductilité, c'eſt donc une qualité attachée, non à la figure préciſément, ou à la fineſſe, ou à l'arrangement, mais à la ſoupleſſe des parties.

Les Sels concrets, tels que l'Alun, le Vitriol, le Borax, la Soude, &c. quoique réduits en une poudre ſi fine qu'elle ſe ſoûtient dans l'eau, tandis que celle de la Terre ne s'y ſoûtient pas, ne font jamais, non plus que le Sable, ou les Gypſes, une pâte ductile.

M. de Reaumur fait déja appercevoir quelques uſages de

ſa Théorie. Elle entrera dans le Siſtême de la formation des Pierres qu'il a ébauché en 1721, ainſi que nous l'avons dit *. Les caractéres de la Terre, qui viennent d'être établis, font reconnoître que comme il y a certaines Pierres, telles que le Grès, qui ne ſont que du Sable pur, lié par la matiére criſtalline ou pierreuſe que M. de Reaumur a ſuppoſée, il y en a d'autres où cette même matiére a lié de la Terre pure, car elle ſe manifeſte, & ſe rend preſque viſible par les expériences faciles que l'on fait ſur ſa ductilité, & ſur ſon renflement quand elle eſt bien humectée, ou ſon raccourciſſement quand elle ſe deſſéche. Les Cailloux ſont, ſelon M. de Reaumur, des Pierres pétrifiées une ſeconde fois, ces Pierres, qui auront eu de la Terre, n'en ont plus étant Cailloux, du moins la Terre y a perdu les caractéres qui la rendoient reconnoiſſable. Cette eſpece de métamorphoſe eſt digne d'attention. Apparemment la matiére, en s'inſinuant ſimplement entre les grains d'une Terre, l'avoit rendüe Pierre, & enſuite elle la rend Caillou en pénétrant juſque dans l'intérieur des grains.

* p. 12. & ſuiv.

L'Art de la Poterie confirme la Théorie préſente. On ſçait combien les Vaſes faits d'une pâte de Terre ſont ſujets à ſe fendre & à ſe gercer, & combien il faut avoir d'attention à les faire ſécher peu à peu & par degrés pour prévenir cet accident. On le prévient auſſi en mêlant avec la Terre une certaine quantité de Sable qui n'empêche pas la ductilité néceſſaire. Il ſaute aux yeux que la raiſon de cette pratique eſt que le Sable ne ſe renfle ni ne ſe raccourcit comme la Terre. Ce qui rend raiſon des pratiques aveugles des Arts, ce qui les éclaire, doit auſſi en corriger de vicieuſes, ou en faire naître de plus parfaites.

Nous avons rapporté en 1726*, 1727* & 1728*, toutes les nouvelles vûës de M. Couplet ſur les Revêtements, ou les Murs, qui ont des Terres à ſoûtenir. Quoi-que la Géométrie ait dominé dans ces recherches, la Phiſique y eſt entrée autant, à ce qu'il ſemble, qu'elle le pouvoit, ſurtout par la ſeconde hypotheſe de M. Couplet, mais la Théorie de M. de Reaumur offre une conſidération nouvelle très-

* p. 58. & ſuiv.
* p. 132. & ſuiv.
* p. 103. & ſuiv.

importante, & qui a échappé à tous ceux par qui ce ſujet a été traité.

Des Terres coupées à plomb s'éboulent ſi peu qu'à peine s'en détache-t-il quelques hottées en tout un an, & même cette petite quantité ſeroit encore plus petite, ſi les premiéres parcelles avoient été ſoûtenuës, & ne fuſſent pas tombées; car ce n'eſt ordinairement que leur chûte, qui a entraîné celle des ſecondes. Un Mur n'a donc pas beaucoup de peine à ſoûtenir ces Terres, ſi on n'y conſidére que l'effort qu'elles font pour s'ébouler, mais elles en ont un beaucoup plus grand, & très-violent, c'eſt celui qu'elles font pour s'étendre, lorſqu'elles ſont bien imbibées d'eau, & c'eſt à quoi le Mur de revêtement doit s'oppoſer.

Il eſt vrai que cette tendance des Terres à s'étendre, doit agir en tout ſens, verticalement auſſi-bien qu'horiſontalement, & que le Mur ne s'oppoſe qu'à l'action horiſontale, mais il faut obſerver que la tendance verticale n'ayant pas la liberté d'agir, du moins dans toutes les couches inférieures de Terre preſſées par le poids des ſupérieures, toute la tendance verticale ſe tourne en horiſontale, tant que la difficulté de ſoulever les couches ſupérieures eſt plus grande que celle de forcer le Mur, & cela peut aller, & va effectivement fort loin. M. de Reaumur a fait une Expérience, d'où il réſulte qu'une Terre qui a très-peu de hauteur, ne laiſſe pas de s'étendre beaucoup davantage dans le ſens horiſontal, & que la force qu'elle a pour s'étendre en ce ſens-là eſt beaucoup plus grande que tout ſon poids, & par conſéquent que la force dont elle auroit beſoin pour s'étendre autant dans le ſens vertical.

Plus les Terres auront de facilité à s'imbiber d'eau, plus elles auront de pouſſée contre un Mur de revêtement, des Sables n'en auroient aucune à cet égard, & par cette raiſon, M. de Reaumur propoſe pour remede à l'inconvénient dont il s'agit, de mêler exprès des Gravois dans les Terres qui ne ſeroient pas naturellement aſſés ſablonneuſes. Non ſeulement les Gravois ou les Sables ne s'imbiberont pas d'eau,

mais ils laisseront des interstices qui seront des especes de retraites ménagées à la Terre qui se renflera, moyennant quoi elle n'agira pas contre le Mur.

Pour un examen parfait de la nature de la Terre, les deux caracteres que nous avons exposés jusqu'ici, ne suffiroient pas quoiqu'ils puissent passer pour les principaux. M. de Reaumur en trouve plusieurs autres, qui distingueront les Terres entre elles, & dont il ne donne encore qu'une espece de dénombrement, se réservant à les considérer plus en détail.

Les Terres différent par les couleurs, soit celles qu'elles ont naturellement, soit celles qu'elles prennent au feu.

Les unes se vitrifient, les autres se calcinent, & cela en différents degrés.

Elles passent toutes pour être Alkalines, & les Acides agissent sur elles; mais fort différemment. Il y a des Terres qui reçoivent des plus foibles Acides une violente impression, tandis que d'autres en reçoivent à peine une sensible des Acides les plus forts. Elles sont encore à cet égard fort différentes des Métaux par le peu de temps qu'elles demeurent suspenduës dans leurs Dissolvants. Cette matiére peu examinée jusqu'à présent promet de la nouveauté.

Encore une qualité des Terres, à laquelle on n'a pas fait d'attention, c'est leur odeur. Celle des Pluyes d'Eté est fort connuë, elle vient de la Terre qui n'a presque d'odeur que quand elle est humectée, tout au contraire de quelques autres matiéres, comme les Cheveux, la Corne, &c. qui n'en ont que par le feu.

On sent assés ce qu'on peut attendre des recherches qui se feront sur toutes ces qualités des Terres, si exposées à tout le monde pour la plûpart, & si peu observées. Leurs combinaisons feront naître une distribution générale des Terres en Classes, Genres & Especes, pareille à celle qui a paru si nécessaire en Botanique, & dont on s'occupe depuis si longtemps. Ces sortes d'Ordres, ou d'Ordonnances, si l'on veut, ne sont, à la vérité, que des productions de l'Esprit humain, mais ils nous aident à embrasser mieux tout ce que la Nature

ne nous a donné que pêle-mêle & en confusion; quelquefois même ils donnent lieu de découvrir des causes générales, & de prévoir avec vrai-semblance des faits particuliers.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

V. les M. p. 1. La Comparaison des Observations faites à Paris & à Aix.

V. les M. p. 57. L'Ecrit de M. de Reaumur sur la Méchanique avec laquelle certains Insectes roulent des feüilles.

V. les M. p. 574. Et les Observations Météorologiques de cette année 1730, par M. Maraldi.



ANATOMIE.



ANATOMIE.

SUR LE CRISTALLIN.

M. PETIT le Médecin, qui, comme on l'a vû dans plusieurs des Volumes précédents, s'est attaché particuliérement à l'Oeil, est entré dans des détails beaucoup plus grands qu'il n'avoit encore fait sur le Cristallin, une des principales parties d'où dépend la perfection de la Vision, & qui de plus est le siége de la Cataracte. V. les M. p. 4. & 435.

Il ne s'est pas borné aux Cristallins humains de tous âges, il a étendu ses recherches jusqu'à ceux de tous les Quadrupedes, Oiseaux, Poissons, qu'il a pû recouvrer. Il en a considéré la différente consistence, la couleur, la figure, les dimensions, la pesanteur. Voici ce qui résulte de ses observations.

Dans les Serpents & les Poissons, le Cristallin est presque sphérique.

Dans tous les autres Animaux, j'entends ceux que M. Petit a vûs, il est Lenticulaire, comme on sçait, ou formé de deux Segments de Sphére posés l'un contre l'autre, & qui ont une circonférence circulaire commune. Les deux Sphéres, dont ces Segments sont portions, ne sont que très-rarement égales. La Sphére à laquelle appartient le Segment qui fait la surface antérieure du Cristallin est presque toûjours la plus grande des deux, & par conséquent la surface antérieure du Cristallin est moins convexe, ou moins courbe que la postérieure, & fait de moindres refractions. M. Petit a eu la patience de mesurer dans un grand nombre de Sujets de différentes especes ces deux convexités, le diametre de la circonférence commune, ou la largeur du Cristallin, la longueur de la ligne menée du sommet d'un Segment au sommet de l'autre, ce

qui eſt l'épaiſſeur ou l'axe du Criſtallin. Ces petites meſures ſont les plus difficiles à prendre, & les plus ennuyeuſes par leur petiteſſe même. Pour ces dimenſions & pour les peſanteurs des Criſtallins, M. Petit a fait une Table de 26 Criſtallins humains de différents âges, & une autre Table de 36 Criſtallins de Bœufs, dont il eſt aiſé d'avoir une aſſés grande quantité.

La peſanteur du Criſtallin humain a été trouvée de 1 grain $\frac{1}{2}$ dans un Fœtus de 7 mois, & paſſé 10 ans elle eſt communément de 4 grains ou 4 $\frac{1}{2}$, rarement va-t-elle à 5.

La peſanteur des Criſtallins de Bœufs, que l'on peut ſuppoſer avoir été tous tués au même âge, varie depuis 38 grains juſqu'à 56.

Outre ces deux Tables, M. Petit donne un grand nombre d'obſervations pareilles ſur des Criſtallins d'Animaux de différentes eſpeces.

En général, la peſanteur des Criſtallins ne dépend pas ſeulement de leur groſſeur, mais encore de leur fermeté.

Ils ſont plus fermes dans les Animaux plus âgés. Ils reſſemblent, dans les Enfants nouveaux-nés, à de la Boüillie refroidie. Cette grande molleſſe diminüant toûjours, le Criſtallin a dans toute ſa ſubſtance vers l'âge de 15 ou 20 ans, une fermeté aſſés égale, enſuite elle augmente encore, mais inégalement, elle eſt plus grande vers le centre, que vers la circonférence, & quoiqu'elle continüe toûjours d'augmenter, elle conſerve preſque toûjours cette inégalité.

Le Criſtallin de l'Homme eſt moins ferme que ceux des Oiſeaux, des Quadrupedes, & des Poiſſons, & ils ſuivent à cet égard l'ordre où nous venons de les nommer. Dans les Poiſſons la partie centrale ou intérieure eſt preſque dure comme de la Corne, & en récompenſe la partie extérieure eſt plus molle que dans les autres Animaux, & n'eſt qu'un mucilage.

Tout le monde ſçait que le Criſtallin humain perd de ſa convexité avec le temps, mais une choſe qui lui eſt particuliére, & que M. Petit n'a obſervée dans aucun autre, c'eſt

qu'il change de couleur. Il n'en a point, & eſt parfaitement tranſparent depuis la naiſſance juſqu'à 25 ans ou environ, après quoi il prend dans ſon centre une legére couleur de jaune, qui enſuite devient toûjours plus foncée, & s'étend toûjours vers la circonférence. M. Petit a vû les deux Criſtallins d'un Homme de 81 an, qui reſſembloient à deux morceaux d'un bel Ambre jaune.

Plus les Criſtallins ſont fermes, plus ils jauniſſent.

Il n'eſt pas fort rare que les deux Criſtallins d'un même Sujet différent en quelque choſe.

Les Criſtallins ſéchés à l'air pendant un temps ſuffiſant, perdent beaucoup de leur poids, & par conſéquent de leur matiére. Celle qui ne s'eſt point évaporée, & qui eſt la plus ſolide, eſt ſelon M. Petit la matiére tranſparente, mais qui ne l'eſt plus après l'évaporation de l'autre. On peut concevoir des petites lames aſſés fermes, qui pour ſe laiſſer pénétrer les unes après les autres par des rayons de lumiére non interrompus avoient beſoin d'être tenuës dans de certaines poſitions exactes, dans un certain ordre, & l'étoient par une matiére plus molle, qui les ſoûtenoit & rempliſſoit leurs intervalles. Après l'évaporation de cette matiére, les lames ſe dérangent, tombent en confuſion les unes ſur les autres, & il n'y a plus de tranſparence, ainſi qu'il arrive à du Verre pilé.

Plus un Criſtallin eſt ferme, moins il perd de ſon poids en ſéchant, & plus il a de matiére tranſparente.

Le Criſtallin de l'Homme peut perdre juſqu'aux $\frac{3}{4}$ de ſon poids. Pluſieurs Criſtallins de jeunes Animaux en perdent autant.

La ſtructure du Criſtallin par couches ou enveloppes concentriques poſées les unes ſur les autres ſe confirme telle qu'on la conçoit ordinairement. M. Petit s'en eſt aſſûré tant par des coupes adroites du Scalpel, que par des expériences de Criſtallins mis dans pluſieurs liqueurs différentes, & principalement dans des Eſprits acides, où ils ſe ſont fendus, tantôt en Côtes de Melon, tantôt du centre à la

circonférence, ou de la circonférence au centre, mais toûjours d'une maniére à donner lieu de juger de la construction totale.

M. Petit s'est fort étendu sur la Capsule du Cristallin, à laquelle il a donné un Mémoire entier. C'est une Membrane qui enveloppe tout le Cristallin, mais une Membrane si déliée que d'habiles Anatomistes en ont nié l'existence, ou du moins en ont douté. Elle n'est effectivement guére moins fine dans l'Homme qu'une toile d'Araignée. Aussi quelques-uns l'appellent-ils *Arachnoïde*. Elle est une fois plus épaisse dans le Bœuf, que dans l'Homme, & encore plus dans le Cheval. Elle seroit par conséquent moins difficile à démontrer dans ces Animaux, & ce seroit une assés forte présomption qu'elle devroit se trouver dans l'Homme, mais on l'y démontre aussi, & même sans injection, quoique ce fût d'ailleurs une chose assés surprenante qu'une Membrane si fine pût être injectée. Elle peut l'être cependant. Elle reçoit quelquefois aussi une Injection naturelle, c'est-à-dire, qu'il s'y fait une inflammation, & que ses Vaisseaux plus remplis de Sang, ou de la liqueur qu'ils portent, deviennent visibles, & qu'on apperçoit leur distribution, & leurs ramifications.

Le Cristallin de l'Homme revêtu de sa Membrane ou Capsule paroît moins transparent à sa partie antérieure qu'à la postérieure, mais s'il est dépoüillé, sa transparence est égale des deux côtés.

Le ligament ciliaire se termine & s'attache à la partie antérieure de la Capsule par des fibres qu'il y jette, & par les Vaisseaux qu'il lui fournit. Ces vaisseaux ne sont que des Limphatiques. Quand il paroît du Sang dans cette Membrane, c'est par quelque accident particulier, comme lorsque dans un accouchement difficile la tête de l'Enfant a été violemment comprimée au passage, & que le Sang y a été obligé de s'insinuer dans des Canaux qui ne lui étoient pas destinés.

La Capsule se nourrit donc de cette Limphe, qui lui est apportée par les Vaisseaux qu'elle reçoit du Ligament Ciliaire,

On voit qu'il s'en épanche une partie dans la cavité de la Capſule, entre cette Membrane & le Criſtallin.

M. Petit l'a toûjours trouvée tranſparente, tant dans l'Homme que dans les Animaux, même dans les Sujets qui avoient des Cataractes. La Cornée & la Membrane Hyaloïde trempées dans l'eau boüillante, dans les Eſprits acides, &c. y perdent leur tranſparence, la Membrane Criſtalline y conſerve la ſienne, elle ne la perd que dans l'Eſprit de Nitre, encore s'y diſſout-elle le plus ſouvent, plûtôt que de la perdre. Les Criſtallins deviennent opaques dans des Solutions de pluſieurs ſortes de Sels, & leurs Capſules ne le deviennent pas.

Il ſeroit fort naturel que de la Capſule, il partît des Vaiſſeaux, qui entraſſent dans le Criſtallin, c'eſt ainſi que toutes les parties du Corps de l'Animal ſont liées avec leurs voiſines, mais M. Petit s'eſt fort aſſûré qu'il n'en étoit pas de même ici. Le Criſtallin eſt la ſeule partie parfaitement iſolée à l'égard de toute autre, & en effet ſa tranſparence le demande; elle ſeroit au moins troublée & diminuée ſi des Vaiſſeaux venoient ſerpenter dans ſa ſubſtance, & traverſer de tous côtés ces lames ou ces couches qui le compoſent, & dont le tiſſu a beſoin d'être ſi homogene.

Comment donc ſe nourrit le Criſtallin, s'il n'a point de Vaiſſeaux? il s'imbibe de cette Limphe épanchée dans la Capſule, & s'en nourrit comme font pluſieurs autres Corps qui croiſſent ſans *intus ſuſception*. Peut-être même ne ſe laiſſe-t-il pénétrer que par la partie la plus ſéreuſe de cette liqueur, tandis que l'autre partie plus viſqueuſe reſte extérieure, & prenant peu à peu une certaine conſiſtence, ſe moule entre la Capſule & le Criſtallin dont elle devient la premiére & la plus grande couche pour un temps, car enſuite elle ſera recouverte par une autre.

Si cette Limphe vient à manquer, le Criſtallin devient dur & opaque, & peut aiſément ſe réduire en poudre, ainſi que M. Petit l'a obſervé. La Capſule qui ſera le Réſervoir des Sucs nourriciers du Criſtallin aura donc un uſage aſſés

important, ſans compter celui de l'arrêter & de le tenir en état dans le Chaton de l'Humeur Vitrée, où il eſt enchaſſé, comme un Diamant dans le ſien.

Cette liqueur eſt en ſi petite quantité dans l'Homme qu'elle s'eſt dérobée aux expériences que M. Petit en eût voulu faire. Il faudroit avoir 18 ou 20 Yeux à la fois, & tous bien pourvûs de la Limphe, car ils ne le ſont pas tous, & il eſt bien viſible que cela ne ſeroit pas aiſé. Du moins il a fait quelques épreuves ſur la Limphe Criſtalline des Bœufs, qui eſt en plus grande quantité, & d'ailleurs plus viſqueuſe, & plus propre à ſe décompoſer, mais il n'en a encore pû tirer de conſéquences bien préciſes.

Il en tire une aſſés importante de ce qu'il a découvert ſur la Capſule. On croit encore qu'il peut y avoir des Cataractes membraneuſes, qui ſeront des Membranes épaiſſies, & devenües opaques, on en a vû*. Mais M. Petit juge qu'on a été trompé par une fauſſe apparence. Ces Cataractes ſont la Capſule épaiſſie, à la vérité, mais non pas dans ſa propre ſubſtance. Le Criſtallin, faute de nourriture ſuffiſante s'eſt deſſéché, & en ſe deſſéchant s'eſt collé à ſa Capſule, dont il n'étoit plus ſéparé par la Limphe. L'épaiſſeur qu'on trouve de plus à la Capſule, & qui cauſe ſon opacité, lui vient de quelques particules étrangéres, qui appartenoient au Criſtallin. Qu'on les enleve par le moyen d'un peu d'eau, la Capſule redevient tranſparente. Combien de choſes à obſerver ſur l'Oeil ſeul ! combien en avons-nous déja dit, dont de grands Oculiſtes, & qui ont eu de grands ſuccès, n'ont eu peut-être guére de connoiſſance !

* V. l'Hiſt. de 1722. p. 15. & 16.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M. Du Vivier, Chirurgien Major de l'Hôpital de Thionville, envoya à M. Morand un Rein unique, tel qu'il l'avoit trouvé à l'ouverture du Corps d'un Suiſſe. On ne laiſſoit pas de conjecturer par une échancrure de la ſurface que ce Rein avoit été formé de la jonction des deux, mais comme M. du Vivier avoit trouvé le Foye du Sujet extrémement gros, il y avoit lieu de croire que des deux Reins c'étoit le droit qui ayant été fort preſſé & fort incommodé, s'étoit uni à l'autre, dont l'extenſion naturelle n'avoit point été gênée, & en effet ce Rein unique étoit beaucoup plus gros dans toute ſa partie gauche, & tous les Vaiſſeaux, qui euſſent appartenu aux deux Reins, & qu'il avoit, quoique dans une poſition un peu différente de l'ordinaire, étoient auſſi plus gros de ce même côté-là. M. Morand le diſſequa en pleine Académie, & on le trouva effectivement unique en dedans, comme il le paroiſſoit en dehors. Il n'eſt point dit que le Suiſſe eût aucune incommodité qui ſe rapportât à cette conformation ſinguliére.

Elle ne l'eſt pas cependant à tel point, qu'il n'y en ait déja des exemples connus. M. Morand en cita un pris de la Centurie 11me Hiſt. 77. des *Hiſtoires Anatomiques* de Th. Bartholin. Lui-même en fit voir un pareil, & M. du Vivier en alleguoit auſſi un qu'il avoit vû autrefois. On peut aiſément juger qu'il y avoit des différences dans le nombre & dans la diſtribution des Vaiſſeaux.

II.

Un jeune Gentilhomme de Languedoc âgé de 13 à 14 ans qui après s'être fort échauffé, s'étoit mis les pieds dans de l'eau froide, en eut une fiévre ordinaire, dont la ſuite fut

très-fâcheuse. C'étoit une tumeur très-considérable, qui occupoit le milieu de la région Epigastrique, & presque les deux Hipochondres, au haut de laquelle on remarquoit le Cartilage Xiphoïde relevé & poussé en dehors de deux pouces, & qui étoit terminée dans le bas à un pouce au dessus de l'Ombilic. Comme les Cataplasmes, les Remedes émollients, spiritueux, &c. avoient été inutiles, & que le Malade attaqué d'une fiévre lente tomboit dans un desséchement & dans un dépérissement très-menaçant, on résolut à Montpellier d'ouvrir la tumeur, & ce fut M. Soullier, Ecuyer, Maître Chirurgien & Anatomiste Royal en l'Université de Médecine de cette Ville, qui fit l'opération. Il trouva le Foye considérablement abscédé dans sa partie antérieure & convexe, il s'y étoit fait un trou qui auroit pû recevoir la moitié d'un Oeuf de Poule, & il en sortoit dans les Pensements de la matiére sanguinolente très-épaisse, quelquefois jaunâtre, amere & inflammable, qui étoit de véritable Bile, & toûjours des floccons de la propre substance du Foye, où l'on pouvoit appercevoir de petits bouts de Vaisseaux, les uns Sanguins, les autres Biliaires.

La principale difficulté étoit de bien vuider la matiére de l'Abscès, d'en empêcher le séjour dans le Foye, & le reflux dans le Sang. Pour cela M. Soullier imagina une Cannule d'argent particuliére, émoussée par le bout qui entroit dans le Foye, de peur qu'elle ne le blessât, mais percée de plusieurs ouvertures latérales, qui recevoient la matiére nuisible. De-là il étoit aisé de la jetter en dehors, & on avoit eu même la précaution de faire qu'elle ne pût s'épancher que sur une plaque de plomb appliquée à la Playe, car autrement elle eût causé des excoriations à la Peau. Le tout réüssit si bien, que l'on vit la fiévre du Malade diminüer de jour en jour, & son embompoint naturel revenir peu à peu. Sa playe se cicatrisa en très-peu de temps.

M. Soullier a crû devoir prévenir une objection de Théorie qu'on pourroit faire. Presque tous les Anatomistes tiennent que la Bile contenüe dans les Vaisseaux du Foye est toûjours

toûjours insipide, & à peine colorée, & qu'il n'y a que celle de la Vésicule qui soit jaune & amere. Cependant on a vû ici de la Bile ainsi conditionnée qui ne sortoit pas de la Vésicule, mais il est fort naturel que les qualités qu'elle y auroit prises, elle les ait prises par son séjour dans la substance du Foye.

La Relation envoyée à l'Académie par M. Soullier a été signée de Mrs Chicoyneau & Bourraigne, fameux Médecins de Montpellier.

III.

Un homme de 28 ans employé à Brest dans les Fermes du Roy, s'étoit plaint pendant 10 mois d'une douleur de poitrine, qui lui ôtoit la faculté de respirer, d'un vomissement qui lui prenoit par paroxismes, & d'une pesanteur dans le bas ventre. Il mourut après avoir essuyé inutilement tous les remédes ordinaires, & il fut ouvert par M. Cadran Chirurgien des Vaisseaux du Roy à Brest, qui en a envoyé la Relation à M. du Fay. On lui trouva plus de causes de tous ses maux qu'il n'en falloit, les Poumons flétris & très-secs, la Pleure très-enflammée, les Intestins gangrenés, la Vessie raccornie & vuide, la Vésicule du Fiel pareillement toute vuide, mais on lui trouva aussi ce qu'on n'eût pas soupçonné, & ce qui n'avoit rapport à aucun des maux dont il se plaignoit. Il n'avoit jamais rendu de sable, jamais eu de douleurs Néphrétiques, ni de suppression d'urine, cependant son Rein droit, devenu extraordinairement gros, d'une substance cartilagineuse, & si dure qu'on eut de la peine à le couper, renfermoit une grosse Pierre du poids de 6 Onces $\frac{1}{2}$. Le corps de la Pierre, formé à l'ordinaire par couches, remplissoit la capacité du Bassin, & par son bout inférieur enfiloit la route de l'Uretere, mais il partoit de ce corps un grand nombre de branches d'une figure extrêmement irréguliére, dont les unes se distribuoient dans les Cellules des Vaisseaux Excrétoires, & les autres ne s'attachoient à rien; elles n'étoient toutes que des graviers entassés, & enveloppés d'une lame osseuse, tirant sur la couleur d'un Corail blanc.

Le Rein gauche étoit dénüé de toute ſa ſubſtance, n'ayant ſes Cellules remplies que d'une liqueur verdâtre. Il eſt preſque inconcevable que de ſemblables Reins ne ſe ſoient pas fait ſentir, auſſi-bien que toutes ces autres parties qui n'étoient pas plus mal affectées.

IV.

M. du Fay, Médecin du Port de l'Orient, a écrit à M. Geoffroy, que dans le cours de deux ans, il étoit ſorti à un Charpentier de ce Port, âgé de 84 ans, 4 Dents, 2 Inciſives, & 2 Canines.

V.

M. Boüillet, dont nous avons déja parlé pluſieurs fois; Sécrétaire de l'Académie de Béſiers, & Correſpondant de celle de Paris, a écrit à M. de Mairan que les Vers ronds & longs, qui ſont toûjours aſſés communs dans le pays où il eſt, l'ont été beaucoup davantage en 1730. Des perſonnes de tout âge, de tout ſexe, de tout tempérament, en ont été attaquées & en ont rendu même quelquefois par la bouche. Quelques-uns en ſont morts malgré tous les ſecours de la Médecine. La femme d'un Artiſan de Béſiers a été celle qui a eu la maladie la plus conſidérable & la plus opiniâtre. Elle a jetté dans l'eſpace de 25 jours 21 ou 22 Vers, dont 6 ſont venus par la bouche, 5 vivants & 1 mort, & les autres par les ſelles, vivants la plûpart, mais qui mouroient peu de temps après. Ce n'étoit qu'à force de remédes les plus puiſſants redoublés qu'on les arrachoit de ſon corps, & le plus grand nombre n'en avoit pas été tué.

Cette femme avoit à la vérité uſé de quelques mauvais aliments, mais ordinaires dans le pays, & aux gens de ſon état, & d'autres perſonnes, qui n'en avoient pas uſé, & qui faiſoient même des excès de vin, ne laiſſoient pas de tomber dans cette maladie. Cela a fait penſer à M. Boüillet que la principale cauſe de cette abondante génération de Vers avoit été la grande douceur de l'hiver de 1730, qui avoit fait éclorre leurs Oeufs en plus grande quantité, & plus facilement, ſi cependant ces Vers ſont Ovipares.

Car M. Boüillet lui-même rapporte que dans un Ver de cette eſpece, plus gros que les autres, on a vû clairement de petits Vers vivants monter & deſcendre. Ce fait, qui n'a été vû que de la Mere du Malade, dont le Ver étoit ſorti, & qui fut dit auſſi-tôt à un Maître Apoticaire de Béſiers, ne paroîtroit pas aſſés atteſté, s'il n'y en avoit deux à peu près ſemblables, l'un dans une Lettre inſérée dans les *Actes* de Th. Bartholin tom. 3. c. 58, l'autre dans la nouvelle Edition du Traité de la *Génération des Vers*, p. 39.

VI.

Le même M. Boüillet a vû un Foye de Coq peſant un peu plus d'une livre. Il n'avoit rien d'extraordinaire que ſa groſſeur monſtrueuſe. Le Coq avoit été tué par hazard d'un coup de pierre, & on ne lui avoit remarqué aucune ſorte d'indiſpoſition.

VII.

M. Garſin, Correſpondant de l'Académie, & qui a été employé par la Compagnie Hollandoiſe des Indes Orientales en qualité de Chirurgien, a vû dans l'Eſtomac parfaitement vuide d'une Bonite que l'on prit dans la Mer au de-là de l'Equateur, un Ver qui y étoit aſſés fortement attaché, & dont on a joint ici la figure au naturel, pour tenir lieu d'une plus ample deſcription. Le corps de ce petit Animal eſt diviſé en deux parties peu inégales par une bulle aſſés groſſe & bien marquée, placée comme ſous le ventre, & qui peut s'enfler & ſe deſenfler alternativement. Quand cette bulle s'enfle elle s'attache par un orifice qu'elle a, & qui ſe dilate, à quelque corps tel qu'étoit l'eſtomac de la Bonite, & alors ne contenant qu'un air très-rarefié, & preſſée de toutes parts également par l'air plus denſe qui l'environne, elle eſt, à la maniére d'une Ventouſe, fortement appliquée à l'endroit qu'elle a ſaiſi. C'eſt-là le point fixe ſur lequel ſe font les deux mouvements de l'Animal. Par l'un ſa bulle étant arrêtée à demeure il promene ſur ce centre en tous ſens la partie antérieure de ſon corps qui eſt fléxible, s'allonge & ſe raccourcit, & même ſe met en arc, & ſa bouche ou trompe qui eſt

à l'extrémité de cette partie antérieure va ſucer ſucceſſivement tout ce qui ſe trouve dans l'eſpace aſſés grand que ce mouvement ſi varié peut parcourir. C'eſt à cauſe de cette ſuccion que M. Garſin a nommé ce Ver *Hirudinella marina*, petite Sangſuë de Mer. Par l'autre mouvement, qui eſt proprement le progreſſif, l'Inſecte ayant arreſté ſa bulle à un endroit, arrête ſa bouche à un autre le plus éloigné qu'il peut, & enſuite accourciſſant ſa partie antérieure, & deſenflant ſa bulle qui lâche ce qu'elle avoit ſaiſi, il avance vers le lieu où eſt ſa bouche, en trainant ſeulement ſa partie poſtérieure, qui ne paroît point contribuer par elle-même à la progreſſion.

Cet Inſecte tiré de l'Eſtomac de la Bonite ne vécut qu'environ deux heures. Expoſé à l'air il étoit languiſſant, & reprenoit de la vivacité dans de l'eau de Mer. Il diminua ſenſiblement de volume pendant qu'il vivoit encore.

M. Domaingo Sorhaïz, Chirurgien de Mrs les Ambaſſadeurs d'Eſpagne, a fait voir différents Bandages pour les Deſcentes Inguinales, pour celles de Matrice, pour les Exomphales, pour les incontinences d'Urine, pour la Chute de l'Anus, pour la compreſſion de l'Artére Crurale dans l'amputation de la Cuiſſe, & l'Académie y a trouvé pluſieurs choſes particuliéres à M. Sorhaïz, & qui marquent en lui bien du génie, ſoit pour inventer, ſoit pour perfectionner.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

V. les M. p. 328. L'Obſervation de M. Morand ſur une altération ſinguliére du Criſtallin, & de l'Humeur Vitrée.

V. les M. p. 345. L'Ecrit de M. Vinſlou ſur les Mouvements de la Tête, du Col, &c.

V. les M. p. 545. Celui de M. Hunaud ſur les Os du Crane de l'Homme.

CHIMIE.

SUR LES BOUILLONS DE VIANDE.

LES Boüillons de Viande ſont la nourriture ordinaire des Malades, & quand il faut leur meſurer les aliments fort juſte, il eſt à propos de ſçavoir quelle quantité d'aliment ces Boüillons contiennent. On le ſçait peut-être en gros, & par une eſpece d'eſtime, & cela ſuffit pour les cas qui ne ſont pas de rigueur, mais dans ceux qui en ſont, il ſeroit bon de le ſçavoir avec préciſion, & en général ce ſera au moins une connoiſſance curieuſe. V. les M. p. 217.

On a fait anciennement dans l'Académie quantité d'Analiſes de différentes Viandes, mais ces Viandes étoient diſtillées crües au Bain-Marie, & en cet état, & par cette voye, il ne ſeroit pas étonnant qu'elles nous donnaſſent des principes différents ou en qualité, ou en quantité, de ceux qu'elles donnent à une eau où elles auront long-temps boüilli, & juſqu'à faire, ſi l'on veut, un Conſommé. C'eſt ce qu'on ne s'étoit point encore propoſé, & ce que M. Geoffroy ajoûte à ce qui s'étoit déja fait.

Son procédé général peut ſe diviſer en 4 parties, 1.° par la ſimple diſtillation au Bain-Marie, & ſans addition, il tire d'une certaine quantité, comme de 4 Onces d'une Viande crûë, tout ce qui s'en peut tirer. 2.° Il fait boüillir 4 autres Onces de la même Viande autant & dans autant d'eaux qu'il faut pour en faire un Conſommé, c'eſt-à-dire, pour n'en pouvoir plus rien tirer, après quoi il fait évaporer toutes les eaux où la Viande a boüilli, & il lui reſte un Extrait auſſi ſolide qu'il puiſſe l'être, qui contient tous les principes de la Viande, dégagés de flegme & d'humidité. 3.° Il analiſe

cet Extrait, & ſépare ces principes autant qu'il eſt poſſible. 4.° Après cette analiſe il lui reſte encore de l'Extrait une certaine quantité de fibres de la Viande très-deſſéchées, & il les analiſe auſſi.

La 1ere partie de l'opération eſt en quelque ſorte détachée des trois autres, parce qu'elle n'a pas pour ſujet la même portion de Viande, qui eſt le ſujet des trois derniéres. Elle eſt néceſſaire pour déterminer combien il y avoit de flegme dans la portion de Viande qu'on a priſe, ce que les autres parties de l'opération ne pourroient nullement déterminer.

Ce n'eſt pas cependant qu'on ait par-là tout le flegme, ni un flegme abſolument pur. Il y en a quelque partie que le Bain-Marie n'a pas la force d'enlever, parce qu'elle eſt trop intimement mêlée dans le Mixte, & ce qui s'enleve eſt accompagné de quelques Sels volatils, qui ſe découvrent par les épreuves Chimiques.

M. Geoffroy ayant pris 4 Onces de la meilleure chair de Bœuf, dont il avoit ôté la Graiſſe, les Os, les Cartilages, les Tendons & les Membranes, il en a tiré par la diſtillation au Bain-Marie 2 onces, 6 gros, 36 grains de flegme, ce qui marque que le flegme ſeul fait une partie conſidérable du tout, même ſans compter ce qui n'a pû s'élever. Enſuite 4 onces de la même chair, cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec 18 chopines d'eau verſées à différentes repriſes, ont donné après l'ébullition & l'évaporation 1 gros 56 grains d'Extrait, & il eſt reſté 6 gros 36 grains de fibres ſéchées.

Par l'analiſe de l'Extrait il eſt venu un Sel volatil en criſtaux plats, formés comme ceux du Sel volatil de l'Urine, & qui paroît armoniacal. M. Geoffroy croit que c'eſt celui qui ſe ſépare du Sang par les Urines après la nutrition, & qu'on peut le regarder comme le Sel eſſentiel de la Viande. Après le Sel volatil il eſt venu de l'Huile, & il eſt reſté une Tête-morte ou Charbon très-léger en très-petite quantité.

L'analiſe des fibres a donné à peu près les mêmes produits, dans le même ordre, & en doſes un peu différentes.

Ce que nous appellons ici l'Extrait contient toute la

ſubſtance nourriſſante de la Viande. Si 4 Onces de chair de Bœuf donnent 1 gros 56 grains de cet Extrait, une Livre de 16 Onces en donnera 7 gros 8 grains, & par conſéquent ſi on prend un Conſommé d'une Livre de Bœuf, on ſçait ce qu'on prend de nourriture ſolide. Mais comme les Boüillons ſe font de différentes Viandes, & le plus ſouvent mêlées, M. Geoffroy a auſſi travaillé ſur celles qu'on employe le plus ordinairement.

Dans 4 Onces de chair de Veau, il y a 18 grains de flegme de plus que dans le Bœuf, on en tire 46 grains d'Extrait de plus, & il reſte 46 grains de moins de fibres deſſéchées. On auroit pû prévoir avant l'opération la premiére de ces différences, & même les deux autres, car le Veau qui ſe nourrit & croît, a beſoin d'une plus grande quantité de Sucs que le Bœuf qui n'a qu'à ſe nourrir. Il eſt à préſumer que parmi les Sucs du Veau, il y en a un plus grand nombre de propres à former des Os ou des Cartilages, que parmi ceux du Bœuf, & de-là M. Geoffroy tire cette conjecture, que les Boüillons de Veau conviendront peut-être mieux aux Malades qui ſont encore en âge de croître, ou qui ſont tombés dans une grande maigreur. Si l'on ne va pas ordinairement juſqu'à ces ſortes de ſubtilités de pratique, ce n'eſt pas qu'elles ne fuſſent utiles, c'eſt qu'on ne ſe donne pas la peine de les rechercher.

La chair de Mouton a été traitée de la même maniére que les deux précédentes, & il en a réſulté qu'elle contient plus de Sucs nourriciers, & de principes volatils. La chair de Poulet, celles de Chapon, de Perdrix, &c. ont ſubi auſſi l'examen de M. Geoffroy, & il a fait des Tables des doſes exactes des produits de toutes ſes opérations. Par-là on eſt en état de ne plus faire au haſard des mêlanges de différentes Viandes, & de ſçavoir préciſément ce qu'on y donne, ou ce qu'on y prend de nourriture.

Il faut obſerver que les doſes des Extraits marquées dans les Tables, ſont les doſes extrêmes, c'eſt-à-dire, qu'elles ſuppoſent qu'on a tiré de la Viande tout ce qui s'en pouvoit

tirer par l'ébullition, mais les Boüillons ordinaires ne vont pas jusque-là, & les Extraits qui en viendroient seroient moins forts. M. Geoffroy en les réduisant à ce pied ordinaire, trouve qu'on a encore beaucoup de tort de craindre, comme on fait communément, que les Boüillons ne nourrissent pas assés les Malades. La Médecine d'aujourd'hui tend assés à rétablir la Diéte austére des Anciens, mais elle a bien de la peine à obtenir sur ce point une grande soumission pour l'Antiquité.

SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX.

V. les M. p. 524.

LES Phosphores sont une des nouveautés les plus récentes, & en même temps les plus curieuses de la Phisique moderne. D'un côté un Cordonnier de Boulogne en Italie, croyant tirer de l'Argent d'une Pierre qu'il avoit trouvée au bas du Mont Paterno, s'avisa de la calciner, & c'est-là le fameux Phosphore qu'on appelle la Pierre de Boulogne; d'un autre côté un Chimiste Allemand, qui espéroit trouver la Pierre Philosophale dans l'Urine humaine, n'y trouva qu'un second Phosphore, dont le secret eût péri avec lui, si M. Kunkel, Chimiste de M. l'Electeur de Saxe, ne se fût mis à le chercher, & ne l'eût retrouvé à force de travail.

Ces deux Phosphores ont une différence très-considérable. La Pierre de Boulogne, exposée simplement au jour, y prend de la lumiére, mais une lumiére foible, qui ne s'apperçoit que quand la Pierre est ensuite transportée dans un lieu obscur. Elle ne peut mettre le feu à rien. Le Phosphore urineux de Kunkel s'enflame par le seul attouchement de l'air froid ou chaud, de nuit comme de jour, & peut mettre le feu à des matiéres fort combustibles. Aussi ce Phosphore s'appelle-t-il *brûlant.*

Ce n'est pourtant pas que cette différence soit absolument essentielle, elle pourroit bien n'être que du plus au moins.

Il y a toute apparence que dans la Pierre de Boulogne, aussi-bien que dans le Phosphore urineux, il se fait une véritable inflammation, mais une inflammation de parties si déliées, qu'il n'en résulte que de la lumiére sans aucune chaleur. Les rayons du Soleil répandus dans l'air, lors même que l'air est couvert de nuages, suffisent pour allumer les Soufres très-subtils de la Pierre de Boulogne, & n'auroient pas la force d'allumer des matiéres tant soit peu plus grossiéres, telles que les Soufres du Phosphore urineux; mais ces mêmes Soufres ont été mis par les opérations Chimiques dans une disposition si prochaine à s'enflammer, qu'il ne faut plus, pour ainsi dire, qu'un Soufflet qui excite la flamme, & ce Soufflet, c'est l'air, au mouvement duquel on les expose. On peut s'en tenir là, sans aller jusqu'au petit Sistême que faisoit M. Homberg *.

* V. l'Hist. de 1712. p. 40. & 41.

Malgré le fond de conformité qui est entre la Pierre de Boulogne & le Phosphore urineux, ce seront toûjours deux Phosphores différents, en ce que l'un ne fera que jetter de la lumiére dans l'obscurité, & que l'autre pourra mettre le feu à quelques matiéres; on en pourra faire deux especes différentes, de Phosphores lumineux, c'est-à-dire simplement lumineux, & de Phosphores brûlants, & on les mettra, si l'on veut, chacun à la tête de son espece, parce qu'ils y ont été découverts les premiers. Nous ne ferons point, du moins quant à présent, une troisiéme espece de Phosphores tels que ceux dont il a été parlé en 1724 *, qui ne sont point Phosphores pour avoir été simplement exposés au jour ou à l'air, mais parce qu'ils ont emporté de la calcination un feu actuel, ce qui les réduit presque à n'être que des Charbons ardents.

* p. 58. & suiv.

La 2de espece de Phosphores a été la plus traitée. L'Urine, dont étoit fait celui de Kunkel, n'a pas manqué d'avertir les Chimistes qu'ils pouvoient tourner leurs vûës & leurs recherches du côté des matiéres animales, ils l'ont fait avec succès, & enfin M. Homberg trouva dans la plus abjecte de toutes ces matiéres le plus beau des Phosphores brûlants *. Feu M. Lémery le cadet étendit les découvertes de M. Homberg

* V. l'Hist. de 1710. p. 54. & 55.

presque à toutes les matiéres, nonseulement animales, mais végétales *.

* V. l'Hist. de 1715. p. 18. & suiv.

La 1re espece de Phosphores, celle des Phosphores lumineux, qui ne prennent de la lumiére qu'au jour, a été la plus négligée, peut-être parce qu'on n'a pas crû tirer aisément d'une matiére minérale, comme la Pierre de Boulogne, des principes assés vifs & assés actifs pour la propriété singuliére dont il s'agissoit. Le Phosphore de Balduinus, fait avec de la Craye, étoit le seul que l'on connût de cette nature, car nous ne comptons point celui dont il a été parlé en 1728 *, fait à la vérité de matiéres minérales, & même métalliques, mais qui est brûlant, & non pas lumineux dans le sens que nous l'entendons.

* p. 36. & suiv.

Mais voici le nombre des Phosphores de la 1re espece, semblables à la Pierre de Boulogne, prodigieusement augmenté. M. du Fay, travaillant dans d'autres vûës sur les Pierres fines, s'apperçût que la Topaze commune, qui s'employe en Médecine, ayant été calcinée, devenoit, quant aux effets, une vraye Pierre de Boulogne. Il suivit la route où cet heureux hazard l'avoit mis, il trouva que la Bélemnite ou Pierre de Lynx réüssissoit encore mieux que la Topaze, & enfin de toutes ces sortes de Pierres, des Pierres à plâtre, ou Gypses, des Albâtres, des Pierres de taille & de Liais, de la Marne, des Bols, des Pierres à chaux, & des Marbres mêmes, il tira des Phosphores qui ayant été exposés au jour pendant une Minute, luisoient dans l'obscurité.

Ce n'a pas été la calcination seule qui a donné tous ces Phosphores, il a fallu dissoudre par des Acides celles d'entre ces différentes matiéres qui étoient les plus dures, & les plus compactes, & quand certaines matiéres l'ont été à certain point, comme les Cailloux, le Sable de Riviére, les Jaspes, les Agathes, le Cristal de Roche, &c. il n'est point venu de Phosphores. Cependant M. du Fay n'en desespere pas encore tout-à-fait, ni même des Métaux; d'autres opérations pourront réüssir. L'Histoire des Découvertes fournit quantité d'exemples qui encouragent.

On voit aſſés que ces Phoſphores faits de différentes matiéres, & quelquefois par des procédés différents, doivent avoir entre eux un nombre proportionné de différences, & par conſéquent très-grand. Leur lumiére eſt plus ou moins vive, elle dure plus ou moins à chaque fois qu'on les met dans l'obſcurité, & comme cette propriété de luire s'uſe par l'exercice, parce qu'il ſe conſume toûjours une certaine portion de leurs Soufres, ils la perdent à la fin en un temps total plus ou moins long, ſuppoſé que la propriété ait été également exercée. Quand ils l'ont perdüe, on la leur rend en recommençant ſur eux l'opération qui la leur avoit donnée, car, & on le voit aiſément, ce ne ſont que les Soufres de la ſurface qui s'enflamment, & ſe conſument, & une nouvelle opération fait une autre ſurface. Mais cela ne va pas à l'infini, & le nombre de fois qu'on peut renouveller différents Phoſphores, doit être différent.

Ils ont bien des choſes communes, bien entendu que c'eſt toûjours avec des variétés. Ils prennent de la lumiére au travers du Verre & de l'eau ; ils n'en prennent preſque point de la Lune, & encore moins des Chandelles. Ils perdent leur vertu, expoſés trop long-temps de ſuite au jour. La plûpart la conſervent aſſés de temps, quoique noyés dans l'eau.

Quelques-uns plongés ſubitement dans l'eau, après avoir été allumés au jour, brillent d'un plus grand éclat, à meſure qu'ils ſe diſſolvent, & s'échauffent par la diſſolution, mais cet éclat s'évanoüit preſque entiérement un moment après. La pâte liquide, qui eſt reſtée dans le Vaiſſeau & dans l'eau, ne laiſſe pourtant pas de redevenir encore un peu lumineuſe par le jour, mais cette vertu lui dure à peine 24 heures.

Outre l'eau commune, M. du Fay a eſſayé l'Eſprit de vin, l'Huile, les diſſolutions Acides ou Alkalines, pour voir leſquelles de ces liqueurs ôteroient aux Phoſphores la propriété de luire, ou la diminuëroient, & de quelle maniére, mais nous ne nous engagerons point dans ce détail, que M. du Fay lui-même n'a preſque fait qu'indiquer. Nous remarquerons ſeulement un phénoméne ſingulier du Phoſphore de

la Bélemnite. Plongé dans l'Eau forte, il y fait un bruit semblable à celui d'un Fer rouge plongé dans l'eau, tant les Soufres de ce Phoſphore, quoi-qu'aſſés ſubtils pour avoir été allumés par la lumiére ſeule du jour, ſont cependant forts & vigoureux, ou empruntent de force des Acides de l'Eau forte.

Il s'ouvre ici une vaſte carriére où les Phyſiciens pourront s'exercer. Preſque tout eſt devenu Phoſphore, & ſi tout abſolument ne le devient pas dans la ſuite, on ſera dans une ſurpriſe contraire à celle où l'on fut d'abord par la Pierre de Boulogne. On pourroit être étonné que la Pierre d'Aiman demeure toûjours auſſi unique qu'elle l'eſt, car un très-petit nombre de Corps Electriques, & qui d'ailleurs lui reſſemblent très-peu par les effets, ne méritent pas d'être comptés.

OBSERVATION CHIMIQUE.

M. LE FÉVRE, Médecin d'Uzès, dont nous avons déja parlé en d'autres occaſions, a donné à l'Académie une nouvelle obſervation, qui eſt une ſuite de ſon Phoſphore rapporté en 1728 *. Il s'apperçût que le Soufre commun, quoique très-fixe, ſe diſſipe facilement, qu'il s'unit fort vîte avec le Fer, & qu'en les mêlant enſemble, le tout ſe change en un Colcothar, tout ſemblable à celui qu'on tire du Vitriol par une longue calcination. Il faut prendre de la Limaille de Fer & du Soufre dans les mêmes proportions que pour le Phoſphore, & quand la diſſolution du Fer ſera exactement faite par l'Acide du Soufre, la matiére étant en pâte molle, on la tirera du Vaiſſeau, & on l'expoſera à l'Air, où elle s'échauffera dans peu de temps, & rendra une odeur de Soufre brûlant; & au lieu que celle du Phoſphore demeure toûjours noire, celle-ci deviendra rouge en quelques heures, & en poudre fine, ſtiptique au goût. C'eſt-là le Colcothar, que l'on a par une opération très-ſimple & très-facile, & ce n'eſt pas une ſimple curioſité, puiſque le Colcothar eſt employé dans la Médecine & dans les Arts.

* p. 36. & ſuiv.

Si l'on met ce Colcothar dans de l'eau chaude, on trouvera après l'avoir remüée, filtrée & évaporée, qu'il reste au fond du Vaisseau un vrai Vitriol de Mars, provenu de l'Acide du Soufre, qui s'est attaché au Fer, l'a corrodé, & s'est uni avec lui pour composer un corps salin très-différent du Soufre commun, & du Fer. Voilà donc un changement assés nouveau du Soufre en Sel, merveille qui est cependant diminüée parce que le changement ne tombe que sur la partie saline du Soufre transportée ailleurs, & qu'on ne tient pas compte de la partie inflammable. M. le Févre laisse, dit-il, aux plus habiles le soin de chercher ce qu'elle est devenuë.

Il conçût en réfléchissant sur ces expériences que l'Eau de Chaux, qui dissout le Soufre commun, pourroit bien aussi le changer en Sel, parce que les Acides du Soufre, au lieu d'agir sur le Fer, agiroient sur les parties terrestres Alkalines que cette Eau contient, & cela se trouva en effet par les mêmes opérations, ou à très-peu près, qu'on vient de rapporter. Apparemment on réduiroit de même en Sel les Bitumes, les Résines, & toutes sortes d'Huiles & de Graisses.

Comme le Sel qui se tire du mêlange de l'Eau de Chaux & du Soufre, est un Alkali fort semblable par toutes ses qualités à celui que donnent des Eaux minérales de Languedoc, telles que celles d'Ieuzet, de S.t Jean, d'Alais, M. le Févre conjecture que le sécret de l'opération par laquelle la Nature rend minéral toutes ces Eaux, est découvert. Il se sera trouvé auprès d'une Source une terre ou chaux mêlée de Soufre commun, & l'eau ayant mis l'Acide du Soufre en état d'agir sur l'Alkali de la chaux, ou terre, il se sera formé les Sels dont il s'agit, qu'elle aura ensuite entraînés avec elle.

Quoique les Sels de toutes ces Eaux paroissent fort semblables, les terres sont très-différentes, & leur différence influë principalement sur la quantité du Sel. Cela ne doit s'entendre que des Eaux qu'on a nommées.

Il ne faut pas oublier une singularité remarquable de celles d'Ieuzet. Dès qu'elles ont été quelques moments sur le feu,

il se forme à leur surface de petites Aiguilles blanches, transparentes, égales en longueur & en grosseur, d'une régularité parfaite, & qui, selon l'Auteur, ressemblent au Sel Sédatif de M. Homberg.

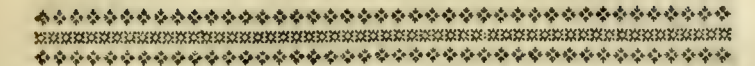
M. le Févre, ne fût-ce que pour s'assûrer de la découverte qu'il avoit faite du mistére de la composition de ces Eaux, n'a pas dû manquer d'essayer d'en faire par art. Il y a réüssi assés facilement, & avec différentes terres. Ses Eaux artificielles ont la grande vertu des naturelles, qui est d'être fort rafraîchissantes, sans compter qu'elles sont purgatives & diuretiques.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

V. les M. p. 33. L'Ecrit de M. Bourdelin sur le Sel léxiviel du Gayac.

V. les M. p. 357. Une Maniére plus simple de M. Boulduc, pour faire le Sublimé corrosif.





BOTANIQUE.

SUR LES GREFFES.

NOus avons dit en 1728 * que M. du Hamel dans le dessein de découvrir si l'Art de greffer pouvoit faire naître de nouvelles espéces de Fruits, s'étoit engagé dans une suite d'expériences sur cette matiére. Celles dont nous allons donner le précis ne regardent point encore la multiplication des espéces, elles n'ont pour objet que l'Art de greffer en lui-même. Il a été fort exaggéré par les Auteurs qui en ont écrit, & l'expérience, qu'ils n'avoient pas assés consultée, rabat beaucoup de leurs discours.

V. les M. p. 102.
* p. 46. & suiv.

Il est étonnant, quoique certain, & nous l'avons déja dit, que la Greffe fasse quelque bon effet, qu'elle rende les fruits meilleurs. Nous nous en tenons à la cause rapportée en 1728, qui cependant est assés peu particularisée, mais qui, du moins jusqu'à present, ne peut guére l'être davantage. Cela posé, on juge aisément qu'il faut un certain rapport entre le Sujet ou Arbre sur lequel on ente, & la Branche entée ou Greffe, que les diamétres, les orifices, les figures des tuyaux se conviennent de part & d'autre, & sur tout apparemment les Séves, c'est-à-dire, qu'il faut que la Séve qui montera du Sujet s'accorde avec celle que la Greffe apportoit d'abord avec elle, & soit propre ensuite à être son unique aliment. Or les Séves sont infiniment différentes entre elles, douces, acres, coulantes, visqueuses, aromatiques, fœtides, &c. Et l'on peut croire que de là vient en grande partie l'amélioration des fruits. Ni le Sujet, ni la Greffe n'avoient une Séve entiérement propre à produire un fruit d'une certaine qualité, il étoit nécessaire que la Séve du Sujet fût travaillée dans

d'autres organes que les ſiens, & on lui préſente ceux de la Greffe, qui lui ſont convenables, & n'auroient travaillé que ſur une autre Séve moins bien conditionnée.

Ces rapports ne peuvent être que très-délicats, le raiſonnement ne peut jamais deviner entre quels Arbres il ſe trouveront, & l'expérience ſeule peut enſeigner où ils ſe trouvent. Quoique délicats ils ne ſont pas uniques, un même Sujet peut preſque toûjours porter également à peu près différentes Greffes, & une même Greffe être appliquée à différents Sujets.

Voici les principales obſervations de M. du Hamel ſur cette matiére.

1.° La Greffe qu'il a reconnuë pour réüſſir le mieux, eſt celle d'un Poirier ſur un autre, ou d'un Ceriſier ſur un Meriſier, & celle qui réüſſit le plus mal eſt du Prunier ſur l'Orme; le Prunier périt auſſi-tôt. On voit bien qu'entre ces deux cas extrémes la variété de tous les autres eſt infinie. Des Greffes qui réüſſiront les unes reprennent plus ou moins facilement que les autres, pouſſent du bois & des feüilles plus ou moins vîte, &c. C'eſt la même choſe renverſée pour celles qui ne réüſſiront pas.

2.° Outre le rapport inconnu qui doit être entre les Vaiſſeaux & les Séves du Sujet & de la Greffe, il faut qu'il y en ait un, que l'on peut connoître à peu près, entre les temps où le Sujet & la Greffe ont les principaux ſimptomes de leur végétation, où ils pouſſent, où ils ſont en Séve. Des Amandiers, greffés par M. du Hamel ſur des Pruniers de petit Damas noir, donnerent pendant une année entiére les plus belles eſpérances du monde, & après cela tombérent tous en langueur, & la plûpart périrent aſſés promptement. Il n'en faut point chercher la cauſe dans la diſproportion des Vaiſſeaux, ni des Séves, puiſque la premiére année où cette diſproportion auroit dû avoir ſon plus grand effet, fut ſi belle & ſi heureuſe. D'ailleurs ce qui prouve beaucoup de conformité à cet égard entre le Prunier & l'Amandier, c'eſt qu'on greffe le Peſcher ſur l'un & ſur l'autre avec le même

ſuccès.

ſuccès. Mais à l'égard des temps ou des Epoques remarquables de la végétation, il y a une grande différence entre le Prunier & l'Amandier, l'Amandier eſt toûjours de beaucoup plus avancé. De-là il arrive dans les Greffes dont il s'agit, que l'Amandier peut demander de la nourriture au Prunier dans des temps où celui-ci n'eſt pas en état de lui en fournir, ou de lui en fournir aſſés. La Greffe ayant été faite en Autonne, par ex. ils ſont tous deux en repos pendant l'Hiver, l'un n'inquiéte point l'autre, mais dès que l'Amandier a ſenti la premiére douceur du Printemps que le Prunier ne ſent pas encore, toute la Séve qu'il avoit apportée avec lui ſe met en mouvement, & il ſuce de plus celle du Prunier, qui peut ſuffire à cette dépenſe, parce que la branche de l'Amandier eſt encore très-jeune, & ſe nourrit à peu de frais. Mais dès qu'elle eſt devenuë plus groſſe au bout de l'année, elle demande trop de nourriture au Prunier, & la lui demande toûjours à contre-temps, lorſqu'il n'eſt pas encore en Séve. Le Sujet trop ſucé & affamé par la Greffe, la Greffe mal nourrie, ou qui ne l'a pas été à propos, périſſent tous deux, au moins d'une mort lente.

Si au contraire le Prunier a été greffé ſur l'Amandier, la même meſintelligence à l'égard des temps ſe retrouve, mais avec un effet oppoſé. L'Amandier dès le premier commencement du Printemps fournit une nourriture que le Prunier n'eſt pas encore diſpoſé à recevoir, parce que ſes Vaiſſeaux ne ſont pas aſſés ouverts par une foible chaleur, que le reſſort de ſes fibres n'eſt pas aſſés animé, &c. Le Prunier meurt de replétion & d'engorgement, au lieu que dans le cas précédent il mouroit d'inanition.

3.° Dans ces deux expériences oppoſées, il ſe forme à l'endroit de l'inſertion de la Greffe ſur le Sujet une eſpece de bourlet, ou bien il s'y amaſſe une Gomme. Quelque mouvement que la Séve ait dans les Plantes, ſoit celui de circulation, ſoit tout autre, il faut toûjours qu'elle ſe diſtribuë librement du Sujet à la Greffe, & en général qu'elle ne demeure pas dans les Vaiſſeaux ſans mouvement. Dans la

2[de] expérience il eſt bien aiſé de comprendre que l'Amandier fourniſſant au Prunier une Séve qu'il ne peut recevoir, elle s'arrête & fait une obſtruction à l'endroit où elle devroit entrer dans le Prunier, c'eſt-à-dire, à l'endroit de l'inſertion. Mais dans la 1[re] expérience où le Prunier ne fournit pas aſſés à l'Amandier, & où l'Amandier tire trop, il ne paroît pas que ce ſoit la même choſe, cependant cela revient au même. Dans le temps que l'Amandier tire trop, le Prunier ſe deſſéche & s'amaigrit, ſes Vaiſſeaux perdent de leur capacité, & lorſqu'enſuite il eſt en Séve, il en a plus que ſes Vaiſſeaux n'en peuvent contenir à l'aiſe, elle ne s'y meut pas avec facilité, & il s'en fait des amas vers l'inſertion, parce que c'eſt-là que finiſſent les vaiſſeaux du Sujet.

4.° Ces bourlets, ces gommes, &c. ſont tout au moins des maladies avec leſquelles les Arbres peuvent vivre, mais ce ſont ſouvent des cauſes de mort, la Séve arrêtée ſe corrompt ordinairement, comme nôtre ſang, & dans les deux exemples rapportés une aſſés prompte mort eſt preſque infaillible.

5.° Que la Greffe meure de la mort du Sujet, il n'y a rien là de remarquable. D'où pourroit-elle tirer ſa ſubſiſtance ? Mais ſi la Greffe ne peut pas ſurvivre au Sujet, le Sujet peut ſurvivre à la Greffe, ou ſe porter bien, tandis qu'elle eſt malade. Ses Sucs qui n'entrent plus ou n'entrent qu'avec peine dans des Vaiſſeaux étrangers ſe meuvent librement dans les ſiens propres, & font de nouveaux développements de parties, qui ſont de nouveaux jets.

6.° La Greffe peut être utile au Sujet, & le faire vivre plus long-temps, ce qui eſt une eſpéce de paradoxe. Cela vient de ce qu'elle lui ôte des qualités vicieuſes, ou en empêche l'effet. Le Peſcher de noyau eſt fort délicat, & en même temps abondant en productions inutiles qui l'épuiſent, il pouſſe beaucoup de bois qu'il faut retrancher, il eſt preſque toûjours plein de bois mort, le tronc lui-même meurt aiſément, & enfin l'Arbre dure peu d'années. M. du Hamel ayant fait enter ſur des Peſchers de cette eſpece des Pruniers

de la Reine Claude, il y a déja 18 ans que ces Arbres greffés durent, quoique languiſſants, & ils n'euſſent certainement pas joüi d'une ſi longue vie, ſi les Peſchers, qui abandonnés à eux-mêmes auroient eû une végétation exceſſive & indiſcrete, n'en euſſent trouvé le reméde dans celle des Pruniers, qui la modéroit en ne tirant que les ſucs qui ſe pouvoient dépenſer utilement.

7.° Quelques Arbres vivent plus long-temps greffés ſur des Sujets foibles, & qui durent peu, que ſur des Sujets plus robuſtes, & plus vivaces. Le Prunier dure plus que le Peſcher de noyau, cependant le Peſcher nain dure plus long-temps ſur le Peſcher de noyau que ſur le Prunier. C'eſt-là un effet bien ſenſible d'une convenance que l'on eût pû conjecturer ſur les noms ſeuls de ces Plantes, mais il ſe trouve & il ſe trouvera encore à l'avenir une infinité de ces rapports, qui ſeront tout à fait imprévûs.

8.° En général quelque rapport qu'il puiſſe y avoir entre le Sujet & la Greffe, M. du Hamel conclut de ſes expériences que les Arbres greffés durent moins que s'ils ne l'avoient pas été. La Greffe raffine les ſucs, & rend les fruits meilleurs, mais d'un autre côté elle fait toûjours violence à la nature, en altérant la conſtitution organique de l'Arbre. Il n'eſt pas hors d'apparence que, toutes choſes d'ailleurs égales, les peuples ſauvages ne vivent plus, que ceux qui ſont civiliſés & polis.

SUR L'ANATOMIE DE LA POIRE.

LES Plantes étant bien ſûrement des corps organiſés, les fruits qui en ſont les parties les plus nobles, & celles pour leſquelles toutes les autres ſont faites, ne peuvent manquer non ſeulement d'être organiſés auſſi, mais de l'être plus finement, & avec plus d'art. La difficulté n'eſt que de découvrir cette organiſation. L'Anatomie des Animaux, dès qu'ils ſont un peu grands, eſt en quelque ſorte groſſiére & V. les M. p. 299.

facile, une charpente d'Os bien liés enſemble, de gros Vaiſſeaux ſanguins, &c. ſe préſentent d'eux-mêmes aux yeux, mais il n'en va pas ainſi d'une Pêche, d'un Abricot, d'une Pomme; à l'exception des Noyaux, ou des Pépins, on n'y voit qu'une chair, un parenchime uniforme, qui n'a point de parties diſtinctes les unes des autres, & où la diſſection ne paroît avoir aucune priſe. Cependant quelques grands Obſervateurs ont entrepris de faire celle de la Poire, qu'ils ont peut-être préférée, parce que ce fruit, lorſqu'il eſt pierreux, a plus de diverſité dans ſa ſubſtance que beaucoup d'autres, & M. du Hamel a voulu marcher ſur leurs pas.

Après qu'il a eu eſſayé différents moyens pour parvenir à diſſéquer des Poires, différentes liqueurs, qui par la macération rendiſſent leurs petits organes plus viſibles, enfin il a trouvé que la liqueur la plus favorable étoit l'Eau commune. Mais pour donner une idée ou du travail, ou de la patience que demande l'opération, il nous ſuffira de dire que quelquefois il a fallu laiſſer macérer une Poire pendant deux ans, & que ſouvent quand on a commencé à en détacher bien adroitement avec un inſtrument très-fin un filet, qui eſt quelque Vaiſſeau, il faut pour achever de le détacher, remettre la Poire en macération encore quinze jours. La diſſection a toûjours été faite ſur des fruits qui nageoient dans l'eau, afin de profiter autant qu'il étoit poſſible de leur augmentation de volume, quoique petite, & de la diſpoſition que les différentes parties pouvoient prendre à ſe ſéparer. On juge bien que les meilleurs Microſcopes ont été mis en uſage.

Il ne s'agit encore préſentement que de la peau de la Poire, par où M. du Hamel a commencé, le reſte viendra dans les années ſuivantes. Nous avons fait en 1702 * une deſcription abrégée de la peau du Corps humain compoſée de trois Membranes, qui s'enveloppent les unes les autres; celle de la Poire l'eſt de quatre que M. du Hamel a eu l'art de diſtinguer. Il appelle la 1re enveloppe *Epiderme*, la 2de *Tiſſu muqueux*, à cauſe d'une certaine viſcoſité, la 3me *Tiſſu pierreux*, & la 4me *Tiſſu fibreux*.

* p. 30. & ſuiv. 2de Edit.

L'Epiderme de la Poire a aſſés d'analogie avec celui de l'Homme. C'eſt une membrane d'une conſiſtance plus ferme que celle du fruit, & par là deſtinée à le défendre des injures du dehors, elle réduit la tranſpiration du fruit à être de la quantité néceſſaire, & parce que ſon tiſſu ſerré en empêche l'excès, & parce que le grand nombre de pores, dont elle eſt percée, ouvrent aſſés de paſſages. Cet Epiderme tombe par petites écailles comme celui de l'Homme, & ſe régénere de même ſans laiſſer de cicatrice. On ne ſçait pas encore ſi notre Epiderme eſt produit par l'épaiſſiſſement de quelque ſuc arrivé à la ſuperficie extérieure du corps, ou par l'expanſion des derniers filets très-déliés de quelques Vaiſſeaux, à plus forte raiſon cette détermination ne ſera-t-elle pas aiſée à faire pour la Poire. M. du Hamel inclineroit à penſer que ſon Epiderme eſt la derniére ſuperficie du Tiſſu muqueux condenſée par l'air.

Ce Tiſſu, immédiatement poſé ſous l'Epiderme, & très-difficile à en détacher, eſt apparemment formé par un entrelacement de Vaiſſeaux très-déliés, & pleins d'une liqueur un peu viſqueuſe. Il eſt vert naturellement, mais quand la Poire a pris du rouge par le Soleil, quelquefois cette couleur ne paſſe pas l'Epiderme, quelquefois elle pénétre juſqu'au Tiſſu muqueux, & le pénétre même tout entier. Il eſt ſujet à des accidents & à des maladies, les coups de Grêle le meurtriſſent & le deſſéchent, la trop grande humidité le corrompt, quelques Chenilles s'en nourriſſent après avoir détruit l'Epiderme, une très-petite Mitte, qui n'a point entamé l'Epiderme, va le manger. Quand il eſt détruit dans toute ſon épaiſſeur, il ne ſe régénere point, il ſe forme à ſa place une eſpece de Galle gommeuſe.

La troiſiéme enveloppe ou partie de la peau totale de la Poire eſt le Tiſſu pierreux. On ſçait aſſés ce que c'eſt que ce qu'on appelle *pierres* dans la Poire, ces grumeaux plus durs que le reſte de ſa ſubſtance, tantôt plus, tantôt moins gros, & quelquefois amoncelés en petits Rochers. On nomme les Poires *caſſantes*, ou *fondantes*, ſelon qu'elles en ont ou n'en

ont pas, ou en ont moins. Ces pierres n'appartiennent pas ſeulement à cette enveloppe qui eſt le Tiſſu pierreux, elles ſe trouvent répandües dans tout le reſte du fruit, mais elles ſont arrangées dans ce Tiſſu plus réguliérement les unes à côté des autres, & enfin elles le ſont de maniére à former une enveloppe, ce qui ſuffit ici. Comme elles ſont de la même nature que les autres, il ſera à propos de les conſidérer toutes enſemble.

Elles commencent dès la queüe de la Poire, & s'étendent ſur toute ſa longueur, poſées entre les Téguments de cette queüe, & un faiſceau de Vaiſſeaux qui en occupent l'axe. Quand elles ſont entrées dans le fruit, il y en a une partie qui s'épanoüit, & va former le Tiſſu pierreux en tapiſſant toute la ſurface intérieure du Tiſſu muqueux, l'autre partie ſe tient ſerrée le long de la queüe prolongée, ou de l'axe de la Poire, & y forme comme un canal pierreux d'une certaine largeur. Ce canal arrivé à la région des Pépins ſe partage à droite & à gauche, prend plus de largeur de part & d'autre, & enſuite va ſe reünir au deſſus des Pépins, & reprend la forme de canal pour aller aboutir à l'Ombilic, ou à la Tête de la Poire. Il y trouve le Tiſſu pierreux auquel il s'unit, & tous deux enſemble forment un Rocher très-ſenſible.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des pierres jettées çà & là moins réguliérement dans le reſte du corps de la Poire. Elles ſont liées par une ſubſtance plus molle, & plus douce. Il y en a, mais de beaucoup plus petites, juſque dans les Poires qu'on appelle *fondantes*.

La difficulté eſt de ſçavoir quelles parties organiques ſont ces Pierres, & quel eſt leur uſage. M. du Hamel croit le pouvoir conjecturer ſur les obſervations ſuivantes, faites avec grand ſoin dans l'eſpérance de quelque éclairciſſement. Les pierres ne ſont pas ſenſibles dans les fruits nouvellement noüés, ce ne ſont que de petits grains blancs ſans ſolidité, mais ils durciſſent enſuite & groſſiſſent à tel point que les fruits encore fort petits ne ſont preſque que des pierres, moins dures cependant qu'au temps de la maturité, mais en

plus grand nombre par rapport au volume du fruit, car à mesure que le fruit croît depuis un certain point, les pierres ou croissent moins, ou ne croissent plus, & même il en disparoît. Quand elles sont dans leur parfaite grosseur, on peut voir quantité de filets, ou qui y entrent, ou qui en sortent. Leur substance n'est point formée par lames ou par couches, mais par grains.

Sur tout cela M. du Hamel conjecture que les Pierres sont des Glandes végétales analogues aux Animales, & qui font des sécrétions de sucs. On fera aisément l'application de cette idée à ce qui vient d'être dit, seulement sera-t-il peut-être à propos d'expliquer comment les Pierres cessent de grossir tandis que le fruit grossit encore. C'est que des sucs tartareux, & pierreux s'amassent facilement dans des conduits très-étroits, & n'y peuvent plus couler. La Glande ou Pierre ne croîtra donc plus, & même elle diminüera soit par une transpiration qui ne sera point réparée, soit par un reflux de sucs dans le reste du fruit; il continüera de croître en l'un & en l'autre cas.

M. du Hamel observe que le temps où le fuit nouë, & un peu après, étant précisément le temps où l'Arbre travaille le plus à la production des Pépins, partie si importante, les Glandes végétales sont alors & en plus grand nombre & plus molles, pour fournir mieux les sucs nécessaires. Quand elles se sont obstruées, & qu'elles ont acquis leur derniére dureté, qui ne leur permet plus la fonction de filtrer, elles ne deviennent pas pour cela inutiles, elle prennent la fonction d'Os, & servent d'appui aux autres parties du fruit, qui ont moins de consistance.

Une chose qui convient encore fort heureusement à l'idée de Glandes appliquée aux Pierres, c'est cette Roche qu'on voit a l'Ombilic de la Poire, cet amas de pierres plus grand qu'en aucun autre endroit. C'étoit-là justement au temps de la fleur que les Etamines, & les Pétales prenoient naissance, c'étoit-là que se faisoient les plus importantes filtrations de sucs, & que des Glandes étoient le plus nécessaires.

Il reste la quatriéme enveloppe qui fait partie de la Peau de la Poire, & qui est posée sous le Tissu pierreux. M. du Hamel l'appelle *Tissu fibreux*, parce que, comme la peau proprement dite des Animaux, il est formé d'un entrelacement perpétuel de Vaisseaux anastomosés les uns avec les autres. Ce n'a pas été sans beaucoup d'art que ce dernier Tégument de la Poire a pû être démêlé d'avec les trois supérieurs ou plus extérieurs, mais il faudroit encore plus de sagacité d'esprit, & presque de la divination pour démêler précisément les usages particuliers de chacun des quatre. M. du Hamel ne s'est pas engagé dans un détail qui ne seroit pas assés fondé sur l'expérience, il est plus sage d'éviter les raisonnements où l'on n'est pas conduit par les faits.

OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

M. Benoît Stéhélin, de Bâle, Correspondant de l'Académie, a écrit à M. Danty d'Isnard qu'il avoit découvert dans la *Filicula Saxatilis, corniculata. Inst. R. H. 542*, que l'Anneau qui entoure l'Ovaire des Plantes Capillaires en doit être la partie spermatique, c'est-à-dire, celle où est renfermée cette poussiére, qui féconde l'Ovaire. Car dans cette espéce l'Anneau est entouré de Zones transversales élastiques, qui en se rompant laissent échapper la matiére qu'il contient, & cette matiére a la couleur jaune des Spermes ou poussiéres des autres Plantes. Quand elle est sortie, on voit les Anneaux vuides, transparents, non colorés, plissés d'une infinité de plis presque imperceptibles; quelques-uns de ces Anneaux ont conservé leur premiére figure, & d'autres ont crevé. On ne peut observer la matiére spermatique que dans le temps où les sillons des feüilles de la Plante, qui contiennent l'Anneau & l'Ovaire, sont encore fermés.

II.

Le même M. Stéhélin a vû un nouveau phénoméne dans

l'*Equisetum*, la Presle. Sa poussiére, entourée de lames élastiques, est d'un vert foncé, & elle est d'un gris-pâle de cendre, quand ces lames se sont débandées. Qu'on la mette sur quelque chose d'humecté, elle redevient en un moment de son premier vert. Ainsi il paroît que c'est l'humidité des lames qui lui donne la verdeur, & quand ces lames se dessé-chent, elle doit la perdre, ou même en avoir plus ou moins, selon que les lames humides la serreront & s'y appliqueront plus ou moins par un mouvement de contraction & de débandement.

III.

M. Sarrazin, Médecin de Quebec, Correspondant de l'Académie, a trouvé dans l'Amérique Septentrionale quatre espéces d'Erable, qu'il a envoyées au Jardin Royal, après leur avoir imposé des noms. La 4me qu'il appelle *Acer Canadense Sacchariferum, fructu minori, D. Sarrazin*, est un Arbre qui s'éléve de 60 ou 80 pieds, dont la Séve, qui monte depuis les premiers jours d'Avril jusqu'à la moitié de Mai, est assés souvent sucrée, ainsi que l'ont aisément reconnu les Sauvages & les François. On fait à l'Arbre une ouverture, d'où elle sort dans un Vase qui la reçoit, & en la laissant évaporer, on a environ la 20me partie de son poids, qui est de véritable Sucre, propre à être employé en Confitures, en Sirops, &c. Un de ces Arbres qui aura 3 ou 4 pieds de circonférence, donnera dans un Printemps, sans rien perdre de sa vigueur, 60 ou 80 livres de Séve. Si on en vouloit tirer davantage, comme on le pourroit, il est bien clair qu'on affoibliroit l'Arbre, & qu'on avanceroit sa vieillesse.

Cette Séve pour être sucrée demande des circonstances singuliéres, qu'on ne devineroit pas, & que M. Sarrazin a remarquées par ses expériences. 1.° Il faut que dans le temps qu'on la tire, le pied de l'Arbre soit couvert de Neige, & il y en faudroit apporter, s'il n'y en avoit pas. 2.° Il faut qu'ensuite cette Neige soit fondüe par le Soleil, & non par un air doux. 3.° Il faut qu'il ait gelé la nuit précédente. Cette espece de manipulation, dont la Nature se sert pour faire le

Sucre d'Erable, ressemble assés à quelques opérations délicates de Chimie, où l'on fait des choses qui paroissent opposées, & où celles qui paroissent les plus semblables, ne sont pas équivalentes pour l'effet.

Encore une remarque curieuse de M. Sarrazin, c'est que la Séve de tel Erable qui ne sera point bonne à faire du Sucre, le deviendra une demi-heure, ou tout au plus une heure après que de la Neige, dont on aura couvert le pied de l'Arbre, aura commencé à fondre. Cette Neige s'est donc portée dans les tuyaux de l'Erable, & y a operé avec une grande vîtesse.

M. Sarrazin dit aussi que l'*Apocynum majus, Syriacum, rectum, Com. 90.* fournit un Suc dont on fait du Sucre en Canada. On ramasse la Rosée qui se trouve dans le fond des fleurs.

M. Marchant a lû la Description de la *Gentiana Alpina, magno flore.* I. B. Tom. 3, p. 523, Gentiane.

Et du *Doronicum radice Scorpii.* C. B. p. 184. Doronic.

M. Garsin, dont nous avons déja parlé ci-dessus, a rapporté de son voyage des Indes Orientales, & a donné à l'Académie la description de deux Plantes de ce Pays-là, peu connuës, & mal décrites par les Auteurs qui en ont parlé.

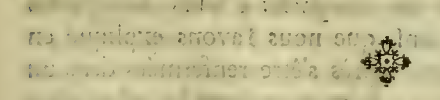
La premiére est le Mangoustan, Arbre pomifere des Isles Moluques, mais qu'on a transporté dans celle de Java, & dont on cultive aussi quelques pieds à Malaca, à Siam, & aux Manilles. Il a la touffe si belle, si réguliére, si égale, qu'on le regarde aujourd'hui à Batavia comme le plus propre à orner un Jardin ; il y a bien de l'apparence que s'il peut vivre en nos Climats, il ne tardera pas beaucoup à y paroître, & en ce cas il déthrôneroit les Maronniers d'Inde. Ce qui aideroit beaucoup à son grand succès, c'est que son fruit est excellent, rafraîchissant, & très-sain. Son écorce,

qui a les mêmes vertus que celle de la Grenade, est un remede pour les Dissenteries, que l'on débite à Batavia, en cachant ce que c'est. Pour le bois, il n'est bon qu'à brûler.

La seconde Plante, nommée par les Malabares, *Todda Vaddi*, est un Héliotrope, & une Sensitive ou *Mimose*, comme disent les Botanistes, c'est-à-dire, *imitatrice* des mouvements animaux. Toutes ses feüilles disposées ordinairement sur un même plan, qui forme une *Ombelle*, ou Parasol, se tournent du côté du Soleil levant ou couchant, & se penchent vers lui, & à midi tout le plan est parallele à l'horison. Cette Plante est aussi sensible au toucher que les Sensitives ou Mimoses qui le sont le plus, mais au lieu que toutes les autres ferment leurs feüilles en dessus, c'est-à-dire, en élevant les deux moitiés de chaque feüille pour les appliquer l'une contre l'autre, celle-ci les ferme en dessous; si lorsqu'elles sont dans leur position ordinaire, on les releve un peu avec les doigts pour les regarder de ce côté-là, elles se ferment aussi-tôt malgré qu'on en ait, & cachent ce qu'on vouloit voir. Elles en font autant au coucher du Soleil, & il semble qu'elles se préparent à dormir. Aussi cette Plante est-elle appellée tantôt *Chaste*, tantôt *Dormeuse*, mais outre ces noms, qui lui conviennent assés, on lui a donné quantité de vertus imaginaires, & il n'étoit guére possible que des Peuples ignorants s'en dispensassent.

Cette Plante aime les lieux chauds & humides, sur-tout les bois peu touffus, où se trouve une alternative assés égale de Soleil & d'ombre. M. Garsin en a reconnu deux especes.

Il a traité tout ce Sujet selon la méthode la plus exacte des Botanistes, au lieu que nous n'en avons pris que ce qu'il y a de plus intéressant pour la curiosité ordinaire.



GEOMETRIE.

SUR UNE THEORIE GENERALE DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE.

V. les M. p. 158. & 363.
* p. 37. & 44.

NOUS avons déja entamé cette matiére en 1729 *, quoique légérement, tant à l'occasion d'un Ecrit de M. Nicole sur les Lignes du 3me ordre, que d'un autre de M. de Maupertuis sur une affection singuliére de quelques-unes du 4me. Mais une Théorie générale de ces derniéres Lignes, entreprise par M. l'Abbé de Bragelongne, nous ouvre un champ, sans comparaison plus vaste, & nous pourrions dire, en changeant un seul mot dans un beau vers de Virgile,

Magnus ab integro Curvarum *nascitur ordo.*

car au pied de la lettre cet ordre contient un très-grand nombre de Courbes, & M. de Maupertuis, le seul qui y ait touché, jusqu'à present, n'a touché qu'à une de leurs propriétés.

Elles sont les unes finies, ou rentrantes en elles-mêmes, comme le Cercle & l'Ellipse, les autres infinies comme la Parabole, & l'Hiperbole, les autres *mixtes* de ces deux especes. Les finies, qui ne doivent pas être si simples que le Cercle, se noüent & se renoüent plusieurs fois en forme de rubans, les infinies, ou n'ont pas des Asimptotes droites, non plus que la Parabole, mais en ce cas elles en ont de courbes, ou elles peuvent être *inscrites* ou *circonscrites* à leurs Asimptotes droites, ou *ambigénes*, ainsi que nous l'avons expliqué en 1729. Les Courbes mixtes après s'être renfermées dans un espace déterminé se noüent, & portent leurs branches dans l'Infini. Quelquefois ces branches infinies ne partent pas de

cet espace déterminé & circonscrit, elles le rencontrent en leur chemin, & le traversent comme une branche d'Hiperbole traverseroit par une espece de hasard un Cercle ou une Ellipse. Cependant ces espaces, ou plûtôt ces Contours fermés, qu'on peut appeller en général des *Ovales,* appartiennent essentiellement à la Courbe, & en sont partie. Ils en sont même encore une partie essentielle, lorsqu'ils en sont entiérement détachés, & comme isolés. On les appelle alors *Ovales conjuguées,* parce qu'elles se rapportent à la Courbe, quoique sans liaison sensible; si elles y étoient attachées de quelque façon que ce fût, comme lorsqu'elles seroient traversées par une branche de la Courbe, on les appelleroit *adhérentes.* Il y a plus, des points mathématiques, qui ne se trouvent dans aucun des contours de la Courbe, ne laissent pas de s'y rapporter, non pas comme des centres ou des foyers, mais comme des points qui seroient dans quelque contour de la Courbe, & cependant ils n'y sont pas, ils ont des Abscisses & des Ordonnées qui leur répondent, aussi-bien qu'à tous les autres points du cours de la Courbe, ils en sont des parties qui ne peuvent être apperçûës par les yeux, mais seulement par une recherche subtile de l'esprit. Enfin si les Lignes du 3me ordre peuvent avoir des Infléxions & des Rebroussements, à plus forte raison celles du 4me, susceptibles par leur nature d'une plus grande complication, & qui à l'égard de ces deux affections la portent si loin, qu'elles peuvent quelquefois, ainsi qu'il a été dit, les avoir d'une maniére invisible. On seroit frappé des variétés, & des bisarreries des Lignes du 4me ordre, si on en voyoit les plus singuliéres & les plus dissemblables tracées sur le plan.

Il faut cependant que l'Algebre attrape & démêle par ses fines opérations toutes ces variétés, & ces bisarreries. Elle ne le peut qu'en développant avec industrie l'Equation, où toute la Courbe avec tout ce qui lui appartient est contenüe, &, pour ainsi dire, roulée à peu près comme une Plante dans son germe. Là sont renfermées toutes les droites qui ont rapport à la Courbe, & la déterminent, Abscisses, Ordonnées,

Tangentes, Sécances, &c. Les Abſciſſes & les Ordonnées, & toutes les autres qui en dépendent, ſont repréſentées par les Racines de l'Equation, égales ou inégales, poſitives, ou négatives, ou imaginaires, & ces imaginaires mêmes ſont d'une grande utilité. Il s'agit donc de tirer d'une Equation toutes ſes Racines, de les combiner enſemble, & de voir tout le jeu géométrique qu'elles peuvent produire.

En général une Ligne quelconque ne peut jamais être coupée par une ligne droite, qu'en autant de points que le plus haut Expoſant de ſon Equation a d'unités. Ainſi une ligne droite pouvant avoir, auſſi-bien qu'une Courbe des Abſciſſes & des Ordonnées, dont l'Equation ne peut avoir pour Expoſant que 1, une ligne droite ne peut être coupée par une autre droite qu'en 1 point, les 4 Sections Coniques, qui ſont les premiéres Courbes, ne peuvent être coupées par une droite qu'en 2 points, parce que leur Equation n'eſt que du 2^{d} degré, les lignes du 3me ordre en 3 points, &c. En effet il eſt évident qu'une droite, qui a une fois coupé ou rencontré une autre droite, ne peut plus à cauſe de la rectitude de ſon cours la rencontrer une 2de fois; ſi l'on vouloit qu'elle la rencontrât encore, il faudroit que cette droite coupante changeât de nature, perdît ſa rectitude, & alors en ſe détournant de ſon premier cours elle pourroit revenir trouver une 2de fois la droite déja coupée. Si l'on vouloit qu'elle y revînt une 3me fois, il faudroit altérer davantage ſa rectitude, & toûjours ainſi de ſuite, d'où l'on voit que les Courbes ſont, ſelon cette idée, d'autant plus courbes qu'une droite les peut couper en plus de points, & que leurs différents ordres, en y comprenant même les lignes droites, ont été légitimement établis ſur ce fondement.

Toute droite n'eſt pas obligée à couper une Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'Expoſant de ſon Equation, ou, ce qui eſt le même, de ſon ordre, il ſuffit qu'il y ait quelque droite qui le faſſe, & celle qui l'a une fois fait ne peut plus rencontrer la Courbe en aucun autre point.

L'interſection ſe fait par un ſeul point commun aux deux lignes quelconques, mais l'attouchement, qui ne peut être qu'entre une droite & une Courbe, ou entre deux Courbes, ſe fait par deux points communs aux deux lignes, & comme deux points déterminent la poſition d'une droite, de-là vient que la Tangente & la Courbe touchée ont la même poſition en ligne droite à l'endroit de l'attouchement, ou, ce qui revient au même, qu'une droite infiniment petite, qui eſt un côté de la Courbe, lui eſt commune avec la Tangente. Un attouchement, qu'on ne laiſſe pas d'appeller un point, vaut donc deux points d'interſection, & les Courbes, telles que les Sections Coniques, qui ne peuvent être coupées par une droite qu'en deux points, ne peuvent plus être ni coupées, ni abſolument rencontrées par cette droite, dès qu'elle a été leur Tangente. Dans l'ordre ſuivant, qui eſt le 3me, une Tangente pourroit bien être encore enſuite Sécante de la Courbe, mais non pas Tangente une 2de fois, car deux attouchements vaudroient 4 points d'interſection, qui ſont impoſſibles dans cet ordre.

Puiſque dans une Infléxion deux côtés de la Courbe ſont exactement poſés bout à bout en ligne droite, la Tangente au point d'infléxion a donc ces deux côtés de la Courbe communs avec elle, & ſi le ſimple attouchement fait par un ſeul côté valoit deux points d'interſection, celui-ci fait par deux côtés doit valoir 3 points d'interſection, ce qui ſe voit encore en ce qu'à 1 côté répondent 2 Ordonnées, 3 à 2 côtés, &c. & que chaque Ordonnée ne répond naturellement qu'à un point de la Courbe. De ce que l'attouchement au point d'infléxion vaut 3 points d'interſection, il ſuit, & qu'on ne doit commencer à trouver des infléxions que dans le 3me ordre, & que dans cet ordre une Tangente au point d'infléxion ne peut plus rencontrer la Courbe.

Si, comme nous l'avons expliqué en 1729 *, deux infléxions s'uniſſent & ſe confondent, il y aura 3 côtés mis exactement bout à bout en ligne droite, & par conſéquent l'attouchement en ce point vaudra 4 points d'interſection; * p. 44.

cette affection ne peut donc se trouver que dans le 4me ordre, & les supérieurs, & la Tangente qui aura rencontré une ligne du 4me en un point de cette espece, ne la rencontrera plus en aucun autre point.

On peut pousser aussi loin qu'on voudra l'idée de ces infléxions qui se confondent, de sorte qu'une infléxion sera simple, double, triple, quadruple, &c. & il est clair qu'à mesure que l'infléxion se compliquera, la Courbe sera d'un ordre plus élevé.

Il faut seulement remarquer que l'infléxion qui étoit invisible dans le cas de 1729, où elle n'étoit que double, ne sera pas invisible de même dans tous les autres cas, mais ne le sera qu'alternativement. Lorsqu'elle n'étoit que double, on imaginoit un arc concave, un convexe & un concave qui se suivoient, & l'arc convexe étant supprimé, les deux concaves s'unissoient, & par-là étoit effacée toute apparence d'infléxion. Si l'infléxion étoit triple, il faudroit imaginer un arc concave, un convexe, un concave & un convexe, & les deux du milieu étant supprimés, car il ne doit jamais rester que les deux extrêmes, un arc concave & un convexe s'uniront, ce qui est la forme naturelle de l'infléxion. Il est évident après cela que si l'infléxion est quadruple, elle redevient invisible, & toûjours ainsi de suite, tant qu'elle aura une dénomination paire, au lieu qu'elle sera visible dans toutes les impaires.

Nous avons dit en 1729 que dans le cas de l'infléxion double, la plus simple des compliquées, l'arc supprimé de la Courbe devoit être conçû, non comme anéanti absolument, mais comme ayant tous ses côtés infiniment petits du 1er ordre réduits à n'être plus que du 2^{d}. Quand l'infléxion est triple, ou quadruple, &c. Il n'est nullement besoin de concevoir que les côtés des arcs supprimés soient réduits à une plus grande petitesse que celle du 2^{d} ordre, car une plus grande ou une moindre étendüe supprimée ne fait rien à la chose, & on peut remarquer en passant que selon le Sistême de la Courbure établi dans la *Géométrie de l'Infini*, la courbure

courbure ſera toûjours infinie dans les infléxions dont nous traitons ici, & peut-être tout autre Siſtême géométrique auroit-il eu de la peine à en rendre raiſon.

A meſure que les Courbes en s'élevant d'ordre deviennent plus compliquées, les droites qui s'y rapportent le deviennent auſſi davantage, toutes droites qu'elles ſont, c'eſt-à-dire, que les fonctions qu'elles ont par rapport aux Courbes ſe compliquent. Ainſi la fonction la plus générale & la plus ſimple des droites par rapport aux Lignes d'ordres quelconques étant de les rencontrer, une droite ne peut rencontrer une Ligne du 1[er] ordre ou une autre droite qu'en un ſeul point, où elle ſera ſa Sécante ; dans le 2[d] ordre la droite peut être ou la Sécante d'une Section Conique en deux points différents, ou ſa Tangente par deux points infiniment proches, & elle ne peut être l'un & l'autre ; dans le 3[me] ordre une droite peut être ou Sécante d'une Courbe en trois points différents, ou Tangente en deux infiniment proches, & Sécante en un autre différent, ou Tangente en trois infiniment proches, auquel cas ces trois points font une infléxion ſimple. En voilà aſſés pour faire voir comment la fonction de *rencontrer* qui appartenoit à une droite par rapport aux Lignes d'ordres quelconques, ſe complique toûjours ſelon que les ordres ſont plus élevés, car il ſera très-aiſé de ſuivre cette idée ſi loin qu'on voudra.

Quand la fonction de la droite ſe complique, elle devient équivalente à pluſieurs différentes droites ſelon le nombre de ſes complications. Une Tangente eſt équivalente à deux droites ſécantes, & parce que les deux points où elle rencontre la Courbe ſont infiniment proches, elle ne peut être équivalente qu'à 2 lignes égales. Si elle eſt la Tangente d'une infléxion ſimple, elle ſera équivalente à 3 lignes égales, à 4, ſi elle eſt Tangente d'une infléxion double, à 5, ſi elle l'eſt d'une infléxion triple, &c. Si outre qu'elle eſt ſimple Tangente, ou Tangente d'une infléxion quelconque, elle eſt encore Sécante en 1, en 2, &c. autres points, elle ſera équivalente à autant de droites égales que le ſimple attouchement,

ou que l'infléxion en demandera, & de plus à autant de droites inégales qu'il y aura de points d'interſection. Dans le 4me ordre, que nous traitons ici, une droite pouvant être ou Sécante en 4 points, ou ſimple Tangente, & enſuite Sécante en 2 points, ou ſimple Tangente, & enſuite encore ſimple Tangente, ou Tangente d'une infléxion ſimple, & enſuite Sécante en 1 point, ou Tangente d'une infléxion double, cette droite pourra être équivalente ou à 4 droites inégales, ou à 2 égales, & encore à 2 autres égales différentes des 1res, ou à 3 égales, & à 1 inégale, ou à 4 égales.

C'eſt-là ce que l'Algebre ſent, pour ainſi dire, avec une extrême fineſſe. Si on a, par exemple, l'expreſſion algébrique d'une droite qui doive rencontrer une Ligne du 4me ordre ou Courbe du 3me, cette expreſſion ſera une Equation du 4me degré, qui par conſéquent aura quatre Racines. Ces Racines ſeront autant de valeurs de la droite, dont il s'agit, & cette droite ſera par-là équivalente à quatre grandeurs. Il arrivera préciſément ſelon les différents cas, que nous venons de marquer, que ces quatre grandeurs ou racines ſeront, ou toutes quatre inégales, ou qu'il y en aura deux égales, & deux autres différentes, égales entre elles, ou trois égales & une inégale, ou quatre égales. L'Algébre repréſentera exactement le caractere de chaque cas particulier.

Tout ce que nous avons dit ſur les Infléxions s'applique ſans peine aux Rebrouſſements, il n'y a qu'à concevoir des arcs directs & rebrouſſants, au lieu d'arcs concaves & convexes. On verra comment la ſuppreſſion de certaines portions de la Courbe qui a produit des infléxions multiples, & les a renduës alternativement viſibles & inviſibles, ſera les mêmes effets ſur les rebrouſſements. Puiſque le Rebrouſſement ſimple, ainſi qu'il a été prouvé dans la *Géométrie de l'Infini,* eſt formé par deux côtés infiniment petits exactement poſés l'un ſur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, la Tangente en cet endroit ſera équivalente à trois droites égales, ou aura trois racines égales, quatre ſi le rebrouſſement eſt double, parce qu'il y aura trois côtés, & toûjours ainſi de

ſuite. La Tangente pourra encore être ou Tangente, ou Sécante en un autre endroit ſelon l'ordre de la Courbe, & l'égalité ou l'inégalité de ſes valeurs ou racines. Il faut concevoir auſſi que la ſuppreſſion de quelque portion de la Courbe, qui a cauſé le rebrouſſement multiple, n'a été que la réduction de ſes côtés au 2^{d} ordre d'infiniment petit.

Nous n'avons employé juſqu'ici que les Tangentes pour faire entendre plus nettement de quelle maniére une droite devient équivalente à pluſieurs par la multiplication de ſa fonction, car comme cette équivalence détermine les principales affections des Courbes, & qu'elle ſe découvre par l'Algebre, c'eſt-là que toutes les recherches doivent tendre. Mais ce ne ſont pas les Tangentes que les Equations Algébriques des Courbes expriment directement, ce ne ſont que les Abſciſſes & les Ordonnées, dont le rapport perpétuel conſtitüe la nature de la Courbe, & il faut voir comment ces droites-là peuvent être multiples. Nous ne prendrons plus ce mot de multiples que dans un ſens plus étroit, & nous ne le donnerons qu'aux lignes, ſoit Abſciſſes, ſoit Ordonnées, qui ayant pluſieurs valeurs, les auront toutes égales.

Il eſt certain déja qu'une Ordonnée ou Abſciſſe pouvant être Tangentes de la Courbe, elles ſeront multiples de la même multiplicité dont une Tangente pourra l'être ſelon le cas. Mais il faut approfondir un peu plus cette matiére.

Une Ordonnée ou Abſciſſe eſt multiple, quand ſa fonction naturelle d'Ordonnée ou d'Abſciſſe eſt mulipliée, ou, ce qui eſt à peu près le même, quand elle fait ſeule ce que faiſoient en d'autres cas pluſieurs différentes lignes de la même eſpece.

Que l'on conçoive un demi-Cercle rapporté à une droite extérieure, qui en ſera à quelque diſtance, & vers laquelle il tournera ſa convéxité, de cette droite comme Axe partiront des Ordonnées terminées à tous les points du demi-Cercle. La fonction naturelle d'une Ordonnée étant de ſe terminer à un point de la Courbe, toutes ces Ordonnées ſeront ſimples, horſmis celles des deux extrémités du demi-

Cercle, car ces deux-là feront Tangentes, & fe termineront chacune à deux points du demi-Cercle infiniment proches, tandis que toutes les autres ne fe termineront qu'à un feul. Ces deux feront donc des Ordonnées doubles.

La fonction des Abfciffes eft de porter à leur extrémité une Ordonnée, & ici afin que deux Abfciffes portent deux Ordonnées égales, il faut qu'elles foient inégales. Mais fi l'on conçoit que cette inégalité ou différence des deux Abfciffes diminüe toûjours, & devienne enfin nulle, il y aura par conféquent un point où une feule Abfciffe fera la fonction de deux. Ce point eft celui qui répond au milieu du demi-Cercle. L'Abfciffe de ce point fera donc double, toutes les autres étant fimples. Et en effet fi le demi-Cercle venoit fe pofer fur l'axe, cette Abfciffe feroit fa feule Tangente.

Pour s'affûrer encore plus que la duplicité de l'une de ces deux lignes, Abfciffe ou Ordonnée, n'emporte point néceffairement celle de l'autre, on peut remarquer que dans le 1er cas, qui eft celui de l'Ordonnée double, toutes les Abfciffes étoient conftamment fimples, tant celles des deux Ordonnées Tangentes que de toutes les autres, & qu'il n'eft arrivé aucun changement à ces Abfciffes, parce qu'on a confidéré en quoi quelques Ordonnées différoient des autres. De même dans le 2^d^ cas, où l'on a trouvé une Abfciffe double, l'Ordonnée qui y répondoit étoit conftamment fimple, & n'a reçû nul changement par la confidération qu'on a faite de ce que fon Abfciffe avoit de particulier.

Ce qu'on a dit ici de la duplicité fuffit pour donner une idée générale de la multiplicité.

Il y a encore une maniére dont la fonction de l'Ordonnée peut être multipliée, c'eft lorfque l'Ordonnée fe termine à un point où fe coupent deux ou plufieurs branches de la Courbe, car alors chaque branche ayant fa fuite d'Ordonnées qui lui appartient, diftincte d'une autre fuite, l'Ordonnée qui fe trouve au point d'interfection des branches, appartient en même temps à ces différentes Suites, & fait autant de

fois ſelon leur nombre la fonction d'Ordonnée, elle a autant de racines égales. S'il arrive qu'elle ſoit en même temps Tangente d'une branche, elle aura une racine égale de plus. Si l'attouchement ſe fait à une infléxion ou rebrouſſement ſimple ou multiple de la branche touchée, on verra ſans peine par la ſimplicité ou multiplicité de l'infléxion ou du rebrouſſement, combien le nombre des racines égales doit augmenter.

Tout cela ſuppoſe que les racines d'une Ordonnée ſoient affectées du même Signe plus ou moins, car ſi elles ſont affectées de différents Signes, elles ne ſont plus la même Ordonnée, fuſſent-elles égales; celles qui ont plus ou les poſitives étant au deſſus de l'Axe, celles qui ont moins ou les négatives ſont au deſſous.

L'Abſciſſe eſt autant de fois multiple, que ſa fonction de porter une Ordonnée eſt multipliée. Elle eſt donc multiple dans le cas qui vient d'être expoſé, non pas autant de fois que le ſeroit ſon Ordonnée par être Tangente ſimple ou multiple de quelque branche, cela eſt abſolument étranger à l'Abſciſſe, mais autant de fois ſeulement que l'Ordonnée ſera multiple par être au point d'interſection de pluſieurs branches, car l'Abſciſſe ſera autant de fois Abſciſſe, qu'il y aura d'Ordonnées différentes, quoiqu'égales, qui viendront ſe placer ſur le même point de l'Axe.

Par cette même raiſon, l'Abſciſſe qui répond à un point de Rebrouſſement ſimple eſt deux fois Abſciſſe, car elle porte deux Ordonnées, dont l'une appartient à la ſuite des Ordonnées du cours direct, & l'autre à la ſuite des Ordonnées du cours rebrouſſant. Il eſt évident que cette idée ne s'appliqueroit pas aux Infléxions, quoique d'ailleurs les Infléxions & les Rebrouſſements ayent coûtume d'aller enſemble, & de ſuivre les mêmes loix dans les Théories qui les regardent. Les Ordonnées de l'arc concave, & celles de l'arc convexe ne ſont que la même ſuite d'Ordonnées, & par conſéquent l'Abſciſſe d'un point d'Infléxion n'eſt qu'une Abſciſſe ſimple. Celle d'un point de Rebrouſſement double ſeroit triple, &c.

On ſous-entend aſſés que les Abſciſſes doubles, triples, &c. ou qui auront 2, 3, &c. valeurs égales, auront auſſi-bien que les Ordonnées le même ſigne, ſans cela toutes les Abſciſſes, quoiqu'égales, ne ſeroient pas la même, puiſqu'elles ne ſeroient pas toutes poſées de même côté par rapport à l'Origine de l'Axe.

L'Abſciſſe auroit pû être Ordonnée, & l'Ordonnée Abſciſſe, auſſi les Géometres appellent-ils *Coordonnées* ces deux lignes priſes enſemble, & il eſt arbitraire de donner à l'une ou à l'autre l'une des deux dénominations. Par conſéquent une Abſciſſe, qui comme on l'a vû, ne ſera pas multiple parce qu'elle portera une Ordonnée multiple, le ſera dans le cas où elle eût été multiple, ſi on l'eût priſe pour Ordonnée, car elle n'a rien perdu de ſa nature pour avoir reçû un autre nom. Ainſi lorſqu'une Abſciſſe eſt telle qu'étant priſe pour Ordonnée elle eût été Tangente ſimple ou multiple de la Courbe, elle eſt Abſciſſe ou 2 fois ou un plus grand nombre de fois quelconque. Or on prend une Abſciſſe pour Ordonnée, lorſque par le point de la Courbe où ſe termine l'Ordonnée ſuppoſée on tire une droite parallele à l'axe, car cette parallele, qui a la même poſition que l'Abſciſſe, en a les propriétés, & repréſente parfaitement l'Abſciſſe.

Non ſeulement une droite eſt ſuſceptible de l'idée de multiplicité ſelon les ſens que nous avons expliqués, mais un point en eſt ſuſceptible auſſi, non pas un point qui ſeroit un Elément de Courbe, car ce ſeroit une vraye droite, quoiqu'infiniment petite, mais un point mathématique, & abſolu. Une Courbe étant décrite ſur un plan, autant de fois qu'elle paſſe par un même point mathématique de ce plan, autant de fois ce point eſt multiple. Le point d'interſection de 2 branches, de 3 branches, &c. eſt un point double, triple, &c.

Un point d'attouchement, un point d'infléxion quelconques, ne ſont point des points multiples, puiſque la Courbe ne paſſe point pluſieurs fois par un même point du plan, & qu'au contraire elle s'étend toûjours d'un point à un autre

contigu. Mais par la même raiſon un point de rebrouſſement ſimple eſt un point double, car on conçoit naturellement que la Courbe arrivée au dernier point de ſon cours direct repart de ce même point pour commencer ſon cours rebrouſſant. Il eſt vrai que ſelon l'idée que nous avons priſe des Rebrouſſements, & de toute la formation des Courbes, ce point n'eſt pas mathématique, ce ſont deux droites infiniment petites exactement poſées l'une ſur l'autre, & c'eſt par une étendüe infiniment petite du plan que la Courbe paſſe deux fois. Mais pourvû, ce qu'il faut bien obſerver, que l'on n'ait point d'égard à la poſition de cette petite étendüe par rapport à quelque autre droite, elle ne ſera plus qu'un point mathématique.

Il y a une autre eſpece de points beaucop plus ſinguliére. Ces Ovales conjuguées, dont nous avons parlé, deviennent quelquefois infiniment petites, l'Equation de la Courbe permet qu'on égale à Zéro, ou qu'on anéantiſſe les grandeurs dont elles dépendent, elles ſont alors des points qui ne tiennent à aucune des parties de la Courbe, des points abſolument inviſibles aux yeux, ſi ce n'eſt aux yeux Géometres; mais quelle ſorte de points ſeront elles? Si je veux concevoir un Cercle infiniment petit, je conçois ſon diametre infiniment petit du 1er ordre, ſa circonférence de ce même ordre, & un peu plus que triple, il n'y a point là de point multiple, ni rien qui y reſſemble.

Mais je puis concevoir la choſe tout autrement. L'Ovale conjugée ou le Cercle, car cela revient au même, n'avoit que ſa place déterminée ſur le plan de la Courbe, mais non aucune poſition par rapport à un Axe, ce Cercle n'étoit ni parallele, ni perpendiculaire, ni oblique à un Axe, mais tout cela à la fois dans ſes différentes parties, & parce qu'il avoit toutes les poſitions, il n'en avoit aucune. Je ne dois donc le concevoir réduit à aucune grandeur infiniment petite d'aucun ordre, mais au ſeul point mathématique, qui étoit ſon centre. D'un autre côté il faut que ce Cercle ſi réduit conſerve quelque trace de ce qu'il étoit, mais la moindre qu'il

ſe puiſſe, & je ne puis lui en imaginer une moindre qu'en concevant que deux de ces diametres, qui ſe coupoient à angles droits, ſi l'on veut, ont décrû juſqu'à n'avoir plus que le point central où ils ſe coupoient. Ces deux diametres conſervent au Cercle l'idée de ce qu'il a été Cercle, & comme ils ne ſont plus que le point d'interſection de deux lignes, c'eſt un point mathématique double. Il eſt évident que ce ſera la même choſe pour une Ovale, ou Courbe fermée quelconque.

En effet, ſi ce point là n'étoit pas double, il ne ſeroit pas triple, car pourquoi triple plûtôt que quadruple? pourquoi quadruple plûtôt que quintuple, &c.? Il ſeroit donc multiple d'une multiplicité infinie, ce qui eſt abſurde.

Les Ovales adhérentes peuvent auſſi-bien que les conjuguées devenir infiniment petites. Alors elles ſont auſſi des points doubles, parce qu'elles étoient Ovales, mais parce qu'elles étoient adhérentes il reſte néceſſairement un point de la Courbe pour l'adhérence, & par conſéquent le point total eſt triple. M. l'Abbé de Bragelongne eſt le premier qui ait découvert & examiné ces ſortes de points.

Ainſi des Ovales devenües infiniment petites les premiéres ſont des points qui ſont ſur le plan de la Courbe, mais ſans appartenir à aucune de ſes branches, ſans faire partie d'aucun de ſes contours; les ſecondes ſont des points qui ſont partie de quelqu'un de ſes contours, de quelqu'une de ſes branches, mais ſans paroître en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premiéres proviennent des points multiples abſolument inviſibles aux yeux, & des ſecondes des points multiples dont la multiplicité n'eſt qu'en partie inviſible.

Les points multiples de la 1[re] eſpece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle ſorte qu'ils ont leurs Abſciſſes & leurs Ordonnées, à plus forte raiſon ceux de la 2[de] eſpece. De plus une droite tirée par quelqu'un de ces points eſt cenſée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points déſigné par

la

la multiplicité du point multiple, & elle ne peut plus la rencontrer que dans le nombre de points permis par l'Equation de la Courbe, ce qui marque bien combien ils en font essentiellement partie. Cela sera vrai encore à plus forte raison des points multiples d'Intersection ou de Rebroussement, & il suffira de le faire voir des points multiples provenus des Ovales.

Une droite qui a passé par un point mathématique, car ceux dont il s'agit en sont, peut encore passer par tel autre point qu'on voudra. Ainsi celle qui a passé par un point double invisible peut encore couper la Courbe au moins en un point simple, ce qui en fait trois, & par conséquent une Section Conique ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en 2 points, il ne peut y avoir de points doubles dans ce 2^{d} ordre des Lignes, ils ne peuvent commencer à paroître que dans le 3me, où il est clair qu'il ne peut y avoir que celui qui sera provenu d'une Ovale conjuguée. La droite qui aura passé par ce point ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4me ordre il ne peut y avoir de point plus que triple, car il doit rester à la droite qui y auroit passé encore un point de la Courbe où elle seroit Sécante. Puisque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovales, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui passera par un de ces points, peut encore être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1, elle peut même passer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre, car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puisse y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois sur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovales peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui seront provenus d'Intersections ou de Rebroussements. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut

par ce moyen devenir plus multiple, parce que l'Ovale génératrice, pour ainsi dire, ayant été détachée de tout le reste de la Courbe, rien de tout ce qui forme cette Courbe ne passera par ce point.

Mais un point triple provenu d'une Ovale adhérente peut devenir plus que triple dans un ordre supérieur au 4me, parce que l'Ovale adhérente l'aura été à plus d'une branche de la Courbe, &, si l'on veut, à un point de Rebroussement, même multiple.

Les points multiples provenus d'Ovales ont une place déterminée sur le plan de la Courbe, & par conséquent une Abscisse & une Ordonnée, qui font chacune leur fonction autant de fois que le point est multiple, 2 fois si le point est provenu d'une Ovale conjuguée, 3 fois s'il l'est d'une Ovale adhérente, ce qui n'empêche pas que dans ce 2^d cas le point ne puisse encore être multiple d'ailleurs, comme il vient d'être dit.

Mais il faut se souvenir que ces points, précisément entant que provenus d'Ovales, sont des points mathématiques, qui n'ont aucune position, & par conséquent on ne peut dire que l'Ordonnée d'un point double lui soit parallele, ou perpendiculaire, ni pareillement son Abscisse, ou la parallele à l'axe. Elles ne peuvent toutes les deux être traitées que de Sécantes en ces points, & jamais de Tangentes. Si le point est triple, l'Ordonnée ou l'Abscisse y pourront être Tangentes seulement parce qu'elles le seront à la branche qui passe par ce point, & le rend triple ; on jugera assés par là des points qui seroient plus que triples.

Il est évident que puisque ces points sont multiples, leurs Abscisses & leurs Ordonnées le sont aussi, & de la même multiplicité.

Toutes ces idées fondamentales, & en quelque sorte Métaphisiques, étant établies, il faut voir maintenant comment le Calcul géometrique s'y prend à démêler dans les Courbes du 4me ordre, dont il s'agit ici, les affections, qui peuvent naître de ces principes. Comme M. l'Abbé de Bragelongne ne traite

encore entre ces Courbes que celles qui ont des points multiples, c'eſt là que doit tendre toute nôtre recherche, qui ne ſera elle-même qu'une eſpece de Théorie du Calcul.

L'E'quation de la Courbe étant donnée, c'eſt de la combinaiſon des Abſciſſes & des Ordonnées, du différent jeu de cette combinaiſon, que l'on doit tout tirer.

L'Abſciſſe étant ſimple, l'Ordonnée eſt communément ſimple, alors l'Ordonnée & la parallele à l'axe terminée à cette Ordonnée ſont Sécantes de la Courbe.

L'Abſciſſe étant ſimple, l'Ordonnée peut être multiple, ou avoir pluſieurs valeurs. Si toutes ces valeurs ſont inégales, elle ſera Sécante de la Courbe en autant de points; ſi elles ſont égales, elle ſera ou ſimple Tangente, ce qui la rendra double, ou Tangente à un point d'infléxion quelconque, ce qui la rendra multiple ſelon la multiplicité de ce point, triple pour une infléxion ſimple & viſible, quadruple pour l'infléxion inviſible, &c. S'il y a des valeurs inégales, & d'autres égales, il eſt aiſé de voir ce qui en arrivera.

L'Abſciſſe multiple ne peut avoir que des valeurs égales, car ce n'eſt jamais qu'une même Abſciſſe que l'on conſidere, priſe ſur une certaine étendüe de l'axe.

L'Ordonnée étant ſimple, l'Abſciſſe peut être multiple, & alors l'Ordonnée n'eſt Sécante de la Courbe qu'en un point, & la parallele à l'axe en eſt une Tangente autant de fois multiple que l'Abſciſſe a de valeurs, c'eſt-à-dire, ſimple Tangente, ou Tangente à un point d'infléxion quelconque, car il ne peut pas y avoir là un point de rebrouſſement, qui empêcheroit l'Ordonnée d'être ſimple ſelon la ſuppoſition.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont doubles, l'Ordonnée ſe termine à un point double, qui ſera ou un point d'interſection de deux branches, ou un point de rebrouſſement, ou un point provenu d'une Ovale conjuguée. L'Abſciſſe eſt double dans ces cas, & ne l'eſt avec l'Ordonnée qu'en ces cas.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont triples, l'Ordonnée ſe terminera à un point triple qui ſera ou un point d'interſection

de trois branches, ou un point de double rebrouſſement, ou un point provenu d'une Ovale adhérente.

En général l'égalité de multiplicité de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée ſignifiera toûjours ces trois cas indéterminément, c'eſt-à-dire, qu'il y aura un point multiple de l'une des trois eſpeces.

Si l'Abſciſſe & l'Ordonnée toutes deux multiples ne le ſont pas également, le cas des trois points multiples indéterminément marqués, qui étoit *pur*, & ne ſignifioit rien de plus, devient *mixte*, & ſignifie qu'outre un point multiple, il y a là un attouchement ſimple ou multiple. Cet attouchement appartient à celle des deux grandeurs, Abſciſſe, ou Ordonnée, dont la multiplicité excede l'autre. Ainſi ſi l'Abſciſſe eſt double, & l'Ordonnée triple, il y a là un point double, parce que l'Abſciſſe & l'Ordonnée ſont doubles toutes deux, mais parce que l'Ordonnée a un degré de multiplicité de plus, il faut qu'en ſe terminant à ce même point double, elle ſoit Tangente d'une branche de la Courbe. Si c'étoit l'Abſciſſe qui eût cet excès de multiplicité, ce ſeroit la parallele à l'axe qui ſeroit Tangente. Si l'excès de multiplicité eſt de 2 degrés, la Tangente le ſera à un point d'infléxion, &c.

Dans le 4me ordre des Lignes où un point multiple ne peut être plus que triple, & l'Abſciſſe ou l'Ordonnée plus que quadruple, il eſt facile de voir ce qui réſultera des différentes combinaiſons de l'une & de l'autre. Le cas le plus compliqué ſera celui de l'Abſciſſe triple, & de l'Ordonnée quadruple. Il y aura là un point triple, & l'Ordonnée qui s'y terminera ſera Tangente d'une branche. On pourroit prendre pour un cas auſſi compliqué celui de l'Abſciſſe double, & de l'Ordonnée quadruple, parce que le point double ſera accompagné d'une infléxion ordinaire & viſible.

Les points multiples, que nous trouvons dans toute cette recherche, demeurent encore indéterminés entre trois eſpeces, & il faut enſuite déterminer à laquelle ils appartiennent. Juſqu'ici le Calcul de l'Algebre commune a opéré, & a ſuffi.

L'Equation de la Courbe contenoit le rapport général & invariable des Abſciſſes & des Ordonnées exprimées par des grandeurs indéterminées & variables, on a déterminé une Abſciſſe arbitrairement, quoique le plus ſouvent il vaille mieux y apporter un certain choix, & en mettant cette grandeur connüe dans l'Equation de la Courbe à la place de l'Indéterminée ou Inconnüe qui repréſentoit les Abſciſſes, on a une nouvelle Equation, où il ne reſte que l'Indéterminée ou Inconnüe des Ordonnées, qui répondent à l'Abſciſſe ſuppoſée. Ces deux Equations ont chacune autant de racines, ou valeurs, ſoit réelles, ſoit imaginaires, qu'il y a d'unités dans leur plus haut Expoſant, & c'eſt là ce qui donne la multiplicité des Abſciſſes & des Ordonnées, que l'on n'a plus qu'à comparer, & dont nous avons fait voir les conſéquences. Quand on eſt arrivé par-là à reconnoître qu'il y a des points multiples de l'une des trois eſpeces, le Calcul Algébrique ordinaire qui a donné les valeurs égales, tant de l'Abſciſſe que de l'Ordonnée, ne va pas plus loin, mais parce que malgré cette égalité, qui juſque-là confond les trois eſpeces, les Tangentes ou Soutangentes des différents points multiples ſont différentes, il faut, pour lever l'indétermination, prendre le Calcul des Tangentes, qui eſt différentiel, & tranſcendant.

Quand le point multiple eſt formé par l'interſection de pluſieurs branches, autant qu'il y a de branches, autant il y a de Tangentes à la Courbe en ce même point qui ſont inégales, ou s'il y en a d'égales, affectées de différents Signes.

Quand le point eſt un point de rebrouſſement, toutes les Tangentes ſont égales.

Quand le point eſt provenu d'une Ovale conjuguée, il a deux Tangentes égales, mais imaginaires, égales parce qu'il eſt double, imaginaires parce que c'eſt un point mathématique, qui n'a point de poſition, & par conſéquent point de Tangente, qui détermine toûjours une poſition. Si le point eſt provenu d'une Ovale adhérente, il a deux Tangentes imaginaires, & une réelle à cauſe de la branche à

laquelle il eſt adhérent. C'eſt proprement la Tangente de cette branche. On voit combien cela s'accorde avec un principe d'Algebre, que les racines imaginaires vont toûjours deux à deux.

Voilà donc les trois eſpeces de points multiples bien diſtinguées pour le Calcul. Comme la Soutangente d'un point ſimple d'une Courbe ſe trouve par une 1re Différentiation de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée, ou, ce qui eſt le même, par le rapport de l'Infiniment petit de l'Abſciſſe à celui de l'Ordonnée, la Soutangente d'un point double ſe trouvera par une 2de Différentiation, celle d'un point triple par une 3me, &c. & l'Equation qui vient de la Différentiation convenable à la multiplicité de chaque point, renferme toutes les valeurs réelles ou imaginaires des Soutangentes, qui détermineront l'eſpece de chacun.

M. l'Abbé de Bragelongne applique toute ſa Théorie des points doubles à un grand nombre de Lignes du 4me ordre, qui ont été preſque toutes inconnües juſqu'à preſent. Il finit par un Théoreme curieux. Une ligne du 3me ordre ne peut avoir qu'un point double, une ligne du 4me n'en peut avoir qu'un triple, & en ce cas elle n'en aura point de double, mais une autre ligne du même ordre, qui n'aura point de point triple, pourra en avoir un ou pluſieurs doubles. Si une ligne du 5me ordre, qui pourroit avoir un point quadruple, ne l'a pas, elle en pourra avoir de doubles, & en plus grand nombre, que ſi elle n'étoit que du 4me ordre, & ainſi de ſuite. Il s'agit de ſçavoir ſeulement pour les points doubles, qui ſe trouveront dans tous les ordres, combien il s'en trouvera au plus dans chacun. M. l'Abbé de Bragelongne démontre que le nombre des points doubles étant 1 pour le 3me ordre, il ſera 3 pour le 4me, 6 pour le 5me, 10 pour le 6me, 15 pour le 7me, & toûjours ainſi ſelon la ſuite des Nombres Triangulaires. Le fait eſt bien prouvé, mais quel rapport ces Nombres Triangulaires ont-ils, plûtôt qu'une infinité d'autres, aux points doubles des différents ordres de Courbes? on trouve aſſés ſouvent en Géométrie de ces ſortes

de marches reglées, ſans qu'on apperçoive la néceſſité préciſe de leur regle particuliére. Cela vient en général de ce qu'on en a toûjours mis quelqu'une dans le ſujet que l'on conſidere, on la connoît puiſqu'on l'a établie ſoi-même, mais celle-là en produit d'autres imprévûës, qui y étoient renfermées ſans que nous le ſçuſſions, & ſans que nous ſçachions même comment elles y étoient, après les en avoir vû ſortir.

SUR LES COURBES TAUTOCRONES.

LA Cycloïde eſt fort fameuſe chés les Géometres, principalement par ſon iſocroniſme. On ſçait que cette Courbe étant poſée verticalement & renverſée de ſorte que ce qui étoit ſon ſommet ſoit ſon point le plus bas, un Corps qui tombera le long de ſa concavité juſqu'à ce ſommet, tombera toûjours en des temps égaux, ſoit qu'il ait commencé à tomber d'un point plus ou moins élevé. Cette propriété ſuppoſe que le corps tombe dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne lui faſſe aucune réſiſtance, & comme l'Air n'en fait qu'une inſenſible, du moins dans des chûtes de peu de hauteur, on n'a point eu beſoin pour la pratique de chercher d'autres Courbes qui rendiſſent égaux les temps des chûtes inégales. V. les M. p. 78.

Mais ce qui ne ſeroit pas néceſſaire pour la pratique l'eſt pour la Théorie, ſur-tout pour celle qui cherche des difficultés à vaincre, & M. Bernoulli en a trouvé une occaſion heureuſe dans l'entrepriſe d'étendre l'iſocroniſme, ou pour nous ſervir comme lui d'une expreſſion équivalente, le *tautocroniſme* de la Cycloïde à d'autres Courbes parcouruës dans des Milieux réſiſtants. Il ne les ſuppoſe réſiſtants que ſelon les quarrés de la vîteſſe du Corps tombant, hipothéſe la plus vrai-ſemblable, la plus communément reçûë, & peut-être la ſeule, qui rende poſſible la ſolution du Probleme, tant il eſt difficile. Il ne tiendra qu'aux Géometres d'éprouver combien

il l'est encore dans cette hipotheſe-là même, & il faudra être habile pour le bien ſentir. Cette raiſon nous empêche abſolument de pouvoir donner aucune idée des fineſſes & des ſubtilités du Calcul de M. Bernoulli, & nous ſommes obligés de nous contenter de quelques vûës générales, & plus communes.

Un axe vertical, qui ſe termine au point le plus bas, ou ſommet de la Cycloïde renverſée étant poſé, & diviſé en une infinité de parties infiniment petites égales, d'où partent les Ordonnées de la Cycloïde, j'appelle *inſtants* les temps infiniment petits pendant leſquels ſont parcourus chacun des petits côtés de la Courbe, correſpondants à une diviſion de l'axe. A la fin de chaque inſtant le Corps tombant a une certaine vîteſſe, toûjours plus grande d'inſtant en inſtant, & la même que s'il fût tombé juſque-là le long de la ligne droite verticale, car il ne tire l'accélération de ſa vîteſſe que de ce qu'il y a de vertical dans ſon mouvement, & nullement de ce qu'il y a d'horiſontal. Quoique la vîteſſe par laquelle il parcourt pendant chaque inſtant un petit côté de la Cycloïde ſoit la même que celle par laquelle il eût parcouru la partie droite verticale correſpondante, cela n'empêche pas que l'inſtant par la Cycloïde ne ſoit plus long, parce que tous les petits côtés de la Cycloïde étant inclinés à l'Horiſon, excepté le premier & plus élevé, ils ſont plus grands que les petites droites verticales correſpondantes, & ne peuvent être parcourus qu'en plus de temps. Si dans une 1re chûte le corps eſt tombé du point le plus élevé de la Cycloïde, & que dans une 2de chûte il ne ſoit tombé que de ſon point du milieu, j'entends par-là celui qui répond au point du milieu de l'axe vertical, il eſt viſible que la ſomme des inſtants de la 1re chûte eſt deux fois plus forte par le nombre que celle des inſtants de la 2de, & que de ce chef les temps totaux des deux chûtes ſont bien éloignés de l'égalité; mais les inſtants de la 2de chûte ont été plus longs par deux raiſons, 1° parce que cette chûte n'ayant pas commencé de ſi haut, la vîteſſe n'y a jamais été ſi grande que dans la 1re, 2° parce que les côtés de

de la Courbe ont été plus inclinés dans sa 2[de] moitié. Il est donc possible que les deux sommes d'instants malgré leur premiére inégalité se retrouvent égales, & ces deux chûtes seront tautocrones. Mais afin que la Courbe porte ce nom, il faut qu'elles le soient toutes de quelque point qu'elles commencent pour aller se terminer au point le plus bas.

Alors comme il y a toûjours un certain nombre de côtés de la Courbe communs à une chûte quelconque & à une plus basse, il faut que ces côtés communs, les seuls qui seront parcourus par la chûte basse, soient de telle grandeur qu'ils allongent les instants de la quantité nécessaire, & que quand dans la chûte élevée ils seront parcourus après des côtés supérieurs, & par conséquent avec plus de vîtesse, ils n'allongent plus les instants qu'autant qu'il faudra. Or leur grandeur dépend de leur position par rapport à l'Horison, & le tout ensemble de leur position mutuelle ou respective, qui est ce qui fait la nature ou l'essence de la Courbe. Voilà d'où naît la Cycloïde dans un milieu non résistant, seule Courbe tautocrone connüe jusqu'ici.

Mais si l'on considére la résistance du Milieu, uniforme en elle-même, parce que le Milieu sera également dense en toutes ses parties, & cependant croissante parce que la vîtesse du Corps, qui pénétre le Milieu, croît toûjours, & croissante selon les quarrés de cette vîtesse, alors il faut faire de nouvelles considérations pour trouver une Courbe tautocrone. La résistance allonge le temps total de la chûte, & tous les instants qui le composent, puisqu'elle retranche toûjours quelque portion de la vîtesse que produisoit ce qu'il y avoit de vertical dans la chûte de quelque instant. Ce ne sont point les quarrés de la vîtesse primitive, produite par le vertical de la chûte, ce sont les quarrés de la vîtesse diminuée de chaque instant, ausquels la résistance se proportionne. Or cette vîtesse diminuée l'est d'autant plus que la force absolüe de la résistance est plus grande, & au contraire; & par conséquent les instants sont allongés selon une certaine raison, dans laquelle doit entrer, outre le quarré de

chaque vîteſſe, la force abſoluë de la réſiſtance du Milieu. Cette force étant différente pour chaque Milieu, le temps total de la chûte & les inſtants ſeront donc auſſi différemment allongés, & comme les côtés d'une Tautocrone doivent être, & chacun en particulier & tous par rapport les uns aux autres, poſés de la maniére que demande la durée des inſtants, il y aura dans la ſeule hipothéſe de la réſiſtance du Milieu proportionnée aux quarrés de la vîteſſe croiſſante, autant de différentes Tautocrones que de différentes réſiſtances abſolües poſſibles pour différents Milieux, c'eſt-à-dire, qu'il y aura une infinité de Tautocrones, au lieu que la Cycloïde étoit unique pour le Vuide.

M. Bernoulli comprend toutes les Tautocrones de ſon hipotheſe dans une Equation générale, où entrent l'infiniment petit d'un Arc quelconque, celui de l'Abſciſſe correſpondante, & deux Indéterminées conſtantes, dont l'une eſt la réſiſtance abſolüe du Milieu, & l'autre a rapport au temps total de la chûte, le tout combiné avec l'Arc quelconque, & l'Abſciſſe.

Si dans cette Equation on ſuppoſe la réſiſtance du Milieu nulle, on voit renaître auſſi-tôt la Cycloïde. On ne peut pas ſuppoſer cette réſiſtance infinie, il n'y auroit point de chûte.

Si on ſuppoſe le temps total infini, car on ne peut pas le ſuppoſer nul, la Tautocrone devient la Tractrice, dont nous avons parlé aſſés au long en 1711 *. Cette Courbe a une Aſimptote, & par conſéquent un cours infini, & ſon point le plus élevé eſt infiniment éloigné du plus bas. Qu'un Corps, en ſuivant la concavité de la Tractrice, tombe ou de ce point le plus élevé, ou de celui qui ſera, par ex. à la moitié de l'étendüe de la Courbe, ou au tiers, &c. juſqu'au point le plus bas, il tombera toûjours dans le même temps infini, parce qu'à proportion qu'il tombera d'un point moins élevé, & acquerra par conſéquent moins de vîteſſe, la réſiſtance du Milieu diminüera moins auſſi ſon mouvement. Que ſi le Corps ne tomboit que d'un point de la Courbe finiment éloigné du point le plus bas, ſa chûte demanderoit encore

* p. 58. & ſuiv.

le même temps infini, ce qui est néceſſaire pour le Tautocroniſme, & paroît cependant un violent paradoxe. Mais on l'expliquera aiſément, en prenant les idées expoſées dans la *Géométrie de l'Infini* ſur les Courbes qui ont des Aſimptotes. La portion finie de la Tractrice que le Corps auroit à parcourir dans le cas préſent, ſeroit néceſſairement ſelon ces idées preſque abſolument parallele à l'Horiſon, & telle que la peſanteur du Corps ne pourroit lui en faire parcourir une partie infiniment petite qu'en un temps fini, & par conſéquent le tout en un temps infini, que la poſition particuliére des petits côtés de la Courbe rendroit égal aux autres temps infinis déja trouvés.

Il eſt bon de remarquer que comme la Cycloïde eſt la ſeule Tautocrone du Vuide, la Tractrice eſt la ſeule Tautocrone du temps infini, & la ſeule par conſéquent d'une étendüe infinie.

Quand un Corps tombe dans un Milieu réſiſtant, il reçoit des accroiſſements continuels de vîteſſe par la continuation de ſa chûte ſelon ce qu'elle a de vertical, & en même temps des décroiſſements continuels à cette même vîteſſe par la réſiſtance du Milieu. Les accroiſſements ſont toûjours égaux à chaque inſtant ſelon le ſiſtême de la Peſanteur, & les décroiſſements au contraire toûjours plus grands, à cauſe que la réſiſtance croît dans la raiſon des quarrés des vîteſſes. Les accroiſſements plus grands d'abord que les décroiſſements, parce que les quarrés de la vîteſſe ſont fort petits, ne ſont donc plus grands que de moins en moins, ce qui amene néceſſairement les uns & les autres à l'égalité, après quoi les décroiſſements ſont les plus grands. Il y aura dans la Courbe parcourüe un point de la plus grande vîteſſe du Corps.

Qu'après ce point le Corps continüe de tomber juſqu'au point le plus bas de cette Courbe, cela n'a rien qui la doive empêcher d'être tautocrone; ce point de la plus grande vîteſſe baiſſera toûjours à meſure que le Corps tombera d'une moindre hauteur juſqu'au point le plus bas qui eſt fixe, & la vîteſſe,

plus diminüée par la réſiſtance du Milieu qu'augmentée par l'action continuelle de la peſanteur, ſera dans le même cas que ſi elle n'étoit diminüée que par la poſition des côtés de la Courbe, ce qui non ſeulement n'eſt pas contraire au tautocroniſme, mais y eſt néceſſaire.

Nous n'avons conſidéré juſqu'à préſent qu'une partie du Probleme réſolu par M. Bernoulli, les deſcentes tautocrones d'un Corps; il faut de plus pour le parfait Tautocroniſme que ce Corps arrivé au point le plus bas remonte en vertu de ſa vîteſſe juſqu'à une certaine hauteur par une ſeconde branche de la Courbe, & cela en un temps égal à celui d'une deſcente quelconque. L'Equation générale de M. Bernoulli renferme ces deux conditions enſemble au moyen d'un ſimple changement du Signe de quelques termes.

Dans la Cycloïde le Corps arrivé au point le plus bas avec une vîteſſe entiére, & qui n'a eſſuyé aucune réſiſtance, remonte à la même hauteur d'où il étoit deſcendu, en un temps égal, & par une ſeconde branche de la Courbe égale & ſemblable à la premiére, ce qu'on voit évidemment qui doit être à cauſe de la parfaite égalité de tout de part & d'autre. Mais il n'en eſt pas de même dans une Tautocrone, où ſe trouve un point de la plus grande vîteſſe, qui n'eſt pas, comme dans la Cycloïde, ſon point le plus bas. Ce Corps ne peut remonter qu'avec cette vîteſſe diminüée qu'il a au dernier point ou inſtant de ſa deſcente, par conſéquent il ne peut remonter à une auſſi grande hauteur que celle d'où il eſt deſcendu, & comme il faut qu'il remonte en un temps égal à celui de la deſcente, il faut que l'Arc remonté ait par rapport à l'Horiſon l'obliquité néceſſaire pour employer tout ce temps-là, d'où il ſuit que les deux branches de la Courbe, l'une deſcendüe, l'autre remontée, ne ſeront ni égales, ni ſemblables; ſeulement la branche deſcendüe, priſe depuis l'origine de la chûte juſqu'au point de la plus grande vîteſſe, ſera égale, mais non ſemblable, à la branche remontée, ainſi que M. Bernoulli le démontre.

Nous avons dit d'après feu M. Varignon en 1708 * & 1709 * qu'un Corps qui tomberoit en ligne droite dans un Milieu dont la résistance suivroit, ou la raison simple des vîtesses, ou celle de leurs quarrés n'acquerroit dans l'un & l'autre cas au bout d'un temps infini qu'une vîtesse finie; mais beaucoup moindre dans le second cas. Si l'on applique cette proposition à la Tractrice qui est la Tautocrone d'un temps infini dans un Milieu résistant selon la raison des quarrés, le Corps qui parcourt la Tractrice aura une vîtesse finie au bout d'un temps & d'un cours infini. Il arrivera en un temps fini au point de sa plus grande vîtesse, car il faudroit que la résistance du Milieu fût infiniment petite ou foible pour ne pouvoir qu'au bout d'un temps infini diminüer plus la vîtesse que la pesanteur ne l'augmente continuellement. Du point de la plus grande vîtesse au point le plus bas, il y aura donc une distance infinie. La Courbe aura une seconde branche égale à la portion de la premiére déterminée par la plus grande vîtesse, & par conséquent finie, & presque entiérement horisontale pour ne pouvoir être parcouruë, ainsi qu'il a été dit, qu'en un temps infini.

* p. 126.
* p. 99.

La Cycloïde & la Tractrice sont les deux Tautocrones extrêmes & les plus opposées. Elles le sont parfaitement sur la position du point de la plus grande vîtesse dans la premiere branche; il est dans la Cycloïde à l'extrémité de cette branche, puisqu'il est le même que le point le plus bas, & dans la Tractrice il est infiniment éloigné du point le plus bas, d'où il suit par analogie que dans toutes les Tautocrones moyennes le point de la plus grande vîtesse ne se confondra jamais avec le point le plus bas, & en sera toûjours à une distance finie.

Il suit encore que puisque la Cycloïde a ses deux branches égales & semblables, & que la Tractrice les a infiniment inégales & dissemblables, les Tautocrones moyennes les auront d'autant moins inégales & dissemblables qu'elles approcheront plus de la Cycloïde, & au contraire. Or elles approcheront d'autant plus de la Cycloïde que les Milieux

feront moins réfiftants, & d'autant plus de la Tractrice qu'elles auront befoin pour être Tautocrones d'être parcourües en un temps plus long.

Nous ne difons rien des différents Problemes réfolus par M. Bernoulli fur la détermination du point de la plus grande vîteffe, fur la comparaifon des différents Arcs de la Courbe, fur les conftructions, &c. Non-content des difficultés naturelles du fujet, quoique très-embarraffantes, il y en a même fait entrer d'étrangeres. On reconnoîtra par-tout une extrême adreffe, foit à éviter des labirinthes de Calcul, foit à fe démêler de ceux qui étoient inévitables.

SUR LA COURBE aux approches égales.

V. les M. p. 233.

Les Courbes Tautocrones font telles parce que le Corps tombe toûjours en un temps égal, foit qu'il tombe d'un point plus ou moins élevé, & il eft vifible qu'en ce temps égal il ne s'eft pas également approché du point le plus bas de la Courbe, ou, ce qui eft le même, de l'Horifon, car certainement il s'en eft d'autant plus approché qu'il eft tombé de plus haut. M. Leibnits imagina de chercher une Courbe telle que le Corps qui la parcourroit, s'approchât toûjours également de l'Horifon en un temps égal, par exemple, en une feconde. Il l'appella la Courbe *acceffus æquabilis, aux approches égales.* Puifque dans une chûte faite felon une droite verticale, la vîteffe augmenteroit toûjours, & feroit que dans un temps égal le Corps décriroit toûjours une plus grande portion de cette verticale, & par conféquent s'approcheroit davantage de l'Horifon, il eft néceffaire que la Courbe modere cette augmentation de vîteffe, & fe difpofe de façon que ce que la chûte aura de vertical foit plus court, & ce qu'elle aura d'horifontal plus long, à mefure qu'elle avancera davantage vers fon terme; & cela felon une certaine raifon précife, quoique changeante à chaque inftant. Mrs Leibnits, Bernoulli

& Varignon, comme nous l'avons dit en 1699*, ont trouvé que cette Courbe étoit une 2de Parabole cubique, poſée de maniére que ſon point de rebrouſſement fût le plus élevé.

* p. 68. & ſuiv.

Mais quoique M. Varignon eût porté ſelon ſa coûtume ce Probleme à une grande univerſalité, en y mettant de nouvelles conditions, les *approches*, par exemple, inégales en telle raiſon qu'on voudroit, il étoit demeuré renfermé à un autre égard dans des bornes très-étroites; les chûtes ſe faiſoient toûjours dans le Vuide, ou dans un Milieu non réſiſtant, ou, ce qui revient au même, dans un Milieu dont la réſiſtance fût toûjours uniforme, & indépendante de la vîteſſe du Corps.

M. de Maupertuis a elevé ce Probleme à l'univerſalité qui lui manquoit, on trouvera toûjours une Courbe aux approches égales, ſelon quelque puiſſance des vîteſſes que les Milieux puiſſent réſiſter. S'ils ne réſiſtent point, c'eſt la 2de Parabole cubique déja trouvée, & c'eſt encore elle s'ils réſiſtent ſelon la raiſon ſimple des vîteſſes, mais renverſée, c'eſt-à-dire, s'ils réſiſtent moins en même raiſon que la vîteſſe devient plus grande. Cette hipotheſe ne paroît guére conforme à la Nature, mais enfin cela eſt analogue à ce que la Cycloïde, qui eſt la Tautocrone du Vuide, ou du Milieu non réſiſtant, l'eſt auſſi du Milieu qui ne réſiſteroit que ſelon la raiſon ſimple directe des vîteſſes. Toutes les autres hipotheſes de réſiſtance des Milieux donnent des Courbes d'approches égales fort différentes de la Parabole cubique. L'hipotheſe de la réſiſtance proportionnelle aux quarrés des vîteſſes ſuffiroit ſeule pour donner à M. de Maupertuis tout le plaiſir qu'il a recherché dans des difficultés de Calcul, ſoit différentiel, ſoit intégral. Non-ſeulement il y a de ces Courbes que l'on ne conſtruit, ou dont on ne peut avoir les Abſciſſes & les Ordonnées que par des quadratures d'autres Courbes, mais encore ces autres Courbes ſe trouvent être des Exponentielles, c'eſt-à-dire, tranſcendantes par rapport à celles qu'on a nommées d'abord tranſcendantes par rapport aux Courbes algébriques.

CEtte année, M. de Cury, dont nous avons déja parlé en 1728 *, a lû à l'Académie un Mémoire qu'elle a approuvé, sur la Courbure des Courbes. *Les Elements de la Géométrie de l'Infini* ont donné pour la détermination de cette Courbure, une méthode géométrique, différente de la méthode ordinaire, qui procede par les Rayons des Developpées, Courbes étrangeres à celles que l'on examine. La nouvelle méthode prend la Courbure des Courbes en elles-mêmes, & la détermine par les Sinus des Angles de Contingence. Mais elle a le défaut d'être bornée aux Courbes dont les Ordonnées sont paralleles, les plus communes de toutes, à la vérité, & de beaucoup les plus communes, mais non pas les seules; il restoit celles dont les Ordonnées sont concourantes en un point. M. de Cury a trouvé le moyen de rendre la méthode de la *Géométrie de l'Infini* absolument générale, & telle que sur les mêmes principes on y trouve la courbure des deux especes de Courbes; elle est pour les Courbes à Ordonnées concourantes, & par un léger changement elle est pour les Courbes à Ordonnées paralleles. Il a donné des exemples de la 1re espece de Courbes, car il y en avoit assés de la 2de dans l'Ouvrage cité, sur la Spirale ordinaire de tous les degrés, & sur la Spirale Parabolique.

* p. 52.

M. Clairaut, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726 * a lû aussi à l'Académie une Méthode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra, avec cette condition, que la somme des quarrés de deux côtés soit double, triple, quadruple, &c. du quarré de la base; & comme ce qui est dit des quarrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au lieu de quarrés, des Segments de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendüe & plus générale la Méthode de M. de l'Hôpital, pour quarrer

* p. 45.

quelque

quelque portion de la Lunule d'Hippocrate de Chio *, & il quarre encore quelques autres portions de la Lunule, par une méthode différente de celles de Mrs Wallis, & Tschirnhaus. Il a 14 ans, & ce seroit bien assés qu'il entendît les découvertes de ces grands Géometres, sans y rien ajoûter, & sans renchérir sur eux; mais on a déja vû que la Géométrie est extrêmement précoce dans cette Famille.

* V. l'Hist. de 1701. p. 79. & suiv. 2de Edit.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

Deux Ecrits de M. Nicole sur quelques Questions qui regardent les Jeux. V. les M. p. 45. & 331.

L'Ecrit de M. Mahieu sur de nouvelles propriétés de l'Hiperbole. V. les M. p. 508.



ASTRONOMIE.

SUR LA COMETE DE M. DCCXXIX. ET DE M. DCCXXX.

V. les M. p. 284.

LA Comete dont nous avons parlé en 1729 *, qui n'a fait aucun bruit dans le monde, & n'a été connüe que des Observateurs de profession, & apparemment même d'un petit nombre d'entre eux, est cependant une des plus remarquables & des plus singuliéres dont on ait mémoire, & sur-tout des mieux conditionnées par rapport à l'établissement d'un systême général de ces grands Phénomenes.

* p. 68. & suiv.

Elle avoit commencé à paroître, ou du moins à être apperçûë le 31 Juillet 1729, nous en avons rendu compte jusqu'au 10 Nov. de la même année, & on l'a vûë jusqu'au 21 Jan. 1730, encore ne la perdit-on qu'à cause du mauvais temps, & du clair de Lune, desorte qu'elle a été visible près de 6 mois, & auroit pû l'être davantage. Il y a plus de 100 ans qu'il n'a paru de Comete d'une si longue durée.

Elle a toûjours été d'Orient en Occident, ou contre la suite des Signes depuis sa premiére apparition jusqu'au 19 ou 20 Oct. après quoi elle a été d'Occident en Orient, c'est-à-dire, qu'elle a été rétrograde & puis directe à la maniére des Planetes; & comme selon le calcul de M. Cassini elle avoit dû être en opposition avec le Soleil le 8 Août, temps où elle n'étoit pas encore observée à Paris, on a dû voir ici son mouvement rétrograde diminuer toûjours, ainsi qu'auroit fait celui d'une Planete qui a passé l'opposition, & c'est en effet ce qu'on a vû. Il est naturel de supposer que le temps de sa premiére rétrogradation, c'est-à-dire, de celle qui a précédé l'opposition, ait été égal à celui de la seconde, & sur

ce pied-là elle auroit commencé à être rétrogade dans les derniers jours de Mai 1729, & l'auroit été en tout près de 5 mois. C'étoit-là un temps bien ſuffiſant pour ſon apparition totale, & s'il n'avoit pas été plus long, on auroit jugé qu'elle n'avoit qu'un mouvement d'Orient en Occident, qu'elle alloit donc contre la direction du Tourbillon Cartéſien, & que cela étant impoſſible à la longue, ce Tourbillon n'éxiſtoit point. Il ne faut donc pas ſe preſſer de croire que les Tourbillons ſoient détruits par les mouvements des Cometes, qui y ſont oppoſés, & il y a au contraire une forte préſomption, qu'ils ſe rétabliront parfaitement par l'explication de M. Caſſini, que la Comete de cette année favoriſe à ſouhait.

En vertu de la rétrogradation & de la direction, qui a ſuivi, cette Comete a été vûë dans le même lieu du Ciel en deux temps différents, ce qui eſt un avantage rare & conſidérable pour les déterminaiſons aſtronomiques, mais nous ne pouvons que le faire entrevoir.

L'Orbe de la Terre autour du Soleil, quoiqu'il ait un diametre de 66 millions de Lieües, eſt ſi petit par rapport à la diſtance des Fixes, qu'il peut n'être compté que pour un point, & que la Terre, qui lorſqu'elle eſt à l'extrémité d'un diametre, voit, par exemple, une Fixe au Zénit, l'y verra encore lorſqu'elle ſera à l'autre extrémité; s'il y a une différence ou parallaxe, il ſera bien difficile de l'appercevoir. Ainſi toutes les lignes, qui de la Terre placée en différents points de ſon Orbe iront à une même Etoile fixe, ſeront cenſées paralleles à cauſe de la diſtance preſque infinie, & les arcs de l'Orbe compris entre deux paralleles conſécutives, ou plûtôt les cordes de ces arcs, ſeront les diſtances de ces paralleles entre elles, & les baſes de triangles infiniment aigus, dont le ſommet ſeroit infiniment éloigné. Si outre l'Etoile ſuppoſée au Zénit la Terre en regarde une autre de différents points de ſon Orbre, elle la verra encore par des lignes toutes paralleles entre elles, mais inclinées aux premiéres, plus ou moins ſelon la poſition des deux Etoiles.

Si un autre Aſtre qu'une Fixe eſt vû au même point du Ciel par la Terre placée en deux différents points de ſon Orbe, ou, ce qui eſt le même, en deux différents temps, il eſt à cet égard dans le même cas qu'une Fixe, & il eſt vû par deux paralleles, mais ſi cet Aſtre ſe meut, comme fait certainement une Comete, il eſt impoſſible qu'il ſoit vû dans les deux temps par les deux paralleles, à moins qu'il ne ſe ſoit mû ſelon la même direction que la Terre, qu'il aura ſuivie pour ſe retrouver à ſon égard dans la même poſition que s'il eût été fixe. Il n'importe quelle ligne il ait décrite entre les deux paralleles, courbe ou droite, perpendiculaire ou inclinée à ces paralleles, mais enfin pour paſſer de la premiére à la ſeconde, il faut puiſqu'il s'eſt mû, qu'il ſe ſoit mû du même ſens que la Terre, il n'y a que cette condition qui puiſſe faire l'effet de l'immobilité d'une Fixe. La Comete s'eſt donc müe réellement d'Occident en Orient pendant tout l'intervalle compris entre les deux temps, où elle a été vûë au même lieu du Ciel, c'eſt-à-dire, auſſi-bien pendant la rétrogradation que pendant la direction, & par-là M. Caſſini amene à la certitude géometrique ce qui n'étoit auparavant que très-probable. C'eſt la Comete vûë deux fois dans le même lieu du Ciel qui a fondé la démonſtration.

Ces deux paralleles, par leſquelles la Comete a été vûë au même lieu en deux obſervations différentes, ne peuvent déterminer ni quelle route la Comete a tenüe entre elles, ce qui eſt clair, ni quelle eſt ſa diſtance à la Terre, car puiſqu'elles ſont paralleles elles ne font point d'angles, & à quelque diſtance très-grande qu'on ſuppoſe la Comete, ce ſera toûjours la même choſe. Mais ſi on prend une 3me obſervation, où la Comete aura été vûë dans un autre lieu du Ciel, & que du point de l'Orbe de la Terre d'où cette obſervation aura été faite on tire une ligne à la Comete, cette ligne ſera néceſſairement inclinée aux deux paralleles, puiſque la Comete eſt vûë dans un autre lieu, & l'inclinaiſon ſera d'autant plus grande, ou l'angle de la nouvelle ligne avec les deux premiéres d'autant plus petit, que la diſ-

tance de la Comete à la Terre ſera plus grande. Voilà le principe fondamental de la détermination de cette diſtance, qui demande pourtant encore aſſés de Géometrie & de calcul. Il faut ſe ſervir des diſtances connües de la Terre au Soleil dans les trois obſervations, prendre entre les lignes tirées de la Terre à la Comete d'autres lignes proportionnelles aux arcs décrits par la Terre ſur ſon Orbe d'une obſervation à l'autre, ou aux temps écoulés, &c. Enfin tout cela fait, M. Caſſini trouve la Comete entre Mars & Jupiter, comme il l'avoit déja avancé en 1729. Il ſeroit inutile d'avertir que ſi nous n'avons ſuppoſé ici que trois obſervations, ce n'a été qu'afin de réduire tout au plus ſimple, un Aſtronome qui en a un plus grand nombre ne manque certainement pas de les employer, ſur-tout dans des déterminations très-délicates & très-épineuſes. M. Caſſini croit qu'en poſant la diſtance moyenne de ſa Comete au Soleil un peu plus de quatre fois plus grande dans les ſix mois qu'on l'a apperçûë, que celle de la Terre, il approche preſque autant du vrai que l'on ait fait pour la diſtance d'aucune Planete. On n'a peut-être pas vû juſqu'à préſent de Comete dont la diſtance ſoit auſſi exactement trouvée.

La même méthode, qui fournit la diſtance par le moyen des trois obſervations ſuppoſées, fournit auſſi l'inclinaiſon, & par conſéquent la longueur de la route de la Comete entre les deux paralleles & la 3me ligne inclinée, pourvû que cette route ſoit une ligne droite, & cette ligne qui ſe trouve néceſſairement diviſée en deux parties donne par le rapport de ces parties celui du mouvement de la Comete entre les obſervations, pourvû que ce mouvement ſoit uniforme. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne ſe trouve dans la réalité; on peut cependant les ſuppoſer légitimement toutes deux, & dans une fort petite portion de l'Orbe de la Comete, & dans un temps fort court par rapport à celui de ſa révolution entiére. Or on eſt toûjours, ou bien on peut aiſément ſe mettre dans l'un & l'autre de ces deux cas.

Cette méthode n'eſt donc bonne que pour trouver le

mouvement de la Comete, qui a répondu à trois obſervations, par ex. peu éloignées. Si l'on en prenoit trois autres peu éloignées entre elles, mais éloignées des premiéres, on trouveroit une autre quantité de mouvement, de même qu'en prenant la Comete dans des points de ſon cours éloignés, on lui trouvera différentes diſtances au Soleil & à la Terre.

Les diſtances de la Comete au Soleil & plus précifément à la Terre, font varier l'apparence de ſon mouvement, une plus grande proximité la rend plus grande, & au contraire, mais les diſtances au Soleil doivent faire varier le mouvement réel comme celui des Planetes, ſi les Cometes ſont des Planetes Solaires, & il ſe trouve dans la Comete dont il s'agit, que la différence de ſon mouvement, vû en deux points éloignés de ſon cours, a été double de la différence de ſa diſtance au Soleil dans ces mêmes points, ainſi qu'on le trouve précifément dans les Planetes les mieux connües. Une moitié de cette différence du mouvement obſervé n'étoit qu'apparente, & dûë à une diſtance, moindre, ſi l'on veut, l'autre moitié étoit réelle, & véritablement cauſée par cette diſtance, parce qu'elle étoit moindre.

Si la Comete dans le temps qu'elle a été viſible a été 4 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, & ſi l'on ſuppoſe que dans la Région du Ciel, ou dans la couche du Tourbillon Solaire où elle ſe trouvoit elle ait pris la vîteſſe qui ſelon la Régle de Képler conviendroit à une Planete placée au même lieu, on verra ſans peine que ſa vîteſſe réelle devoit être 2 fois moindre que celle de la Terre, car ces vîteſſes réelles des Planetes ſont en raiſon renverſée des racines quarrées de leurs diſtances au Soleil, or ici la diſtance de la Terre étant 1, celle de la Comete eſt 4, dont la racine eſt 2. Si la Terre qui fait ſur ſon Orbre un degré en 24 heures avoit 2 fois moins de vîteſſe, elle ne feroit que 30′, donc la Comete avec cette même vîteſſe employée à parcourir un Orbe 4 fois plus grand que celui de la Terre ne doit faire en 24 heures que le quart de 30′, ou 7′ 30″.

Cependant M. Caſſini par ſes calculs trouve ce même

mouvement de 9′ 40″, ce qui eſt trop différent pour la préciſion dont l'Aſtronomie eſt aujourd'hui, mais ce qui rectifie & corrige cette différence, c'eſt qu'en ſuppoſant que la Comete parcouroit une Ellipſe, ainſi qu'il eſt néceſſaire, ſi c'étoit une Planete, il ſuit de cette figure qu'au temps de ſa premiére apparition elle avoit un peu paſſé ſon Périhélie & alloit à une de ſes moyennes diſtances, où par conſéquent ſon mouvement, qui eſt alors véritablement le moyen, & réel, eût été moindre que 9′ 40″. En ſuivant l'idée de l'Ellipſe M. Caſſini détermine le mouvement dans l'Aphélie d'un peu moins de 4′, & de tout cela réſulte pour tout l'Orbe le véritable mouvement moyen de 6′.

M. Caſſini n'oſe déterminer abſolument l'eſpece de l'Ellipſe que décrit la Comete, parce qu'il ne juge pas que dans les différentes obſervations ſes diſtances au Soleil, qui ſeroient un fondement néceſſaire, ayent pû être connuës avec une aſſés grande préciſion. Il ne laiſſe pas néantmoins de croire qu'on repréſentera aſſés exactement ſon cours en ſuppoſant que ſa moyenne diſtance au Soleil eſt à celle de la Terre comme 24 à 5. Il ſuit de-là que ſa révolution entiére eſt d'environ 10 années ſelon la Régle de Képler, à laquelle cette Comete ſe trouve merveilleuſement conforme, ce qui eſt & une nouvelle gloire pour la Regle qui ne s'étendoit pas encore juſque-là, & une forte preuve que quelques Cometes tout au moins ſont des Planetes Solaires.

L'inclinaiſon de l'Orbe de cette Comete ſur le plan de l'Ecliptique eſt, ſelon les calculs de M. Caſſini, de plus de 76 degrés, ce qui excéde de beaucoup la plus grande inclinaiſon de toutes les Planetes connües, celle de Mercure, qui n'eſt que de 7, mais il ne ſera pas étonnant qu'une Comete, qui quoique Planete Solaire ſeroit toûjours d'une condition différente des autres, s'en écarte beaucoup à quelques égards, qui ne changeroient rien à leur nature générale. Le Nœud de ſon Orbite avec l'Ecliptique a été entre le 10 & le 11me degré d'Aquarius.

Selon ſon mouvement & le temps de ſa révolution déterminés par M. Caſſini, elle a dû ſe retrouver en oppoſition avec le Soleil au mois de Sept. 1730, temps le plus favorable pour l'obſerver, ſi elle a pû l'être, mais elle ne l'a pû, apparemment parce qu'elle étoit alors trop éloignée de la Terre. Il ne faut pas s'attendre que tout s'accorde ſi promptement à donner un ſyſtême général des Cometes, ni même celui d'aucune Comete en particulier. Des Philoſophes trop impatients auroient à revenir ſur leurs pas.

SUR UNE OBSERVATION de l'Eclipſe de Lune du 8 Août 1729, faite à la Nouvelle Orléans dans la Loüiſiane.

L'ECLIPSE totale de Lune du 8 Aouſt 1729, dont les obſervations faites à Paris ont été rapportées dans les Mémoires de cette même année *, fut auſſi obſervée à la Nouvelle Orléans dans la Loüiſiane par M. Baron, envoyé dans ce Pays-là par le Roy pour des recherches d'Hiſtoire Naturelle & des obſervations Aſtronomiques. Nous rendons particuliérement compte de celle-ci, parce qu'elle ſervit à décider une difficulté qui s'étoit élevée dans l'Académie.

* p. 344. & 346.

Le P. Laval, dans ſon voyage de la Loüiſiane en 1720, avoit donné par ſes obſervations la différence de Longitude entre Paris & l'Iſle Dauphine, ſituée à l'embouchûre de la Riviére de la Mobile, plus petite de 11 degrés que celle de la Carte d'Amérique de M. Deliſle, publiée en 1722. Le P. Laval ſe tenoit ſûr de l'exactitude de ſon obſervation, & ſon habileté n'étoit pas conteſtée, celle de M. Deliſle ne l'étoit pas non plus, & il étoit armé d'un grand nombre de raiſons très-fortes, qu'il expoſa à l'Académie, & ils différoient tous deux à tel point qu'on ne pouvoit les concilier en ſuppoſant que l'un ou l'autre ſeroit tombé dans quelque légere erreur.

Enfin le doute fut levé par l'Eclipſe dont il s'agit. Elle fut vûë à Paris pendant toute ſa durée, & à la Nouvelle Orléans vers ſa fin ſeulement, & M. Caſſini ayant comparé les temps des Phaſes obſervées par lui & par M. Baron, ou s'étant ſervi de quelques autres obſervations faites en France, a trouvé qu'il en réſultoit entre les deux Lieux une différence de Méridiens aſſés conforme à celle que M. Deliſle avoit poſée.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

L'Ecrit de M. Godin ſur la ſolution d'un Probleme, d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes. V. les M. p. 26.

L'Obſervation de M. Caſſini de l'Eclipſe Solaire du 15 Juillet. V. les M. p. 450.



GÉOGRAPHIE.

M. BUACHE, employé à travailler au Dépôt des Cartes de la Marine établi en 1721, ayant profité pour l'avancement de la Géographie de tout ce qu'il avoit ſous les yeux, apporta à l'Académie une Carte qu'il avoit dreſſée du Golphe de Méxique & des Iſles de l'Amérique. Cette partie du Nouveau Monde eſt la plus fréquentée par les Navigateurs François, & les erreurs des Cartes en deviennent d'autant plus dangéreuſes. Celle de Pieter Goos, dont les Pilotes ſe ſervent ordinairement, ſe trouva par les recherches de M. Buache aſſés éloigné du vrai. Il rendoit ſenſible à l'œil par des contours d'une couleur différente combien elle différoit de la nouvelle Carte. Celle-ci différoit même aſſés conſidérablement de la Carte du Méxique de feu M. Deliſle, mais beaucoup moins de la derniére Édition en une feüille de l'Amérique du même Auteur. M. Buache faiſoit gloire d'être Diſciple de M. Deliſle, mais il avoit eu l'avantage de travailler ſur quantité de Mémoires que le Maître n'avoit pas connus. Plus on en a devant ſoi, plus on peut approcher de la vérité dans les déterminations, mais auſſi le travail ſe multiplie à proportion par le grand nombre d'attentions, de réfléxions, & de combinaiſons néceſſaires.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires

V. les M. p. 562.

Les Remarques de M. de Mairan ſur la comparaiſon de Paris & de Londres.

MECHANIQUE.

SUR LES VOÛTES.

M. COUPLET continuë la Théorie des Voûtes, qu'il n'avoit donnée en 1729 *, que dans l'hipothese purement géométrique & réellement fausse, que les Voussoirs fussent parfaitement polis. Ici il reprend la réalité, les Voussoirs s'engrénent par leurs surfaces les uns dans les autres, & il y faut même ajoûter ce qui n'est pas tout-à-fait réel, qu'ils s'engrénent de façon à ne pouvoir céder à aucune force, dont l'effet ne seroit que de faire glisser une surface sur une autre ; car la Géométrie ne peut jamais s'allier à la Méchanique, qu'en y supposant quelque chose de plus absolu & de plus précis que le vrai.

V. les M. p. 117.
* V. l'Hist. de 1729. p. 75. & suiv.

Une Voûte étant construite, dont je suppose pour plus de facilité que l'intrados & l'extrados sont deux demi-Cercles concentriques, si l'on conçoit une ligne tirée du milieu de la Clef sur un pied-droit, & qui représentera l'action ou l'effort de la Voûte sur ce pied-droit, cette ligne en cas qu'elle passe toute entiére dans l'épaisseur de la Voûte fera deux effets différents, selon l'hipothese des Voussoirs polis, ou non polis. Dans l'une & l'autre hipothese, elle est nécessairement inclinée au pied-droit, mais dans la premiére, elle fera glisser le dernier Voussoir par ce qu'elle a d'horisontal dans son effort, & le Voussoir auroit besoin d'une pesanteur infinie pour lui résister, mais dans la 2de hipothese, elle ne peut le faire glisser, & à cet égard la Voûte seroit inébranlable. Que si la ligne n'étoit pas toute entiére dans l'épaisseur de la Voûte, & qu'elle coupât le Quart de Cercle de l'intrados, il est visible que l'action de la Voûte manquant d'appui dans une

partie de ſon étenduë, & tombant, pour ainſi dire, à vuide, la Voûte ſe démentiroit aiſément.

Dans cette 2de hipotheſe où le dernier Vouſſoir ne peut gliſſer ſur le pied-droit, il ne laiſſe pas pour cela de pouvoir être renverſé du dedans de la Voûte en dehors, & c'eſt ce qu'il y a ici de plus important à expliquer.

M. Couplet partage en quatre Vouſſoirs égaux la Voûte demi-circulaire, que nous avons ſuppoſée. Il ſuffit d'en conſidérer une moitié, qui n'a donc que deux Vouſſoirs. Le 1er Vouſſoir ou le ſupérieur tend à tomber par une ligne verticale tirée de ſon centre de gravité. Cette verticale eſt la diagonale d'un parallelogramme, dont deux côtés ſont horiſontaux, & les deux autres inclinés à l'horiſon. Des deux horiſontaux, le ſupérieur ne fait que pouſſer ſelon ſa direction le 1er Vouſſoir de l'autre moitié de la Voûte, qui lui réſiſte avec un effort égal, l'horiſontal inférieur pouſſe le 2^{d} Vouſſoir ſur lequel le 1er eſt poſé, & le pouſſe de façon qu'il tend à le renverſer du dedans de la Voûte en dehors. Les deux côtés inclinés du parallelogramme n'agiſſent que par ce qu'ils ont de vertical, & par-là ne tendent qu'à affermir le 2^{d} Vouſſoir ſur le pied-droit, & par conſéquent le 1er Vouſſoir ne tend à renverſer le 2^{d} qu'autant qu'il a un effort horiſontal plus grand que le vertical. D'un autre côté le 2^{d} Vouſſoir tend à tomber en dedans de la Voûte ſelon une verticale tirée de ſon centre de gravité, & cet effort eſt contraire à celui que le 1er Vouſſoir fait contre lui. Il faut pour l'équilibre, que ces deux efforts oppoſés, ou plûtôt ces deux énergies ſoient égales, je dis *énergies*, parce que tout effort ſe rapportant à un point fixe auquel il ſe dirige, il faut conſidérer la diſtance de la direction de chaque effort à ce point fixe, ou, ce qui eſt le même, ſon bras de levier, toûjours, comme l'on ſçait, d'autant plus avantageux qu'il eſt plus long.

Une Voûte, telle qu'on l'a ſuppoſée, demande donc pour être bien conſtruite, & auſſi durable qu'elle peut l'être, que cet équilibre ſe trouve entre les deux Vouſſoirs de chacune de ſes moitiés. Il ne peut s'y trouver, ſans mettre une certaine

proportion entre les parties de la Voûte ; ſi elle eſt d'une certaine ouverture, ou pour parler plus préciſément, ſi le diametre du demi-Cercle de ſon intrados eſt d'une certaine grandeur, il faudra qu'elle ait une certaine épaiſſeur, ou que ſon intrados & ſon extrados ſoient à une certaine diſtance l'un de l'autre, & comme ce ſont ici deux demi-Cercles concentriques, cette diſtance ſera par-tout égale. Il eſt viſible qu'elle ſera en même temps la moindre qu'il ſe puiſſe, & que la Voûte n'aura que l'épaiſſeur abſolument néceſſaire, puiſque tout dépendra de l'équilibre des Vouſſoirs, qui conſiſte en un point indiviſible. M. Couplet cherche par l'Algebre quelle ſera cette épaiſſeur de la Voûte, tout le reſte étant connu, & il ne parvient à cette détermination que par des calculs qui, ſans tomber dans les grandes difficultés de l'Art, ſont cependant fort longs & fort pénibles. Si le diametre de l'intrados eſt de 28 pieds, l'épaiſſeur uniforme de la Voûte ſera de 1 pied & environ $\frac{1}{2}$.

Mais ſi on ſuppoſe que la Voûte, au lieu d'être formée de deux demi-Cercles concentriques, ou de deux arcs de 180 degrés, le ſoit de deux arcs de 120 ſeulement, & que ſon ouverture ou la corde de l'intrados ſoit encore de 28 pieds, on trouvera que l'épaiſſeur uniforme ſera beaucoup moindre, & la raiſon en eſt que les leviers par leſquels agiront les efforts des Vouſſoirs inférieurs ſeront plus longs, & que par conſéquent les poids abſolus n'auront pas beſoin d'être ſi grands, ce qui emporte une moindre épaiſſeur de la Voûte.

En effet, ſi l'on conçoit une Voûte formée de quatre Vouſſoirs, comme celles que nous conſidérons ici, mais infiniment platte, de ſorte que l'étendüe, tant de l'intrados, que de l'extrados, ſoit égale à la corde de l'intrados, à 28 pieds, ſi l'on veut, & ſi l'on conçoit encore dans les Vouſſoirs les mêmes efforts que dans les précédents, on verra ſans peine que ces efforts rapportés à leurs points fixes, agiront par des bras de levier plus longs qu'en toute autre ſuppoſition, & que ſi on vient à courber l'intrados & l'extrados en augmentant leur longueur, mais en conſervant l'ouverture ou corde

de 28 pieds, les bras de leviers s'accourciront toûjours, à mesure que la courbure sera plus grande. De deux Voûtes, qui, sur une même ouverture ou corde de l'intrados, ont l'une 120 degrés, l'autre 180, la premiére est certainement la plus platte, ou la moins courbe, donc c'est celle où les efforts agiront par les plus longs bras de leviers, & où la pesanteur absoluë des Voussoirs devra être la moindre.

Une Voûte peu épaisse en paroîtra plus hardie, & pourra faire plus d'honneur à l'Architecte; cependant M. Couplet avertit que ce n'est pas là une gloire dont il faille trop se picquer. Quand une Voûte est mince, les efforts des Voussoirs agissent trop près de sa surface extérieure, où ils ont nécessairement leurs points d'appui, ils tendent à écraser les arrêtes des Voussoirs, & les écrasent à la fin, d'où s'ensuit la ruine de la Voûte, du moins en partie. Ainsi par rapport à cet inconvénient, & pour éloigner de la surface extérieure les appuis des efforts, & les mettre en lieu de sûreté, il faut une plus grande épaisseur de Voûte que celle que demandoit précisément l'équilibre, & M. Couplet va jusqu'à la tripler.

Avec la Théorie qu'il a en main, il résout quelques autres Problemes, il détermine, par exemple, quelle est dans l'hipothese presente de l'engrénement, la poussée horisontale d'une Voûte, comment on peut diriger vers un point donné de la base du pied-droit l'effort total résultant de tous les efforts particuliers, &c. On voit assés comment tout cela se lie, soit avec ce qui a été dit ici, soit avec les Théories précédentes de M. Couplet, qui paroît s'être mis particuliérement en possession de ces sortes de sujets.

SUR LE MOUVEMENT DES EAUX.

V. les M. p. 536.

CEUX qui ont quelque idée de la Méchanique, qui regarde les Eaux, ne seront pas étonnés qu'après ce que nous en avons dit en 1725*, en 1727*, & en 1729* pour exposer les vûës de M. Pitot, nous y revenions encore sur les pas du même Auteur, il y aura toûjours lieu à de

* p. 80. & suiv.
* p. 137. & suiv.
* p. 81. & suiv.

nouveaux éclairciſſements ſur cette matiére, à meſure qu'on s'y appliquera davantage, & on s'y eſt appliqué plus que jamais dans ces derniers temps à cauſe de l'utilité que quelques Méchaniciens en ont attendüe.

On ſçait par expérience qu'un Corps peſant qu'on laiſſe tomber librement dans l'air y parcourt 14 pieds dans la 1.re Seconde de ſa chûte, les eſpaces des Secondes ſuivantes ſe trouveront aiſément par le ſyſtême de Galilée. Tout le monde ſçait que ſelon le même ſyſtême, ſi ce Corps qui par un mouvement accéléré eſt tombé de 14 pieds en une Seconde vient enſuite à ſe mouvoir d'un mouvement uniforme avec cette vîteſſe acquiſe à la fin de ſa chûte, il parcourra en chaque Seconde le double du premier eſpace, c'eſt-à-dire, 28 pieds. On ſçait encore que la vîteſſe acquiſe à la fin d'une chûte eſt proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur d'où le Corps eſt tombé, ou, ce qui eſt le même, s'exprime par cette racine. Donc la racine de 14 exprime la vîteſſe acquiſe à la fin de la 1re Seconde par le Corps dont le mouvement s'eſt toûjours accéléré, & 28 exprime la vîteſſe qu'il auroit pendant chaque Seconde, s'il prenoit un mouvement uniforme dont la vîteſſe fût égale à celle du dernier inſtant de ſa chûte.

Ce rapport de la racine de 14 & de 28 n'eſt pas ſeulement pour une chûte faite en une Seconde, il ſe retrouvera encore dans toutes les autres. Que le Corps ſoit tombé pendant 2 Secondes, il aura parcouru 4 fois 14 pieds, & la racine de cette nouvelle hauteur d'où il ſera tombé eſt 2 fois la racine de 14. D'un autre côté ſa vîteſſe acquiſe à la fin de la nouvelle chûte ſera double de la vîteſſe de la premiére; donc la vîteſſe uniforme, qu'on ſuppoſe toûjours qu'il prendra, ſera 2 fois 28. Or 2 racines de 14, & 2 fois 28 ont le même rapport que la racine de 14 & 28. Il en ira de même ſi le Corps tombe pendant 3 Secondes, pendant 4, &c. Donc la Regle de M. Pitot eſt vraye, que la vîteſſe acquiſe par une chûte faite d'une hauteur quelconque, ou, ce qui eſt le même, la racine de cette hauteur eſt à la vîteſſe

uniforme que le Corps prendroit enſuite, comme la racine de 14 à 28.

De-là il ſuit évidemment que ſi une Eau qui eſt tombée d'une hauteur quelconque vient enſuite à couler horiſontalement ou à peu près, & par conſéquent d'un mouvement uniforme, le quarré de ſa vîteſſe uniforme eſt égal à 56 fois la hauteur d'où elle eſt tombée. On voit aſſés tout ce qui ſe peut tirer de cette formule générale.

On conçoit toûjours que la quantité de l'Eau qui ſort, ou plus préciſément, tombe d'un Réſervoir ou d'un Tuyau, eſt plus grande en même raiſon que ſa vîteſſe, qui dépend de la hauteur d'où elle tombe, eſt plus grande, & de-là vient que ſi on oppoſe à cette eau tombante une ſurface perpendiculaire à la direction de ſa chûte, elle fait ſur cette ſurface une impreſſion, qui eſt ſelon le quarré de ſa vîteſſe. Mais, ce qu'on n'auroit peut-être pas crû, cette propoſition reçûë de tous les Méchaniciens n'eſt vraye qu'avec une modification, tant ces matiéres là ſont délicates, & tant en général toutes celles qui ſont éxaminées de près le deviennent. Si on prend l'eau à ſa ſortie du Réſervoir ou du Tuyau, & qu'on lui oppoſe une ſurface, la propoſition ſera exactement vraye, & la quantité d'eau d'autant plus grande que ſa vîteſſe à ſa ſortie ſera plus grande. Si on ne lui oppoſe la ſurface que plus loin de l'ouverture par où elle ſort, ſa vîteſſe ſera certainement plus grande puiſqu'elle ſe ſera toûjours accélérée hors du tuyau, & d'autant plus que l'eſpace parcouru dans l'air aura été plus grand, cependant il eſt certain auſſi que la quantité d'eau ne ſera pas plus grande dans ce 2d cas que dans le 1er, & ce qui le prouve bien évidemment, c'eſt que ſi après une certaine quantité d'eau écoulée, on fermoit l'ouverture du tuyau, cette eau qui en ſeroit ſortie accéléreroit toûjours ſa vîteſſe dans l'air, & n'en ſeroit pas en plus grande quantité. Que ſi on ſuppoſoit le tuyau prolongé juſqu'au point où ſe terminoit la chûte de l'eau dans l'air, alors la quantité d'eau redeviendra proportionnelle à ſa derniére vîteſſe. Quelle eſt cette biſarrerie apparente ? Quelle eſt, comme

comme dit M. Pitot, la vertu des parois du tuyau pour rendre la quantité d'eau plus grande! Voici le dénoüement qu'on peut donner à cette difficulté.

La quantité d'eau n'est plus grande à raison de la vîtesse que quand l'eau se meut d'un mouvement uniforme, & non quand elle se meut d'un mouvement accéléré, car il est visible que pour lui faire parcourir plus vîte un certain espace dans un certain temps, le mouvement accéléré ne touche point à sa quantité, & la laisse telle qu'elle étoit, au lieu que pour le même effet il est impossible que le mouvement uniforme ne fasse augmenter sa quantité. Or tant que l'eau se meut dans le tuyau, elle a un mouvement uniforme, & tombe comme un cilindre d'eau continu dont les parties supérieures & inférieures n'ont que la même vîtesse, ainsi que nous l'avons dit plus au long en 1703*. Mais quand elle est sortie du tuyau elle a un mouvement accéléré. La conséquence s'offre d'elle-même. Nous pouvons remarquer ici en passant que quoique l'eau ne se meuve dans le tuyau que d'un mouvement uniforme, sa vîtesse à la sortie est la même que si elle y avoit eu un mouvement accéléré, & que celui qu'elle a ensuite en tombant dans l'air est le même que s'il étoit la continuation d'un mouvement accéléré précédent dans le tuyau.

* p. 125. & 126. 2de Édit.

Sur ce fondement M. Pitot ne manque pas d'avertir que quand il sera question de calculer la force d'une eau qui étant sortie d'un réservoir aura parcouru quelque espace dans l'air avant que de choquer une surface, on se trompera, si, comme il pourroit arriver fort naturellement, on suppose sa quantité proportionnelle à la derniére vîtesse acquise par sa chûte, on trouvera la force plus grande qu'elle ne l'est effectivement, & afin que ce calcul soit bon il faut prendre l'eau à sa sortie du réservoir, ou si proche que la différence puisse être négligée.

Après tout cela, M. Pitot applique sa Théorie aux Riviéres. Pour les considérer géométriquement, il faut supposer d'abord des choses qui ne se trouvent pas dans la réalité, que leurs lits

ſont formés de trois plans droits & uniformes, l'un inférieur incliné à l'Horiſon, les deux autres verticaux, que l'inclinaiſon de l'inférieur eſt par tout la même, & qu'enfin une Riviére n'en reçoit point d'autre. Voici ce qui s'enſuivroit de ces hipothéſes.

1.° Il ſeroit très-aiſé de trouver quelle ſeroit la derniére vîteſſe de la Riviére, celle avec laquelle elle ſe préſenteroit pour entrer dans la Mer, pourvû que l'on connût la pente ou l'inclinaiſon de ſon lit. Cette vîteſſe ſeroit exprimée par la racine de la hauteur qu'auroit la ſource de la Riviére à l'égard du niveau de la Mer.

2.° Comme la vîteſſe des Riviéres s'accéléreroit toûjours, elles ne demanderoient toûjours qu'un lit moins large, parce que la même quantité d'eau mûe plus vîte peut paſſer dans un temps égal par un eſpace plus étroit, & comme elles ſe font leurs lits elles-mêmes, elles n'en auroient donc que d'ainſi conditionnés.

Ceci n'eſt point contraire à ce qui a été dit ci-deſſus, que le mouvement accéléré n'augmentoit point la quantité d'eau. Il s'agiſſoit d'un mouvement vertical, ici c'eſt un mouvement incliné, dans la compoſition duquel entre l'horiſontal uniforme auſſi-bien que le vertical accéléré. Comme ils ſont liés enſemble, l'horiſontal devient plus grand avec le vertical.

3.° Ce qu'on a dit de la largeur des lits, il faut le dire de la profondeur, elle diminuëroit toûjours.

4.° Les Riviéres ſeroient toûjours plus étroites, moins profondes, & plus rapides à meſure qu'elles avanceroient dans leur cours.

Heureuſement pour nous, c'eſt le contraire dans la nature. Les Riviéres ſeroient très-peu navigables, ſoit à cauſe de leur trop grande rapidité, ſoit à cauſe du peu de profondeur. Les inégalités tant de leurs bords que de leur fond, les frottements qu'elles y ſouffrent, rallentiſſent beaucoup la vîteſſe qu'elles auroient naturellement, & dans l'état, pour ainſi dire, géométrique. Nous avons expliqué dans un aſſés grand détail en 1710* comment elles élargiſſent néceſſairement leur

* p. 159. & ſuiv.

lit, & en même temps le creusent de maniére à en rendre le fond presque horisontal.

M. Pitot ajoûte une nouvelle considération, c'est l'entrée des Riviéres dans la Mer. En supposant une surface plane mise entre deux fluides qui la poussent avec des directions contraires, & des vîtesses inégales, il est certain qu'elle entrera avec une certaine vîtesse dans le fluide dont la vîtesse est la moindre, il trouve l'expression algébrique de la vîtesse de la surface; c'est la même que celle d'un fleuve plus rapide qui entreroit dans un plus lent, dont le cours seroit directement opposé. Mais comme la Mer n'a point de cours, il faut supposer nulle la vîtesse moindre du second fleuve, & alors la formule donne précisément pour la vîtesse du fleuve qui entre dans la Mer, la moitié de celle qu'il avoit quand il a rencontré la Mer.

Quand un fleuve est arrivé de sa source au quart de son cours, il a, selon le sistême de Galilée, la moitié de la derniére vîtesse qu'il aura à son embouchûre. Donc, suivant ce qui vient d'être dit, il a la même vîtesse, & au quart de son cours, & à l'extrémité, donc il ne peut pas y avoir grande variation dans tout l'entre-deux, le cours devient assés horisontal, & le mouvement assés uniforme. La Mer est un obstacle qui attend toûjours le fleuve, arrête & suspend ses eaux jusqu'à un certain point, & a une espece d'effet rétroactif qu'il n'est pas difficile de comprendre.

MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE EN M. DCCXXX.

I.

UNE espece de Martinet de Forge présenté par M. Compagnot, pesant 300 livres, que deux Hommes élévent assés facilement, par la disposition des pieces de la

Machine, & qui retombe enſuite par ſon propre poids. On a trouvé aſſés ingénieuſe la maniére dont la force des Hommes eſt appliquée, auſſi-bien que celle dont agiſſent deux Etriers de fer, qui engagent & laiſſent échapper alternativement le Martinet. Le reſte a paru conforme à la plûpart des Machines où l'on employe le ſecours des Hommes. On a crû que cette Machine pourroit être utile dans les endroits où il eſt abſolument impoſſible de ſe ſervir du cours des Riviéres, mais non pas pour élever des Eaux, ou faire mouvoir différents Moulins.

II.

Une Machine Arithmétique de M. de Boiſſendeau, qui a aſſûré qu'il ne connoiſſoit point celle de M. Paſcal, & qui étoit effectivement aſſés jeune pour n'en avoir pas encore entendu parler. On a trouvé beaucoup de génie & d'induſtrie dans l'invention & dans l'execution. Les mouvements ſont ſimples & doux. Les opérations arithmétiques ſe font ſans qu'il ſoit beſoin de rien écrire, on pourroit même opérer ſur toutes ſortes de fractions au moyen d'un changement de Roüe aiſé à faire ſur le champ.

III.

Un Flambeau ou Chandelier préſenté par Melle du Château, dont la Bobéche eſt garnie d'un fond mobile, qui ſe hauſſe ou ſe baiſſe, en faiſant tourner la tige briſée, qui y eſt adaptée, le tout pour pouſſer à volonté la Chandelle que l'on y enfonce, ſoit pour l'en ôter aiſément, ſoit pour la faire brûler juſqu'au bout. Quoique l'on ait déja appliqué la même Méchanique à des Canifs, & autres Outils pour un ſemblable uſage, ce Chandelier a paru ſimple, & utile.



ÉLOGE
DE M. DE VALINCOURT.

JEAN-BAPTISTE HENRY DU TROUSSET DE VALINCOURT, nâquit le 1 Mars 1653, de Henry du Trousset, & de Marie du Pré, sa famille étoit noble & honorable, originaire de St Quentin en Picardie. Ayant perdu son Pere à l'âge de 6 ou 7 ans, il demeura entre les mains d'une Mere propre à remplir seule tous les devoirs de l'éducation de ses Enfants.

Il ne brilla point dans ses Classes, ce Latin & ce Grec qu'on y apprend n'étoient pour lui que des sons étrangers, dont il chargeoit sa mémoire, puisqu'il le falloit; mais ses humanités finies, s'étant trouvé un jour seul à la Campagne avec un Térence pour tout amusement, il le lût d'abord avec assés d'indifférence, & ensuite avec un goût, qui lui fit bien sentir ce que c'étoit que les belles Lettres. Il n'avoit point été picqué de cette vanité si naturelle de surpasser ses compagnons d'étude, sans sçavoir à quoi il étoit bon de les surpasser, mais il fut touché de la valeur réelle & solide, jusque-là inconnüe, de ce qu'on avoit proposé à leur émulation. Déja sa raison seule avoit droit de le remüer.

Il répara avec ardeur la nonchalance du temps passé, il se mit à se nourrir avidement de la lecture des bons Auteurs anciens & modernes. Il lui échappa quelques petits ouvrages en Vers, fruits assés ordinaires de la jeunesse de l'Esprit, qui est alors en sa fleur, s'il en doit avoir une. M. de Valincourt ne regardoit pas ses Vers assés sérieusement, pour en faire parade, ni même pour les desavoüer. Il a conservé jusqu'à la fin l'habitude de cette langue, qu'il ne parloit qu'à l'oreille de quelques Amis, & en badinant.

La fameuse Princesse de Cleves ayant paru, ouvrage d'une

espece qui ne peut naître qu'en France, & ne peut même y naître que rarement, M. de Valincourt en donna une Critique en 1678, non pour s'oppoſer à la juſte admiration du Public, mais pour lui apprendre à ne pas admirer juſqu'aux défauts, & pour ſe donner le plaiſir d'entrer dans des diſcuſſions fines & délicates. Ce deſſein intéreſſoit le Cenſeur à faire valoir lui-même, comme il a fait, les beautés, au travers deſquelles il avoit ſçû démêler les imperfections. Au lieu de la bile ordinaire, il répand dans ſon diſcours une gayeté agréable, & peut-être ſeulement pourroit-on croire qu'il va quelquefois juſqu'au ton de l'Ironie, qui, quoique léger, eſt moins reſpectueux pour un Livre d'un ſi rare mérite, que le ton d'une Critique ſérieuſe, & bien placée.

On répondit avec autant d'aigreur & d'amertume, que ſi on avoit eu à défendre une mauvaiſe cauſe. M. de Valincourt ne repliqua point. Les honnêtes gens n'aiment point à s'engager dans ces ſortes de combats, trop deſavantageux pour ceux qui ont les mains liées par de bonnes mœurs, & par les bienſéances, & le Public lui-même, malgré ſa malignité, ſe laſſe bien-tôt de ce ſpectacle. Après avoir vû une ou deux Joûtes, il laiſſe les deux Champions ſe battre ſur l'Aréne ſans témoins.

Un homme de mérite n'eſt pas deſtiné à n'être qu'un Critique, même excellent, c'eſt-à-dire, habile ſeulement à relever des défauts dans les productions d'autrui, impuiſſant à produire de lui-même. Auſſi M. de Valincourt ſe tourna-t-il bien vîte d'un autre côté plus convenable à ſes talents, & à ſon caractere. Il donna en 1681, la *Vie de François de Lorraine Duc de Guiſe,* petit morceau d'Hiſtoire, qui remplit tout ce qu'on demande à un bon Hiſtorien, des recherches qui, quoique faites avec beaucoup de ſoin, & priſes quelquefois dans des ſources éloignées, ne paſſent point les bornes d'une raiſonnable curioſité, une narration bien ſuivie, & animée, qui conduit naturellement le Lecteur, & l'intéreſſe toûjours, un ſtile noble & ſimple, qui tire ſes ornements du fond des choſes, ou les tire d'ailleurs bien fixement,

nulle partialité pour le Héros, qui pouvoit cependant inſpirer de la paſſion à ſon Ecrivain.

Un Avertiſſement de l'Imprimeur à la tête de ce petit Livre annonce d'autres ouvrages du même genre, & ſans doute de la même main, mais M. de Valincourt n'eut pas le loiſir de les finir, l'illuſtre Evêque de Meaux, qui ordinairement fourniſſoit aux Princes les gens de mérite dans les Lettres, dont ils avoient beſoin, le fit entrer en 1685 chés M. le Comte de Toulouſe, Amiral de France. Ce ne fut encore qu'en qualité de Gentilhomme attaché à ſa ſuite, mais quelque temps après le Sécrétariat général de la Marine étant venu à vaquer, il fut donné à M. de Valincourt. Le Prince le fit auſſi Sécrétaire de ſes Commandements, & quand S. A. S. eut le Gouvernement de Bretagne, ce fut encore un nouveau fond de travail pour le Sécrétaire, dont les occupations ſe multiplioient à proportion des dignités de ſon Maître. Ses anciennes études l'avoient préparé, ſans qu'il y pensât, à des fonctions ſi importantes, les nouvelles connoiſſances dont il eut beſoin entrérent plus aiſément, & ſe placérent mieux dans un eſprit, où elles en trouvoient déja d'autres, qu'elles n'euſſent fait dans un eſprit entiérement vuide.

Lorſqu'en 1704, M. l'Amiral gagna la Bataille de Malaga contre les Flottes Angloiſe & Hollandoiſe jointes enſemble, M. de Valincourt, qui n'étoit point Officier de Marine, & ne prétendoit nullement aux récompenſes militaires, fut toûjours à ſes côtés, juſqu'à ce qu'il eut reçû une bleſſure à la jambe de l'éclat d'un coup de Canon, qui tua un Page. Cet attachement ſi fidelle, porté juſqu'aux occaſions où il étoit ſi périlleux, & en même temps tout-à-fait inutile, avoit pour objet un Maître, qui ſçavoit ſe faire aimer, & dont la juſtice & la droiture feroient un mérite & un nom à un homme du commun. Auſſi M. de Valincourt a-t-il été honoré de la même confiance & des mêmes bontés ſans interruption, ſans trouble, ſans eſſuyer aucun orage de Cour, ſans en craindre, & cela pendant 45 ans. Cependant il n'étoit

point flateur, un Prince du même Sang lui rend hautement ce témoignage. Il eſt vrai qu'il avoit un art de dire la vérité, mais enfin il oſoit la dire, & l'adreſſe ne ſervoit qu'à rendre le courage utile. Peu à peu la néceſſité d'employer cette adreſſe diminüe, & les droits de l'homme de bien ſe fortifient toûjours.

Tout le temps, que les emplois de M. de Valincourt lui laiſſoient libre, étoit donné à des études de ſon goût, & principalement à celles qui avoient rapport à ſes emplois, car ſon devoir déterminoit aſſés ſon goût. La Marine tient à la Phiſique, & encore plus eſſentiellement aux Mathématiques, & il ne manqua pas d'ajoûter aux belles Lettres, qui avoient été ſa premiére paſſion, ces Sciences plus élevées & plus abſtraites. Ainſi il ſe trouva en état de remplir dignement une place d'Honoraire, à laquelle l'Académie le nomma en 1721. Il étoit de l'Académie Françoiſe dès 1699. Je l'ai vû dans l'une & dans l'autre, j'ai été témoin de ſa conduite, & de ſes ſentiments. Il ne croyoit pas que ce fût aſſés de voir ſon nom écrit dans les deux Liſtes, qu'il en retireroit toûjours, ſans y rien mettre du ſien, l'honneur qui lui en pouvoit revenir, que tout le reſte lui devoit être indifférent, & que des titres, qui par eux-mêmes laiſſent une grande liberté, laiſſoient juſqu'à celle de ne prendre part à rien. Il avoit pour ces Compagnies une affection ſincere, une vivacité peu commune pour leurs intéreſts, & en effet une Académie eſt une eſpece de Patrie nouvelle, que l'on eſt d'autant plus obligé d'aimer qu'on l'a choiſie, mais il faut convenir que ces obligations délicates ne ſont pas pour tout le monde.

Il avoit travaillé toute ſa vie à ſe faire dans une Maiſon de campagne qu'il avoit à S[t] Cloud, & où il ſe retiroit ſouvent, une Bibliotheque choiſie. Elle montoit à 6 ou 7000 Volumes, lorſqu'elle fut entiérement conſumée, il y a près de 5 ans, par le feu qui prit à la Maiſon, ſes Recüeils, fruits de toutes ſes lectures, des Mémoires importants ſur la Marine, des Ouvrages, ou ébauchés ou finis, tout périt en même temps, & il en fut le ſpectateur. La Philoſophie, qui auroit

été

été plus rigide sur une perte de biens, lui permettoit d'être sensiblement affligé de celle d'un Trésor amassé par elle-même, & où elle se complaisoit, mais son courage ne se démentit point, *je n'aurois guére profité de mes Livres,* disoit-il, *si je ne sçavois pas les perdre.* Il étoit encore soûtenu par une Philosophie bien supérieure, par la Religion, dont il fut toûjours vivement pénétré.

Vers la fin de sa vie il fut de temps en temps attaqué de diverses maladies, qui le mirent encore à de plus grandes épreuves. Enfin il mourut le 4 Janv. 1730, âgé de 77 ans.

On s'appercevoit aisément dans son commerce ordinaire qu'il étoit plein de bonnes lectures. Il en ornoit volontiers sa conversation & ses lettres, mais à propos, avec nouveauté, avec grace, conditions nécessaires, & peu observées. Un certain sel qu'il avoit dans l'esprit l'eût rendu fort propre à la raillerie, mais il s'est toûjours défendu courageusement l'usage d'un talent dangereux pour qui le possede, injuste à l'égard des autres.

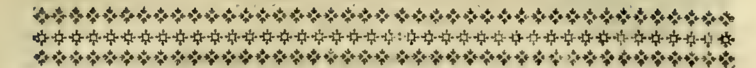
Il a été ami particulier de la plûpart de ceux qui ont brillé dans les Lettres, principalement de Mrs Racine & Despreaux, & par cette raison il fut choisi après la mort de M. Racine pour être associé à M. Despreaux dans le travail ou le dessein de l'Histoire du feu Roi. Apparemment sa liaison avec ce grand Satirique lui fit adopter quelques-uns de ses jugements, tels que celui qu'il portoit contre le premier de nos Poëtes Liriques, jugement insoûtenable sur le Parnasse, & recevable seulement dans un Tribunal infiniment plus respectable, où le Satirique lui-même n'eût pas d'ailleurs trouvé son compte. Cependant M. de Valincourt ne se laissa point emporter à l'excessive chaleur que mirent ses Amis dans des disputes littéraires, qui ont fait assés de bruit. Il continua de vivre en amitié avec ceux qui refusoient l'adoration aux Anciens, il négocia même des reconciliations, & donna des exemples rares de modération & d'équité, quoique dans une bagatelle.

Mais il n'a pas eu seulement des amis dans les Lettres, il en a eu dans les premiéres places de l'Etat, non pas simplement

comme un homme d'eſprit dont la converſation peut délaſſer, mais comme un homme d'un grand ſens, à qui on peut parler d'affaires. Il ne s'eſt jamais fait valoir de ces commerces ſi flateurs & ſi dangereux pour la vanité, il les cachoit autant qu'il étoit poſſible, & ce qu'il cachoit encore avec plus de ſoin, c'eſt l'uſage qu'il en a fait toutes les fois que la juſtice ou le mérite ont eu beſoin de ſon crédit.

Il n'étoit point marié, & joüiſſoit d'un revenu conſidérable. Sa famille publie hautement ſa générosité pour elle, & ſes bienfaits toûjours prévenants, mais elle crandroit d'offenſer ſa vertu, & d'aller contre ſes intentions, ſi elle révéloit ce qu'il a fait d'ailleurs par des motifs plus élevés.





E'LOGE
DE M. DU VERNEY.

GUICHARD-JOSEPH DU VERNEY nâquit à Feurs en Forez le 5 Août 1648 de Jacques du Verney Médecin de la même Ville, & d'Antoinette Pittre. Ses Classes faites il étudia en Médecine à Avignon pendant 5 ans, & en partit en 1667 pour venir à Paris, où il se sentoit appellé par ses talents.

A peine arrivé dans cette grande Ville, il alla chés le fameux Abbé Bourdelot, qui tenoit des Conférences de Gens de Lettres de toutes les especes. Il leur fit une Anatomie du Cerveau, & d'autres ensuite chés M. Denys sçavant Médecin, où l'on s'assembloit aussi. Il démontroit ce qui avoit été découvert par Sténon, Swammerdam, Graaf, & les autres grands Anatomistes, & il eut bien-tôt une réputation.

Outre ses connoissances déja grandes & rares par rapport à son âge, ce qui contribua beaucoup à le mettre promptement en vogue, ce fut l'éloquence avec laquelle il parloit sur ces matiéres. Cette éloquence n'étoit pas seulement de la clarté, de la justesse, de l'ordre, toutes les perfections froides que demandent les sujets dogmatiques, c'étoit un feu dans les expressions, dans les tours, & jusque dans la prononciation, qui auroit presque suffi à un Orateur. Il n'eût pas pû annoncer indifféremment la découverte d'un Vaisseau, ou un nouvel usage d'une partie, ses yeux en brilloient de joye, & toute sa personne s'animoit. Cette chaleur ou se communique aux Auditeurs, ou du moins les préserve d'une langueur involontaire, qui auroit pû les gagner. On peut ajoûter qu'il étoit jeune, & d'une figure assés agréable. Ces petites circonstances n'auront lieu, si l'on veut, qu'à l'égard d'un

certain nombre de Dames, qui furent elles-mêmes curieuses de l'entendre.

A mesure qu'il parvenoit à être plus à la mode, il y mettoit l'Anatomie, qui renfermée jusque-là dans les Ecoles de Médecine, ou à St Cosme, osa se produire dans le beau monde, présentée de sa main. Je me souviens d'avoir vû des gens de ce monde là, qui portoient sur eux des piéces séches préparées par lui, pour avoir le plaisir de les montrer dans les Compagnies, sur-tout celles qui appartenoient aux sujets les plus intéressants. Les Sciences ne demandent pas à conquerir l'Univers, elles ne le peuvent, ni ne le doivent, elles sont à leur plus haut point de gloire, quand ceux qui ne s'y attachent pas les connoissent assés pour en sentir le prix, & l'importance.

Il entra en 1676 dans l'Académie, qui ne comptoit encore que 10 années depuis son établissement. On crut réparer par lui la perte que la Compagnie avoit faite de Mrs Gayent & Pecquet, tous deux habiles Anatomistes, mais le dernier plus fameux par la découverte du Réservoir du Chile, & du Canal Thorachique. Du caractére dont étoit M. du Verney il n'avoit pas besoin de grands motifs pour prendre beaucoup d'ardeur. Il se mit à travailler à l'Histoire Naturelle des Animaux, qui faisoient alors une partie des occupations de l'Académie, & il tient beaucoup de place dans l'Histoire Latine de M. du Hamel.

Quand ceux qui étoient chargés de l'éducation de M. le Dauphin, ayeul du Roi, songerent à lui donner des connoissances de Phisique, on fit l'honneur à l'Académie de tirer de son corps ceux qui auroient cette fonction, & ce furent M. Roëmer pour les Expériences générales, & M. du Verney pour l'Anatomie. Celui-ci préparoit les parties à Paris, & les transportoit à St Germain, ou à Versailles. Là il trouvoit un Auditoire redoutable, le Dauphin environné de M. le Duc de Montausier, de M. l'Evêque de Meaux, de M. Huet depuis Evêque d'Avranches, de M. de Cordemoi, qui tous, en ne comptant pour rien les titres, quoiqu'ils

faſſent toûjours leur impreſſion, étoient fort ſçavants, & fort capables de juger même de ce qui leur eût été nouveau. Les démonſtrations d'Anatomie réüſſirent ſi bien auprès du jeune Prince, qu'il offrit quelquefois de ne point aller à la Chaſſe, ſi on les lui pouvoit continuer après ſon dîner.

Ce qui avoit été fait chés lui ſe recommençoit chés M. de Meaux avec plus d'étenduë & de détail. Il s'y aſſembloit de nouveaux Auditeurs, tels que M. le Duc de Chevreuſe, le P. de la Chaiſe, M. Dodart, tous ceux que leur goût y attiroit, & qui ſe ſentoient dignes d'y paroître. M. du Verney fut de cette ſorte pendant près d'un an l'Anatomiſte des Courtiſans, connu de tous, & preſque ami de ceux qui avoient le plus de mérite. Ses ſuccès de Paris l'avoient porté à la Cour, & il en revint à Paris avec ce je ne ſçai quoi de plus brillant que donnent les ſuccès de la Cour.

Les fatigues de ſon mêtier, très-pénible par lui-même, & plus pénible pour lui que pour tout autre, lui cauſerent un mal de Poitrine ſi violent, qu'on lui crut un Ulcere au Poumon. Il en revint cependant, bien réſolu à ſe ménager davantage à l'avenir, mais comment executer cette réſolution ? Comment réſiſter à mille choſes qui s'offroient, & qui forçoient ſes regards, & ſes recherches à ſe tourner de leur côté ? Comment leur refuſer ſes nuits, même après les jours entiers ? Souvent l'Anatomie ne ſouffre pas de délais, mais quand elle en eût ſouffert, en pouvoit-il prendre ?

En 1679 il fut nommé Profeſſeur d'Anatomie au Jardin Royal, & il alla en baſſe Bretagne pour y faire des diſſections de Poiſſons, envoyé dans cette vûë avec M. de la Hire, qui devoit avoir d'autres occupations. Ils furent envoyés tous deux l'année ſuivante ſur la Côte de Bayonne pour les mêmes deſſeins. Il entra dans une Anatomie toute nouvelle, mais il ne put qu'ébaucher la matiére, & depuis ſon retour la ſeule ſtructure des Oüies de la Carpe lui coûta plus de temps que tous les Poiſſons qu'il avoit étudiés dans ſes deux voyages.

Il mit les exercices Anatomiques du Jardin Royal ſur un

pied où ils n'avoient pas encore été. On vit avec étonnement la foule d'Ecoliers, qui s'y rendoit, & on compta en une année jusqu'à 140 Etrangers. Plusieurs d'entre eux retournés dans leurs Pays, ont été de grands Médecins, de grands Chirurgiens, & ils ont semé dans toute l'Europe le nom & les loüanges de leur Maître. Sans doute ils ont souvent fait valoir son autorité, & se sont servis du fameux, *il l'a dit*. Nous avons rapporté dans l'Eloge de M. Lémery* qu'il faisoit ici en même temps des Cours de Chimie avec le même éclat. Une Nation, qui auroit pris sur les autres une certaine supériorité dans les Sciences, s'appercevroit bientôt que cette gloire ne seroit pas stérile, & qu'il lui en reviendroit des avantages aussi réels, que d'une marchandise nécessaire & précieuse, dont elle feroit seule le commerce.

* V. l'Hist. de 1715. p. 74. & 75.

Il publia en 1683 son *Traité de l'Organe de l'Oüie*, qui fut traduit en Latin dès l'année suivante, & imprimé à Nuremberg. Cette traduction a été insérée dans la Bibliotheque Anatomique de Manget. On sera surpris que ce soit là le seul Livre qu'ait donné M. du Verney, vû le long-temps qu'il a vêcu depuis, mais quand on le connoîtra bien, on sera surpris au contraire qu'il l'ait donné. Jamais il ne se contentoit pleinement sur un sujet, & ceux qui ont quelque idée de la Nature le lui pardonneront. Il faisoit d'une partie qu'il éxaminoit toutes les Coupes différentes qu'il pouvoit imaginer pour la voir de tous les sens, il employoit toutes les Injections, & cela demande déja un temps infini, ne fût-ce qu'en tentatives inutiles. Mais il arrivoit ce qui arrive presque toûjours des discussions poussées dans un grand détail, elles ne levent guere une difficulté sans en faire naître une autre, cette nouvelle difficulté, qu'on veut suivre, produit aussi sa difficulté incidente, & on se trouve engagé dans un Labirinthe. De plus un premier travail, qui auroit voulu être continüé, est interrompu par un autre, que quelques circonstances, ou, si l'on veut, la simple curiosité rendent indispensable. Une connoissance acquise comme par hasard aura une espece d'effet rétroactif, qui détruira ou modifiera

beaucoup de connoiſſances précédentes qu'on croyoit abſolument ſûres. Ajoûtés à ce fond d'embarras, que produit la nature de l'Anatomie, une peur de ſe méprendre, une frayeur des jugements du Public, qui ne peut guere être exceſſive, & l'on concevra ſans peine qu'un très-habile Anatomiſte peut n'avoir pas imprimé. Il faut pourtant avoüer qu'un trop grand amour de la perfection, ou une trop grande délicateſſe de gloire, feront perdre au Public une infinité de vûës & d'idées, qui pour être d'une certaine utilité n'auroient pas eû beſoin d'une entiére certitude ou d'une préciſion parfaite.

M. du Verney fut aſſés long-temps le ſeul Anatomiſte de l'Académie, & ce ne fut qu'en 1684 qu'on lui joignit M. Méry *. Ils n'avoient rien de commun qu'une extrême paſſion pour la même Science & beaucoup de capacité; du reſte preſque entiérement oppoſés, ſur-tout à l'égard des talents extérieurs. Si l'on pouvoit quelquefois craindre que par le Don de la parole M. du Verney n'eût la facilité de tourner les faits ſelon ſes idées, on étoit ſûr que M. Méry ne pouvoit que ſe renfermer dans une ſévére exactitude des faits, & que l'un eût tenu en reſpect l'éloquence de l'autre. Le grand avantage des Compagnies réſulte de cet Equilibre des caractéres. On remarqua que M. du Verney prit un nouveau feu par cette eſpece de rivalité. Elle n'éclata jamais davantage que dans la fameuſe queſtion de la Circulation du ſang du Fœtus, dont nous avons tant parlé. Elle le conduiſit à examiner d'autres ſujets qui pouvoient y avoir rapport, la Circulation dans les Amphibies, tels que la Grenoüille, car le Fœtus qui vit d'abord ſans reſpirer l'air, & enſuite en le reſpirant, eſt une eſpece d'Amphibie; ceux-là le conduiſoient à d'autres animaux approchans ſans être Amphibies, comme le Crapaud, & enfin aux Inſectes, qui font un Genre à part, & offrent un ſpectacle tout nouveau.

* V. l'Hiſt. de 1722. p. 130.

Auſſi excelloit-il dans l'Anatomie comparée, qui eſt l'Anatomie priſe le plus en grand qu'il ſoit poſſible, & dans une étenduë où peu de gens la peuvent embraſſer. Il eſt vrai que pour nous & pour nos beſoins la ſtructure du Corps humain

paroîtroit ſuffire, mais on le connoît mieux, quand on connoît auſſi toutes les autres Machines faites à peu près ſur le même deſſein. Après celles-là il s'en preſente d'autres d'un deſſein fort différent, il y aura moins d'utilité à les étudier à cauſe de la grande différence, mais par cette raiſon là même la curioſité ſera plus picquée, & la curioſité n'a-t-elle pas ſes beſoins?

Dans les premiers temps de ſes exercices du Jardin Royal il faiſoit & les démonſtrations des parties qu'il avoit préparées, & les diſcours qui expliquoient les uſages, les maladies, les cures, & réſolvoient les difficultés. Mais ſa foibleſſe de poitrine, qui ſe faiſoit toûjours ſentir, ne lui permit pas de conſerver les deux fonctions à la fois. Un habile Chirurgien choiſi par lui faiſoit ſous lui les démonſtrations, & il ne lui reſtoit plus que les diſcours, dans leſquels il avoit de la peine à ſe renfermer. C'eſt lui qui a le premier enſeigné en ce lieu là l'Oſtéologie, & les maladies des Os.

De ſon Cabinet, où il avoit étudié des Cadavres & des Squelétes, il alloit dans les Hôpitaux de Paris, où il étudioit ceux dont les maux avoient rapport à l'Anatomie. Si la Machine du Corps diſſéquée & démontrée préſente encore tant d'Enigmes très-difficiles & très-obſcures, à plus forte raiſon la Machine vivante, où tout eſt ſans comparaiſon moins expoſé à la vûë, plus enveloppé, plus équivoque. C'étoit-là qu'il appliquoit ſa Théorie aux faits, & qu'il apprenoit même ce que la ſeule Théorie ne lui eût pas appris. En même temps il étoit d'un grand ſecours, & aux Malades, & à ceux qui en étoient chargés. Quoiqu'il fût Docteur en Médecine, il évitoit de s'engager dans aucune pratique de Médecine ordinaire, quelque honorable, quelque utile qu'elle pût être, il prévoyoit qu'un cas rare de Chirurgie, une opération ſinguliére, lui auroit cauſé une diſtraction indiſpenſable, & il s'acquitoit aſſés envers le Public de ſon devoir de Médecin, non-ſeulement par les inſtructions générales qu'il donnoit ſur toute l'Anatomie, mais par l'utilité dont il étoit dans les occaſions particuliéres.

Loin

Loin d'avoir rien à ſe reprocher ſur cet article, il ne ſe reprochoit que d'être trop occupé de ſa profeſſion. Il craignoit que la Religion, dont il avoit un ſentiment très-vif, ne lui permît pas un ſi violent attachement, qui s'emparoit de toutes ſes penſées, & de tout ſon temps. L'Auteur de la Nature, qu'il admiroit & reveroit ſans ceſſe dans ſes Ouvrages ſi bien connus de lui, ne lui paroiſſoit pas ſuffiſamment honoré par ce culte ſçavant, toûjours cependant accompagné du culte ordinaire le plus régulier. L'âge qui s'avançoit, les infirmités qui augmentoient, contribuoient peut-être à ce ſcrupule, ſans lui donner pourtant le pouvoir de s'y livrer entiérement.

Les mêmes raiſons l'empêcherent pendant pluſieurs années de paroître à l'Académie. Il demanda à être Vétéran, & ſa place fut remplie par M. Petit Docteur en Médecine. Il paroiſſoit avoir oublié l'Académie, lorſque tout d'un coup il ſe réveilla à l'occaſion de la réïmpreſſion de l'Hiſtoire Naturelle des Animaux, à laquelle il avoit eu anciennement beaucoup de part. Il reprit à 80 ans des forces, de la jeuneſſe pour revenir dans nos Aſſemblées, où il parla avec toute la vivacité qu'on lui avoit connüe, & qu'on n'attendoit plus. Une grande paſſion eſt une eſpece d'Ame, immortelle à ſa maniére, & preſque indépendante des Organes.

Il ne perdoit aucun des intervalles que lui laiſſoient des ſouffrances, qui redoubloient toûjours, & qui le mirent pluſieurs fois au bord du tombeau. Il revoyoit avec M. Vinſlou ſon Traité de l'Oreille dont il vouloit donner une 2de Edition, qui ſe ſeroit bien ſentie des acquiſitions poſtérieures. Il avoit entrepris un Ouvrage ſur les Inſectes, qui l'obligeoit à des ſoins très-pénibles; malgré ſon grand âge, par exemple, il paſſoit des nuits dans les endroits les plus humides du Jardin, couché ſur le ventre ſans oſer faire aucun mouvement, pour découvrir les allures, la conduite des Limaçons, qui ſemblent en vouloir faire un ſecret impénétrable. Sa ſanté en ſouffroit, mais il auroit encore plus ſouffert de rien négliger. Il mourut le 10 Sept. 1730, âgé de 82 ans.

Il étoit en commerce avec les plus grands Anatomistes de son temps, Malpighi, Ruysch, Pitcarne, Bidloo, Boerhave. J'ai vû les Lettres qu'il en avoit reçûës, & je ne puis m'empêcher d'en traduire ici une de Pitcarne écrite en Latin, datée de l'an 1712, à cause de son caractére singulier.

Très-illustre du Verney, voici ce que t'écrit un homme qui te doit beaucoup, & qui te rend graces de ces discours divins, qu'il a entendus de toi à Paris il y a 30 ans. Je te recommande Thomson mon ami, & Ecossois. Je t'envoyerai bien-tôt mes Dissertations où je résoudrai ce Probléme, Une Maladie étant donnée trouver le Remède. *A Edimbourg,* &c. Celui qui s'élévoit à de pareils Problémes, & dont effectivement le nom est devenu si célébre, se faisoit honneur de se reconnoître pour Disciple de M. du Verney. On voit de plus par des Lettres de 1698 que lui qui auroit pû instruire parfaitement dans l'Anatomie un frere qu'il avoit, il l'envoyoit d'Angleterre à Paris, pour y étudier sous le plus grand Maître.

En général il paroît par toutes ces Lettres que la réputation de M. du Verney étoit très-brillante chés les Etrangers, non-seulement par la haute idée qu'ils remportoient de sa capacité, mais par la reconnoissance qu'ils lui devoient de ses maniéres obligeantes, de l'intérêt qu'il prenoit à leurs progrès, de l'affection dont il animoit ses Leçons. Ceux qui lui adressoient de nouveaux Disciples, ne lui demandoient pour eux que ce qu'ils avoient éprouvé eux-mêmes. Ils disent tous que son Traité de l'Oüie leur a donné une envie extrême de voir les Traités des quatre autres Sens qu'il avoit promis dans celui-là, ils l'exhortent souvent à faire part à tout le Public de ses richesses, qu'il ne peut plus tenir cachées après les avoir laissé appercevoir dans ses Discours du Jardin Royal, ils le ménacent du péril de se les voir enlever par des gens peu scrupuleux, & on lui cite même un exemple où l'on croit le cas déja arrivé, mais il a toûjours été ou peu sensible à ce malheur, ou trop irrésolu à force de sçavoir.

On lui donne assés souvent dans ces Lettres une première

place entre tous les Anatomiſtes. Il eſt vrai que dans ce qu'on écrit à un homme illuſtre, il y entre d'ordinaire du compliment, on peut mettre à un haut rang celui qui n'eſt pas à un rang fort haut, mais on n'oſe pas mettre au premier rang celui qui n'y eſt pas; la loüange eſt trop déterminée, & on ne pourroit ſauver l'honneur de ſon jugement.

Il eſt du devoir de l'Académie de publier un bien-fait qu'elle a reçû de lui. Il lui a légué par ſon Teſtament toutes ſes préparations Anatomiques, qui ſont & en grand nombre, & de la perfection qu'on peut imaginer. Cela joint à tous les Squelétes d'Animaux rares, que la Compagnie a depuis long-temps dans une Salle du Jardin Royal, compoſera un grand Cabinet d'Anatomie, moins eſtimable encore par la curioſité, que par l'utilité dont il ſera dans les recherches de ce genre.



E'LOGE

DE M. LE COMTE MARSIGLI.

LOÜIS FERDINAND MARSIGLI nâquit à Bologne le 10 Juillet 1658 du Comte Charles François Marſigli, iſſu d'une ancienne Maiſon Patricienne de Bologne, & de la Comteſſe Marguerite Cicolani. Il fut élevé par ſes parents ſelon qu'il convenoit à ſa naiſſance, mais il ſe donna à lui-même, quant aux Lettres, une éducation bien ſupérieure à celle que ſa naiſſance demandoit. Il alla dès ſa premiére jeuneſſe chercher tous les plus illuſtres Sçavants d'Italie, il apprit les Mathématiques de Geminiano Montanari, & d'Alphonſe Borelli, l'Anatomie de Marcel Malpighi, l'Hiſtoire Naturelle des obſervations que ſon génie lui fourniſſoit dans ſes voyages.

Mais ils euſſent été trop bornés, s'ils ſe fuſſent renfermés dans l'Italie. Il alla à Conſtantinople en 1679 avec le Bayle que Veniſe y envoyoit. Comme il ſe deſtinoit à la Guerre, il s'informa, mais avec toute l'adreſſe, & les précautions néceſſaires, de l'état des Forces Ottomanes, & en même temps il examina en Philoſophe le Boſphore de Thrace, & ſes fameux Courants. Il écrivit ſur l'un & l'autre de ces deux ſujets. Le Traité du Boſphore parut à Rome en 1681 dédié à la Reine Chriſtine de Suede, & c'eſt le premier qu'on ait de lui. L'autre intitulé *Del incremento e decremento dell' Imperio Ottomano* doit paroître préſentement imprimé à Amſterdam avec une traduction Françoiſe.

Il revint de Conſtantinople dès l'an 1680, & peu de temps après, lorſque les Turcs menaçoient d'une irruption en Hongrie, il alla à Vienne offrir ſes ſervices à l'Empereur Leopold,

qui les accepta. Il lui fut aiſé de prouver combien il étoit au deſſus d'un ſimple Soldat par ſon intelligence dans les Fortifications, & dans toute la Science de la Guerre, il fit avec une grande approbation des Généraux des Lignes & des travaux ſur le Rab pour arrêter les Turcs, & il en fut récompenſé par une Compagnie d'Infanterie en 1683, quand les Ennemis parurent pour paſſer cette Riviére. Ce fut là qu'après une action aſſés vive, il tomba bleſſé & preſque mourant entre les mains des Tartares, le 2 Juillet, jour de la Viſitation; ce n'eſt pas ſans raiſon que nous ajoûtons le nom de cette Fête à la datte du jour. Il a fait de ſa captivité une Relation, où il a bien ſenti que l'art n'étoit point néceſſaire pour la rendre touchante. Le Sabre toûjours levé ſur ſa tête, la mort toûjours préſente à ſes yeux, des traitements plus que barbares, qui étoient une mort de tous les moments, feront frémir les plus impitoyables, & l'on aura ſeulement de la peine à concevoir comment ſa jeuneſſe, ſa bonne conſtitution, ſon courage, la réſignation la plus Chrétienne, ont pû réſiſter à une ſi affreuſe ſituation. Il ſe crut heureux d'être acheté par deux Turcs, freres, & très-pauvres, avec qui il ſouffrit encore beaucoup, mais plus par leur miſere que par leur cruauté, il comptoit qu'ils lui avoient ſauvé la vie. Ces maîtres ſi doux le faiſoient enchaîner toutes les nuits à un Pieu planté au milieu de leur chétive cabane, & un troiſiéme Turc, qui vivoit avec eux, étoit chargé de ce ſoin.

Enfin, car nous ſupprimons beaucoup de détails, quoiqu'intéreſſants, il trouva moyen de donner de ſes nouvelles en Italie, & de ſe faire racheter, & le jour de ſa liberté fut le 25 Mars 1684, jour de l'Annonciation. Ses réfléxions ſur ces deux dattes de ſa captivité & de ſa délivrance ſont la plus remarquable partie de ſon Eloge, puiſqu'elles découvrent en lui un grand fonds de piété. Il conçut, & ce ſont ici ſes paroles, que dans deux jours où l'auguſte Protectrice des Fidelles eſt particuliérement honorée, elle lui avoit obtenu deux graces du Ciel, l'une conſiſtoit à le punir ſalutairement

de ſes fautes paſſées, l'autre à faire ceſſer la punition.

Remis en liberté, il alla à Bologne ſe montrer à ſes Concitoyens, qui avoient pleuré ſa mort, & qui verſerent d'autres larmes en le revoyant, & après avoir joüi de toutes les douceurs d'une pareille ſituation, il retourna à Vienne ſe préſenter à l'Empereur, & reprendre ſes emplois militaires. Il fut chargé de fortifier Strigonie, & quelques autres Places, & d'ordonner les travaux néceſſaires pour le Siége de Bude, que méditoient les Impériaux. Il eut part à la conſtruction d'un Pont ſur le Danube, ce qui lui donna occaſion d'obſerver les ruines d'un ancien Pont de Trajan ſur ce même Fleuve. Il fut fait Colonel en 1689.

En cette même année l'Empereur l'envoya deux fois à Rome pour faire part aux Papes Innocent XI & Aléxandre VIII des grands ſuccès des armes Chrétiennes, & des projets formés pour la ſuite.

Lorſqu'après une longue guerre, funeſte aux Chrétiens mêmes, qui en remportoient l'avantage, l'Empereur & la République de Veniſe d'une part, & de l'autre la Porte, vinrent à ſonger à la Paix, & qu'il fut queſtion d'établir les Limites entre les Etats de ces trois Puiſſances, le Comte Marſigli fut employé par l'Empereur dans une affaire ſi importante, & comme un homme de guerre qui connoiſſoit ce qui fait une bonne Frontiére, & comme un Sçavant bien inſtruit des anciennes poſſeſſions, & comme un habile Négociateur, qui ſçauroit faire valoir des droits. Se trouvant ſur les confins de la Dalmatie Vénitienne, il reconnut à quelque diſtance de-là une Montagne, au pied de laquelle habitoient les deux Turcs, dont il avoit été Eſclave. Il fit demander dans le pays Turc s'ils vivoient encore, & heureuſement pour lui ils ſe retrouverent. Il eut le plaiſir de ſe faire voir à eux environné de Troupes qui lui obéiſſoient, ou le reſpectoient, & le plaiſir encore plus ſenſible de ſoulager leur extrême miſere, & de les combler de préſents. Il crut leur devoir encore ſa rançon, parce que l'argent qu'ils en avoient

reçû leur avoit été enlevé par le Commandant Turc ſous ce prétexte extravagant que leur Eſclave étoit un fils ou un proche parent du Roi de Pologne, qu'ils auroient dû envoyer au Grand Seigneur. Il fit encore plus pour eux, perſuadé preſque que c'étoient des Libérateurs généreux, qui pour ſon ſeul intérêt l'avoient tiré des mains des Tartares. L'emploi qu'il avoit pour régler les Limites le mettant à portée d'écrire au grand Viſir, il lui demanda pour l'un de ſes deux Turcs un Timariot, benefice militaire, & en obtint un beaucoup plus conſidérable que celui qu'il demandoit. Sa générofité fut ſentie par ce Viſir, comme on auroit pû ſouhaiter qu'elle le fût par le premier Miniſtre de la Nation la plus polie, & la plus exercée à la vertu.

Les différentes opérations d'une Guerre très-vive, ſuivies de toutes celles qui furent néceſſaires par un reglement de Limites, doivent ſuffire pour occuper un homme tout entier. Cependant au milieu de tant de tumulte, d'agitation, de fatigues, de périls, M. Marſigli fit preſque tout ce qu'auroit pû faire un Sçavant, qui auroit voyagé tranquillement pour acquerir des connoiſſances. Les armes à la main, il levoit des Plans, déterminoit des poſitions par les méthodes Aſtronomiques, meſuroit la vîteſſe des Riviéres, étudioit les Foſſiles de chaque Pays, les Mines, les Métaux, les Oiſeaux, les Poiſſons, tout ce qui pouvoit mériter les regards d'un homme qui ſçait où il les faut porter. Il alloit juſqu'à faire des Epreuves Chimiques, & des Anatomies. Le temps bien ménagé eſt beaucoup plus long que n'imaginent ceux qui ne ſçavent guere que le perdre. Le mêtier de la Guerre a des vuides fréquents, & quelquefois conſidérables, abandonnés ou à une oiſiveté entiére, ou à des plaiſirs qu'on ſe rend témoignage d'avoir bien mérités. Ces vuides n'en étoient point pour le Comte Marſigli, il les donnoit à un mêtier preſque auſſi noble, à celui de Philoſophe & d'Obſervateur, il les rempliſſoit comme auroit fait Xénophon. Il amaſſa un grand Recüeil, non-ſeulement d'Ecrits, de Plans, de Cartes,

mais encore de curiosités d'Histoire Naturelle.

La succession d'Espagne ayant rallumé en 1701 une Guerre qui embrasa l'Europe, l'importante Place de Brisac se rendit par capitulation à feu Mgr le Duc de Bourgogne le 6 Septembre 1703, après 13 jours de Tranchée ouverte. Le Comte d'Arco y commandoit, & sous lui M. Marsigli, parvenu alors au grade de Général de Bataille. L'Empereur, persuadé que Brisac avoit été en état de se défendre, & qu'une si prompte capitulation s'étoit faite contre les regles, nomma des Juges pour connoître de cette grande affaire. Ils prononcérent le 4 Fév. 1704 une Sentence par laquelle le Comte d'Arco étoit condamné à avoir la tête tranchée, ce qui fut executé le 18 du même mois, & le Comte Marsigli à *être déposé de tous honneurs & charges, avec la rupture de l'Epée.* Un coup si terrible lui dut faire regretter l'esclavage chés les Tartares.

Il est presque impossible que de pareils coups fassent la même impression sur le coupable, & sur l'innocent; l'un est terrassé malgré lui-même par le témoignage de sa conscience, l'autre en est soutenu & relevé. Il alla à Vienne pour se jetter aux pieds de l'Empereur, & lui demander la révision du procès, mais il ne put en huit mois approcher de S. M. I. Grace en effet très-difficile à obtenir du Prince le plus juste, à cause des conséquences, ou dangereuses, ou tout au moins desagréables. Il eut donc recours au Public, & remplit l'Europe d'un grand Mémoire imprimé pour sa justification. Par bonheur pour lui un Anonime, & ce ne fut qu'un Anonime, y répondit, ce qui lui donna lieu de lever jusqu'aux moindres scrupules, que son Apologie auroit pû laisser. Le fond en est que long-temps avant le Siége de Brisac il avoit représenté très-instamment que la Place ne pourroit se défendre, & il le fait voir par les Etats de la Garnison, des Munitions de guerre, &c. Piéces dont on ne lui a pas contesté la vérité. On lui avoit refusé, sous prétexte d'autres besoins, tout ce qu'il avoit demandé de plus nécessaire & de plus indispensable.

ſable. Il n'étoit point le Commandant, & il n'avoit fait que ſe ranger à l'avis entiérement unanime du Conſeil de Guerre. Mais cette grande briéveté, à laquelle nous ſommes obligés de réduire ſes raiſons, lui fait tort, & il vaut mieux nous contenter de dire, que le Public, qui ſçait ſi bien faire entendre ſon jugement ſans le prononcer en forme, ne ſouſcrivit pas à celui des Commiſſaires Impériaux. Les Puiſſances mêmes alliées de l'Empereur, intéreſſées par conſéquent à la conſervation de Briſac, reconnurent l'innocence du Comte Marſigli, & la Hollande nommément permit qu'on en rendît témoignage dans des E'crits qui furent publiés. Parmi tous ces ſuffrages favorables, nous en avons encore un à compter, qui n'eſt à la vérité que celui d'un particulier, mais ce particulier eſt M. le Maréchal de Vauban, dont l'autorité auroit pû être oppoſée, s'il l'eût fallu, à celle de toute l'Europe, comme l'autorité de Caton à celle des Dieux. Sur le fond de toute cette affaire, il parut généralement qu'on avoit voulu au commencement d'une grande Guerre donner un exemple effrayant de ſévérité, dont on prévoyoit le beſoin dans beaucoup d'autres occaſions pareilles ; la Morale des E'tats ſe réſout pour de ſi grands intérêts à haſarder le ſacrifice de quelques Particuliers.

M. Marſigli envoya en 1705, toutes ſes piéces juſtificatives à l'Académie, comme à un Corps dont il ne vouloit pas perdre l'eſtime, & il eſt remarquable dans la Lettre qu'il lui écrivit, qu'après avoir parlé en peu de mots de ſa malheureuſe ſituation, il ne penſe plus qu'à des projets d'Ouvrages, & les expoſe aſſés au long, principalement l'idée qu'il avoit d'établir le véritable cours de la Ligne de Montagnes, qui commence à la Mer noire, va parallelement au Danube juſqu'au Mont St Gothard, & continüe juſqu'à la Méditerranée.

Dans l'impreſſion de ſes Apologies, il met pour Vignette une eſpece de Deviſe ſinguliére, qui a rapport à ſon avanture. C'eſt une *M*, premiére lettre de ſon nom, qui porte de part

& d'autre entre ſes deux jambes les deux tronçons d'une Epée rompüe, avec ces mots, *fractus integro.* Eût-il imaginé, eût-il publié cette repréſentation affligeante, s'il ſe fût crû flétri, & n'eût-il pas crû l'être, ſi la voix publique ne l'eût pleinement raſſûré ?

Il chercha ſa conſolation dans les Sciences, dont il s'étoit ménagé le ſecours, ſans prévoir qu'il lui dût être un jour ſi néceſſaire. Ce qui n'avoit été pour lui qu'un Lieu de plaiſance devint un Aſile. Il conſerva la pratique d'étudier par les voyages, dont il avoit contracté l'habitude, & c'eſt réellement la meilleure pour l'Hiſtoire Naturelle, qui étoit ſon grand objet. Il alla en Suiſſe, où la Nature ſe preſente ſous un aſpect ſi différent de tous les autres, & ce Pays l'intéreſſoit particuliérement parce qu'il vouloit faire un Traité de la Structure organique de la Terre, & que les Montagnes ſont peut-être des eſpeces d'Os de ce grand Corps. Il vint enſuite à Paris, où il ne trouva pas moins de quoi exercer ſa curioſité, quoique d'une maniére différente ; de-là il parcourut la France, & s'arrêta à Marſeille pour étudier la Mer.

Etant un jour ſur le Port, il reconnut un Galérien Turc, pour être celui qui l'attachoit toutes les nuits au Pieu, dont nous avons parlé. Ce Malheureux, frappé d'un effroi mortel, ſe jetta à ſes pieds pour implorer ſa miſéricorde, qui ne devoit conſiſter qu'à ne pas ajoûter de nouvelles rigueurs à ſa miſere préſente. M. Marſigli écrivit à M. le Comte de Pontchartrain, pour le prier de demander au Roi la liberté de ce Turc, & elle fut accordée. On le renvoya à Alger, d'où il manda à ſon Libérateur qu'il avoit obtenu du Bacha des traitements plus doux pour les Eſclaves Chrétiens. Il ſemble que la Fortune imitât un Auteur de Roman, qui auroit ménagé des rencontres imprévûës & ſinguliéres, en faveur des vertus de ſon Héros.

Le Comte Marſigli fut rappellé de Marſeille en 1709, par les ordres du Pape Clément XI, qui dans les conjonctures d'alors crut avoir beſoin de Troupes, & lui en donna

le commandement, tant l'affaire de Briſac lui avoit laiſſé une réputation entiére, car la valeur & la capacité les plus réelles n'auroient pas ſuffi, il faut toûjours dans de ſemblables choix compter avec l'opinion des hommes. Quand ce commandement fut fini par le changement des conjonctures, le Pape voulut retenir M. Marſigli auprès de lui, par l'offre des emplois militaires les plus importants, dont il diſposât, & même, pour n'épargner aucun moyen, par l'offre de la Prélature, qui auroit pû le relever ſi glorieuſement, & le porter à un rang ſi haut; mais il refuſa tout pour aller reprendre en Provence les délicieuſes recherches qu'il y avoit commencées. Il en envoya à l'Académie en 1710 une aſſés ample Relation, dont nous avons rendu compte*, & la belle découverte des Fleurs du Corail y eſt compriſe. Cet Ouvrage a été imprimé à Amſterdam en 1715, ſous le titre d'*Hiſtoire Phiſique de la Mer*. Des affaires domeſtiques le rappellerent à Bologne, & là il commença l'execution d'un deſſein qu'il méditoit depuis long-temps, digne d'un homme accoûtumé au grand pendant tout le cours de ſa vie.

* V. l'Hiſt. de 1710. p. 23. 48. & 69.

Entre toutes les Villes d'Italie, Bologne eſt célébre par rapport aux Sciences, & aux Arts. Elle a une ancienne Univerſité pareille aux autres de l'Europe, une Académie de Peinture, de Sculpture, & d'Architecture, nommée *Clementine,* parce qu'elle a été établie par Clément XI, enfin une Académie des Sciences, qui s'appelle l'Académie des *Inquiets,* nom aſſés convenable aux Philoſophes modernes, qui n'étant plus fixés par aucune autorité cherchent & chercheront toûjours. Le Comte Marſigli voulut encore orner de ce côté-là ſa Patrie, quoique déja ſi ornée. Il avoit un fonds très-riche de toutes les différentes Piéces, qui peuvent ſervir à l'Hiſtoire Naturelle, d'Inſtruments néceſſaires aux obſervations Aſtronomiques, ou aux expériences de Chimie, de Plans pour les Fortifications, de Modéles de Machines, d'Antiquités, d'Armes étrangéres, &c. Le tout non-ſeulement acquis à grands frais, mais tranſporté encore à plus grands frais de

différents lieux éloignés jufqu'à Bologne, & il en fit une donation au Sénat de cette Ville par un acte authentique du 11 Janv. 1712, en formant un Corps qui eût la garde de tous les fonds donnés, & qui en fît à l'avantage du Public l'ufage reglé par les conditions du Contrat. Il nomma ce Corps *l'Inftitut des Sciences & des Arts de Bologne.* Sans doute il eut des difficultés à vaincre de la part des Compagnies plus anciennes, différents intérêts à concilier enfemble, des caprices mêmes à effuyer, mais il n'en refte plus de traces, & c'eft autant de perdu pour fa gloire, à moins qu'on ne lui tienne compte de ce qu'il n'en refte plus de traces. Il fubordonna fon Inftitut à l'Univerfité, & le lia aux deux Académies. De cette nouvelle difpofition faite avec toute l'habileté requife, & tous les ménagements néceffaires, il en réfulte certainement que la Phifique & les Mathématiques ont aujourd'hui dans Bologne des fecours & des avantages confidérables qu'elles n'y avoient jamais eûs, & dont le fruit doit fe communiquer par une heureufe contagion. Le Sénat donna à l'Inftitut un Palais, tel que le demandoient les grands fonds reçûs de M. Marfigli, qu'il falloit diftribuer en différents Appartements felon les Sciences. Dans ce Palais habitent fix Profeffeurs, chacun dans le quartier de la Science qui lui appartient. On croit voir l'Atlantide du Chancelier Bacon executée, le fonge d'un Sçavant réalifé. Il fera facile de juger qu'on n'a pas oublié un Obfervatoire. Il eft occupé par M. Euftachio Manfredi, Aftronome de l'Inftitut, fi ce n'eft pas lui faire tort que de le défigner par cette feule qualité, lui qui allie aux Mathématiques les talents qui leur font les plus oppofés.

L'Inftitut s'ouvrit en 1714 par une Harangue du P. Hercule Corazzi, Religieux Olivetan, Mathématicien de la nouvelle Compagnie. Le Comte Marfigli, qui n'avoit pas voulu permettre que fon nom parût dans aucun Monument public, ne pût échapper aux juftes loüanges de l'Orateur. Comment féparer le Fondateur d'avec la Fondation? Les loüanges

refusées sçavent bien revenir avec plus de force, & il est peut-être aussi modeste de leur laisser leur cours naturel, en ne les prenant que pour ce qu'elles valent.

En 1715 l'Académie des Sciences ayant proposé au Roi, selon sa Régle, pour une place vacante d'Associé Etranger, deux Sujets, qui furent M. le Duc d'Escalonne, Grand d'Espagne, & M. Marsigli, le Roi ne voulut point faire de choix entre eux, & il ordonna que tous deux seroient de l'Académie, parce que la premiére place d'Associé Etranger qui vaqueroit, ne seroit point remplie. N'eût-il pas sans hésiter donné la préférence à un homme du mérite & de la dignité du Duc d'Escalonne, pour peu qu'il fût resté de tache au nom de son Concurrent, & cette tache n'eût-elle pas été de l'espece la plus odieuse aux yeux de ce grand Prince? M. Marsigli étoit aussi de la Société Royale de Londres, & de celle de Montpellier. Ce n'étoit pas un honneur à négliger pour les différentes Académies que de compter parmi leurs membres le Fondateur d'une Académie.

Elle l'occupoit toûjours, & il se livroit volontiers à toutes les idées qui lui venoient sur ce sujet, quelques soins, & quelques dépenses qu'elles demandassent. Il mit sur pied une Imprimerie, qui devoit être fournie non-seulement de Caractéres Latins & Grecs, mais encore Hébreux & Arabes, & il fit venir de Hollande des Ouvriers habiles pour les fondre. Il eut des raisons pour ne pas donner ce grand fonds à l'Institut directement, mais aux Peres Dominicains de Bologne, à condition que tous les Ouvrages, qui partiroient de l'Institut seroient imprimés en remboursant seulement les frais. Il donna à cette Imprimerie le nom d'Imprimerie de S[t] Thomas d'Aquin, dont il invoquoit la protection pour cet établissement, & pour tout l'Institut. Le Protecteur étoit bien choisi, car S[t] Thomas dans un autre siécle, & dans d'autres circonstances étoit Descartes. Nous passons sous silence des Processions, où il vouloit que l'on portât huit Banniéres, qui auroient représenté les principaux événements

de la vie du Saint, & aufquelles on jugea à propos de fubftitüer la Châffe de fes Reliques. La dévotion d'Italie prend affés fouvent une forme, qui n'eft gucre de nôtre goût d'aujourd'hui.

Ce qui en fera certainement davantage, c'eft l'établiffement qu'il fit d'un Tronc dans la Chapelle de l'Inftitut pour le rachat des Chrétiens, & principalement de fes Compatriotes efclaves en Turquie. Il n'oublia rien pour animer cette charité; il fe fouvenoit de fes malheurs utilement pour les autres Malheureux. Par le même fouvenir il ordonna une Proceffion folemnelle de l'Inftitut tous les vingt-cinq ans le jour de l'Annonciation. Ces Fêtes, ces cérémonies fondées fur la piété pouvoient auffi avoir une politique fenfée & légitime, elles lioient l'Inftitut à la Religion, & en affûroient la durée.

Il manquoit encore à la Collection d'Hiftoire Naturelle, dont l'Inftitut étoit en poffeffion, quantité de chofes des Indes, car ce qui y dominoit c'étoit l'Europe, & il jugea qu'il ne pouvoit avoir promptement ces curiofités qu'en les allant chercher en Angleterre & en Hollande. Il s'embarqua à Livourne pour Londres, quoique dans un âge déja fort avancé, & il alla de Londres à Amfterdam finir fes fçavantes emplettes. Là il donna à imprimer fon grand ouvrage du *Cours du Danube* dont il a paru à la Haye en 1726 une Édition magnifique en 6 vol. in fol. Et il négocia avec les Libraires un nombre de bons Livres deftinés à fon Inftitut. Quand toutes fes nouvelles acquifitions furent raffemblées dans Bologne, il en fit la donation en 1727.

Tout cela fini, tous fes projets heureufement terminés, il imita en quelque forte Solon, qui après avoir été le Légiflateur de fon Pays, & n'ayant plus de bien à lui faire, s'en exila. Il alla en 1728 retrouver fa retraite de Provence, pour y reprendre fes recherches de la Mer, & fuivre en liberté ce génie d'obfervation qui le poffédoit. Mais il eut en 1729 une légere attaque d'Apopléxie, & les Médecins le

renvoyerent dans l'air natal. Il ne fit qu'y languir jufqu'au 1 Nov. 1730. qu'une feconde attaque l'emporta. Tout Bologne fit parfaitement fon devoir pour un pareil Citoyen, qui à l'exemple des anciens Romains avoit uni en même degré les Lettres & les Armes, & donné tant de preuves d'un amour fingulier pour fa Patrie.



Fautes à corriger dans l'Histoire de 1729.

PAge 1. *ligne 6.* cessé encore, *lisés* encore peu brillé.
Page 36. l. 5. foliis, *lisés* petalis. *Et* Raii, *lisés* Rei.
Ligne 7. Et, *lisés* Ou.

MEMOIRES



MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES
de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCXXX.

OBSERVATIONS METÉOROLOGIQUES FAITES A AIX

Par M. DE MONTVALON, Conseiller au Parlement d'Aix.

Comparées avec celles qui ont été faites à Paris.

Par M. CASSINI.

Observations sur la quantité de Pluye de l'année 1729.

	A Paris.	A Aix.
EN Janvier....	13 lignes $\frac{1}{2}$	10 lignes $\frac{16}{24}$
Février....	5 $\frac{4}{6}$	8 $\frac{16}{24}$
Mars......	8 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{1}{24}$

	A Paris.	A Aix.
En Avril	19 lignes $\frac{5}{6}$	24 lignes $\frac{1}{24}$
Mai	43 $\frac{5}{6}$	18 $\frac{11}{24}$
Juin	8 $\frac{5}{6}$	24 $\frac{1}{2}$
Juillet	22 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{13}{24}$
Août	28 $\frac{3}{6}$	2 $\frac{13}{24}$
Septembre	20	14 $\frac{9}{24}$
Octobre	13 $\frac{2}{6}$	19 $\frac{1}{2}$
Novembre	8 $\frac{2}{6}$	73 $\frac{2}{3}$
Décembre	12 $\frac{1}{6}$	13 $\frac{4}{24}$

Somme totale de la Pluye tombée en l'année 1719 à Paris .... 204 lign. $\frac{2}{6}$ à Aix... 219 lign. $\frac{1}{6}$
ou 17 pouces $\frac{2}{6}$ ou 18 pouc. 3 lign. $\frac{2}{3}$

En comparant ensemble ces Observations, on trouve que la quantité de Pluye qui est tombée à Aix est plus grande de 15 lignes que celle que l'on a observée à Paris; on voit aussi que cette quantité de Pluye a été distribuée bien inégalement dans chaque mois, puisqu'il en est tombé pendant le mois de Mai à Paris 43 lignes $\frac{5}{6}$, & à Aix 18 lign. $\frac{11}{24}$, au mois d'Août à Paris 28 lignes $\frac{1}{2}$, & à Aix 2 lignes $\frac{1}{2}$, au lieu qu'au mois de Novembre il en est tombé à Paris 8 lign. $\frac{2}{6}$, & à Aix 73 lign. $\frac{2}{3}$.

Il paroît aussi que quoique la quantité de Pluye ait été en 1729 de même qu'en 1728 plus grande à Aix qu'à Paris, elle n'a pas gardé la même proportion que l'année précédente, où il a plû à Aix 24 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$, 8 pouces 8 lignes plus qu'à Paris.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid est arrivé à Aix le 9 Janvier, le Thermometre étant descendu à 13 degrés $\frac{1}{2}$, qui répondent à 17 degrés $\frac{1}{2}$ du Thermometre de l'Observatoire.

A Paris le plus grand froid le 20 Janvier, le Thermometre

étant descendu à 9 degrés $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, 8 degrés ou environ plus bas que le 9 Janvier à Aix.

La plus grande chaleur est arrivée le 20 Juillet à 3 heures après midi, le Thermometre étant monté à 81 degrés, que M. de Montvalon juge répondre à 80 degrés de celui de Paris.

A Paris le plus grand chaud est arrivé le 18 Juin à 3 heures après midi, où l'on observa le Thermometre à 78 degrés, plus bas seulement de 2 degrés que le 20 Juillet à Aix.

Sur le Barometre.

La plus grande hauteur du Barometre a été observée à Aix le 31 Décembre de 27 pouces 10 lignes après une grande pluye, plus basse de 6 lignes qu'à Paris, où il a été observé le 6 Février à 28 pouces 4 lignes.

La moindre hauteur a été à Aix le 21 Novembre à 26 pouces 11 lignes, plus basse de 2 lignes $\frac{1}{2}$ qu'à Paris, où il est descendu le 22 Février à 27 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ par un vent de Sud-oüest couvert.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

La déclinaison de l'Aimant a été observée à Aix de 14^d $0'$.

Elle a été observée à Marseille par le P. Pesenas, Professeur d'Hydrographie, de .... 14 50.



MÉMOIRE

Sur le Criſtallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons.

Par M. PETIT le Médecin.

18 Janvier 1730.

LE Criſtallin eſt une partie tranſparente de l'Oeil, de figure lenticulaire, d'une ſubſtance molle, mucilagineuſe, mais aſſés ferme pour ſe contenir dans ſes propres bornes, enchaſſée dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un Diamant dans ſon Chaton, dans laquelle il eſt retenu par une Membrane qui l'enveloppe entiérement, & qui pour cela eſt appellée la *Capſule du Criſtallin.*

L'on ſçait que le nom de Criſtallin ne lui a été donné que parce qu'il eſt tranſparent comme un morceau de Criſtal; c'eſt apparemment à cauſe de cette tranſparence que les Anatomiſtes l'ont mis au nombre des Humeurs des Yeux, quoique les parties qui le compoſent ne ſoient point fluides.

Sa ſubſtance eſt d'une conſiſtance moyenne entre la fermeté & la liquidité ; ſes parties ne ſe dérangent point par elles-mêmes les unes à l'égard des autres.

Il eſt d'une forme lenticulaire dans l'Homme, les Animaux à quatre pieds & les Oiſeaux. Il eſt ſphérique à peu de choſe près dans preſque tous les Poiſſons & les Serpents ; il eſt plus applati dans l'Homme & dans le Singe que dans aucun autre animal, parce qu'il a moins de convéxité dans ſes ſurfaces, ſur-tout à ſa partie antérieure.

La circonférence du Criſtallin eſt ordinairement ronde; j'en ai pourtant trouvé dans l'Homme qui ne l'étoient pas, & dont le diametre étoit plus grand d'un quart de ligne d'un côté que de l'autre.

Le diametre de la circonférence du Criſtallin dans l'Homme a pour l'ordinaire 4 lignes, quelquefois 4 lign. $\frac{1}{4}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$;

je l'ai vû rarement de 3 lign. $\frac{3}{4}$ dans les Adultes, mais je l'ai ſouvent trouvé de 3 lign. $\frac{1}{2}$ dans les Enfants.

Son épaiſſeur eſt de 2 lignes & 2 lign. $\frac{1}{4}$ dans les Adultes, quelquefois d'une ligne $\frac{3}{4}$, mais dans les Enfants on le trouve de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

La convéxité antérieure du Criſtallin dans l'Homme fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 6 lign. 6 lign. $\frac{1}{2}$, juſqu'à 9 lignes, & quelquefois de 12 lignes; j'en ai même trouvé dans des gens âgés qui étoient preſque plans à leur partie antérieure de la longueur de 2 lignes, & dont la convéxité me paroiſſoit être une portion de ſphere de 25 à 30 lign. de diametre, cela eſt bien extraordinaire. On en trouve auſſi qui n'ont que 5 lign. $\frac{1}{2}$, mais rarement, à moins que ce ne ſoit dans quelques Enfants.

La convéxité poſtérieure fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 5 lign. rarement de 5 lign. $\frac{1}{2}$ & de 4 lign. $\frac{3}{4}$, à moins que ce ne ſoit des Criſtallins d'Enfants.

J'ai trouvé des Criſtallins dont les deux convéxités étoient égales. J'en ai vû auſſi de plus convexe à la partie antérieure qu'à la partie poſtérieure, & j'ai rencontré plus d'une fois, dans les Yeux du même Homme, un Criſtallin plus convexe à ſa partie antérieure qu'à la partie poſtérieure, l'autre Criſtallin étant dans ſon état naturel.

J'ai auſſi trouvé quelques Criſtallins dont la convéxité poſtérieure n'étoit point ſphérique, mais elle approchoit de la figure parabolique. *V. les Mem. de 1725. p. 14.*

Le Criſtallin de l'Homme peſe 4 grains, dans les Adultes quelquefois 4 grains $\frac{1}{4}$, rarement 4 grains $\frac{1}{2}$ & 3 grains $\frac{3}{4}$. Je l'ai trouvé dans les Enfants de huit ou dix ans peſant 3 grains, juſqu'à 3 grains $\frac{1}{2}$.

Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$ dans un Fœtus de ſept mois, il n'avoit que 2 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 3 lignes de diametre, & la poſtérieure étoit de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin peſoit 2 grains dans un Fœtus de neuf mois,

Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 2 lignes d'épaiſſeur, & les mêmes convéxités que le précédent

Celui d'un Enfant de huit jours de naiſſance peſoit 2 grains. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit une portion de ſphere de 4 lignes de diametre, & la poſtérieure de 3 lignes.

Celui d'un Enfant de neuf jours de naiſſance peſoit 2 grains $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lignes de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Sa convéxité antérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 5 lignes, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$.

Il faut remarquer que le diametre du Criſtallin n'eſt pas toûjours proportionné à ſon épaiſſeur. J'ai trouvé des Criſtallins qui avoient 4 lignes de diametre & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur, d'autres 2 lignes, d'autres 2 lign. $\frac{1}{4}$, juſqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$. J'en ai trouvé avec 2 lignes d'épaiſſeur, qui avoient 3 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, 4 lignes, 4 lign. $\frac{1}{4}$, 4 lign. $\frac{1}{3}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$. J'ai vû dans un Homme de quarante ans les deux Criſtallins de différents diametres.

Les convéxités des Criſtallins ne ſont pas toûjours proportionnées à l'âge, elles diminüent pour l'ordinaire à meſure que l'on avance en âge, ce qui dépend de la contraction des Muſcles, comme nous le dirons dans un Mémoire particulier. Les Criſtallins ſe trouvent quelquefois auſſi convexes dans un homme âgé que dans un jeune homme. Leur groſſeur ne s'accorde pas toûjours avec leur peſanteur ; ils ſont d'autant plus peſants qu'ils ſont fermes, quoique de même groſſeur.

On peut voir toutes ces diverſités dans la Table ſuivante, je les ai tirées d'un grand nombre d'Yeux que j'ai examinés.

Cristallins d'Hommes.

	Nombre.	Age.	Convéxité antérieure.	Convéxité postérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou E'paisseur.	Pesanteur.
	1.	12.	7 lignes $\frac{1}{2}$.	5 lignes.	4 lignes.	2 lignes.	3 grains $\frac{1}{2}$.
	2.	15.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign.	3 gr.
	3.	15.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	3 lign. $\frac{3}{4}$.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	4.	20.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	4 gr.
	5.	25.	6 lign.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{2}{3}$.	4 gr. $\frac{1}{4}$.
Cristallins du même Homme.	6.	30.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	1 lign. $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	7.	30.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
	8.	30.	6 lign.	6 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	9.	30.	7 lign. $\frac{1}{4}$.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	1 ligne $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
	10.	35.	9 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr.
Cristallins du même Homme.	11.	40.	6 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	12.	40.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign. $\frac{7}{8}$.	4 gr.
	13.	40.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	3 gr. $\frac{3}{4}$.
	14.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	15.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
	16.	50.	7 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{5}$.	2 lign.	4 gr.
	17.	50.	7 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	18.	55.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{4}$.
	19.	55.	11 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
	20.	60.	8 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign. $\frac{1}{4}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	21.	60.	8 lign.	8 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
	22.	60.	8 lign.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	23.	60.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	24.	60.	12 lign.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
	25.	60.	10 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{7}{8}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
	26.	65.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{3}{4}$.	5 gr. $\frac{1}{2}$.

L'on voit dans cette Table des Cristallins de même âge avoir différents diametres & différentes épaisseurs.

Il y a des gens âgés de 60 ans qui ont la même épaisseur du Cristallin que des jeunes gens agés de 12, de 15, de 30, de 40 ans, avec les mêmes convéxités.

On voit des convéxités différentes avec la même épaisseur

& la même largeur. Et dans un homme âgé de 30 ans & un autre de 40, on y trouve ses deux Cristallins de différentes convéxités, de différents diametres & de différentes pesanteurs.

Il est bon d'avertir ici que les âges ont été déterminés sur la simple vûë du Cadavre, ce qui est sujet à quelque erreur, mais qui n'est pas de conséquence. Il est presque impossible de sçavoir l'âge de ceux qui meurent dans les Hôpitaux, principalement après leur décès, & lorsqu'ils sont une fois dans la Salle des Morts.

Le Singe est de tous les Animaux celui dont les parties approchent le plus de celles de l'Homme. Ses Yeux sont tout semblables à ceux de l'Homme; son Cristallin a les mêmes convéxités, peu s'en faut, il n'a pourtant que 3 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, jusqu'à 3 lign. $\frac{1}{2}$, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, jusqu'à une ligne $\frac{3}{4}$.

La convéxité antérieure du Cristallin du Cheval fait une portion de sphere dont le diametre a 12 lignes, jusqu'à 15. La convéxité postérieure fait une portion de sphere qui a 10 lignes, jusqu'à 11 lignes de diametre.

Le diametre ou la largeur de ce Cristallin est de 9 lignes, jusqu'à 10. Il a 6 lignes d'épaisseur, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il pese 58 grains, jusqu'à 66.

La convéxité de la partie antérieure du Cristallin de l'Oeil du Boeuf fait une portion de sphere dont le diametre est de 10, 11, 12 lignes, jusqu'à 12 lign. $\frac{1}{2}$. La convéxité de la partie postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 8 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 9 $\frac{1}{2}$, rarement de 9 lign. $\frac{3}{4}$ & de 8 lign.

La largeur ou le diametre de ce Cristallin est de 8 lignes, jusqu'à 8 lign. $\frac{1}{2}$, rarement de 8 lign. $\frac{3}{4}$. Son épaisseur est de 5 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Sa pesanteur est de 38 grains, jusqu'à 54; j'en ai trouvé de 58 grains, mais très-rarement.

La facilité que l'on a d'avoir des Cristallins de Bœuf, est cause que j'en ai examiné une très-grande quantité, sur lesquels j'ai choisi un certain nombre pour faire la Table suivante, où l'on peut voir la plûpart des variétés que nous avons remarquées dans les Cristallins de l'Homme, car l'on y voit que la largeur du Cristallin n'y est pas toûjours proportionnée à

à ſon épaiſſeur, & que leur groſſeur ne s'accorde pas toûjours avec leur peſanteur : il y en a quelques-uns dont je n'ai pas examiné les convéxités.

Criſtallins de Bœufs.

Nombre.	Convéxité antérieure.	Convéxité poſtérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou E'paiſſeur.	Peſanteur.
1.	11 lignes ½.	9 lignes.	8 lignes ½.	5 lignes ½.	38 grains.
2.	12 lign.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	38 gr.
3.	12 lign. ½.	8 lign. ½.	8 lign.	5 lign.	38 gr.
Criſtallins du même Bœuf { 4.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	41 gr.
5.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ⅓.	5 lign. ½.	41 gr.
6.	10 lign. ½.	9 lign.	8 lign.	5 lign. ½.	42 gr. ½.
7.	11 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	43 gr. ½.
8.	10 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ⅓.	5 lign. ⅓.	44 gr.
9.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	44 gr.
10.	10 lign.	9 lign.	8 lign. ⅓.	5 lign. ⅓.	44 gr.
11.	10 lign.	9 lign.	8 lign. ¼.	5 lign. ½.	44 gr.
12.	10 lign. ¾.	8 lign. ¼.	8 lign. ¼.	6 lign.	44 gr. ½.
13.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ½.	45 gr.
14.	11 lign.	9 lign.	8 lign. ⅓.	5 lign. ½.	45 gr.
15.	12 lign.	9 lign. ¼.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	46 gr.
16.	....	....	8 lign.	6 lign.	46 gr.
17.	12 lign.	9 lign.	8 lign.	5 lign.	47 gr.
18.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	47 gr.
19.	12 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ½.	47 gr.
20.	10 lign.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	47 gr.
21.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ¼.	47 gr. ½.
22.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ½.	48 gr.
23.	12 lign.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	48 gr.
24.	....	....	8 lign. ⅔.	5 lign. ½.	48 gr.
25.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	49 gr.
26.	9 lign. ½.	8 lign. ½.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	49 gr.
27.	10 lign. ¼.	....	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	49 gr. ½.
28.	....	....	8 lign. ½.	6 lign. ½.	50 gr.
29.	....	....	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	50 gr.
30.	12 lign.	9 lign.	8 lign. ¾.	5 lign. ¾.	50 gr.
31.	....	....	8 lign. ½.	6 lign.	50 gr.
32.	11 lign.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ⅔.	50 gr.
33.	9 lign. ½.	12 lign.	8 lign. ¾.	5 lign. ⅔.	51 gr.
34.	....	....	8 lign. ¾.	5 lign. ½.	51 gr.
35.	11 lign. ¼.	9 lign.	8 lign. ½.	5 lign. ¾.	51 gr.
36.	....	....	8 lign. ½.	6 lign. ½.	56 gr.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin du

Mouton fait une portion de ſphere dont le diametre eſt de 7 lign. ½, juſqu'à 8 lignes. Sa convéxité poſtérieure fait une portion de ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 7.

La largeur ou le diametre eſt de 5 lign. ½, juſqu'à 6 lign. ½. Son épaiſſeur eſt de 4 lign. ½, juſqu'à 4 lign. ¾. Il peſe pour l'ordinaire 24 grains, juſqu'à 28.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin de l'Oeil du Chien-dogue & de trois ou quatre Loups que j'ai diſſéqués, fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 6 lignes, juſqu'à 6 lign. ½. La convéxité de la partie poſtérieure eſt quelquefois égale à l'antérieure, mais pour l'ordinaire elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 5 lignes, juſqu'à 5 lign. ½.

La largeur de ce Criſtallin eſt de 4 lign. ½, juſqu'à 5 lign. & 3 lign. ½ d'épaiſſeur, juſqu'à 3 lign. ¾. Il peſe 12 grains, juſqu'à 14.

Les Criſtallins des Yeux des gros Chats ne différent preſque point de ceux du Chien & du Loup.

J'ai diſſéqué les Yeux d'un ſeul Renard, la convéxité de la partie antérieure de ſes Criſtallins faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. ½ de diametre, & la convéxité poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 5 lign. ½ de diametre.

Ils avoient 5 lign. ¼ de largeur, & 4 lignes d'épaiſſeur. Ils peſoient chacun 12 grains.

On trouve preſque toûjours la convéxité de la partie antérieure du Criſtallin de l'Oeil du Liévre & du Lapin égale à la poſtérieure, elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 6 juſqu'à 7 lignes.

La largeur de ce Criſtallin eſt de 5 lign. 5 lign. ½, juſqu'à 6, & ſon épaiſſeur eſt de 4 lign. ¼, juſqu'à 4 lign. ½.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin des Yeux du Dindon & de l'Oye eſt la même; elle fait la portion d'une ſphere, dont le diametre eſt de 4 lign. ½ ou 5 lignes, aſſés ſouvent de 6 lignes, rarement de 7 lignes.

La convéxité de la partie poſtérieure fait la portion d'une

ſphere, dont le diametre eſt de 4 lignes, juſqu'à 5 lignes.

Ces Criſtallins ont 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, juſqu'à 4 lignes, & 2 lign. juſqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Ils peſent 3 grains, 3 grains $\frac{1}{2}$, juſqu'à 4 grains $\frac{1}{2}$.

Le Chat-huant, le Duc & la Choüette ont le Criſtallin de la même conformation, auſſi-bien que tout le globe de l'Oeil, qui eſt d'une ſtructure particuliére, comme je l'ai fait voir à l'Académie. La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin eſt plus grande que la poſtérieure, car cette partie antérieure fait la portion d'une ſphere qui a 6 lignes de diametre. La convéxité poſtérieure fait la portion d'une ſphere qui a 7 lign. de diametre.

Il a 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur.

Il peſe 14 grains, ce qui eſt digne de remarque, qu'un ſi petit Oiſeau ait un Criſtallin auſſi gros & auſſi peſant, en comparaiſon de ceux du Dindon & de l'Oye, dont les plus gros Criſtallins n'ont que 4 lign. de diametre, & 4 grains $\frac{1}{2}$ de peſanteur.

Le Criſtallin de la Choüette eſt plus petit que celui du Chat-huant & du Duc, il n'avoit que 4 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur, & peſoit 10 grains.

Les Criſtallins de la plûpart des Serpents & des Poiſſons ſont à peu-près ſphériques.

La convéxité de la partie antérieure du Criſtallin d'un Marſoüin long de 5 pieds, faiſoit la portion d'une ſphere de 8 lignes de diametre, & la convéxité de la partie poſtérieure faiſoit la portion d'une ſphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre.

Ce Criſtallin avoit 6 lignes de diametre dans ſa circonférence, & 5 lignes d'axe ou d'épaiſſeur : il peſoit 24 grains.

Le Criſtallin d'un Marſoüin, de 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faiſoit à ſa partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 6 lignes.

Ce Criſtallin avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur : il peſoit 22 grains.

Le Criſtallin d'un Marſoüin, long de 3 pieds $\frac{1}{2}$, faiſoit à ſa

partie antérieure la portion d'une ſphere de 7 lign. de diametre, & la poſtérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 19 grains.

Un Poiſſon appellé *Carpe de Mer*, long de 6 pieds, ſon Criſtallin faiſoit une portion de ſphere de 9 lignes de diametre par ſa convéxité antérieure, & par la poſtérieure elle étoit de 7 lignes.

Le diametre de ſa circonférence étoit de 6 lign. $\frac{3}{4}$, & ſon épaiſſeur de 6 lign. $\frac{1}{4}$: il peſoit 28 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon nommé *Reluiſant*, long de 7 pieds, faiſoit à ſa partie antérieure une portion de ſphere de 10 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 9 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 9 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 9 lign. d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 111 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon appellé *Negre*, long de 4 pieds, avoit une convéxité à ſa partie antérieure qui faiſoit une portion de ſphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 32 grains.

Le Criſtallin d'un autre Negre, qui avoit 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 8 lign. de diametre, & la poſtérieure 6 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 6 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 36 grains.

Le Criſtallin d'un Saumon, qui avoit 2 pieds de longueur, avoit à ſa partie antérieure une convéxité qui faiſoit la portion d'une ſphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un Eſpadon *(Gladius ſive Xiphias)* long de 3 pieds, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 10 lignes de diametre, & la poſtérieure 8 lignes $\frac{2}{3}$. Il avoit 8 lignes $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 8 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 72 grains.

Le Criſtallin d'une Aloze, longue de 21 pouces, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, la partie poſtérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une autre Aloze, de 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa partie antérieure une portion de ſphere de 4 lign. de diametre, & la poſtérieure de 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains.

Le Criſtallin d'un Poiſſon appellé *Pucelle*, long de 14 pouc. faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{1}{3}$.

Le Criſtallin d'un Brochet, de 2 pieds de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 6 grains.

Le Criſtallin d'un Brochet, de 32 pouces de longueur, avoit les mêmes dimenſions & le même poids.

Le Criſtallin d'un Barbeau ou Barbillon, qui avoit 18 pouc. de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lignes de diametre, & la poſtérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Criſtallin d'un autre Barbeau, qui avoit 2 pieds de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 6 grains.

Le Criſtallin d'une Carpe, qui avoit 15 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 3 lignes de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit

2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'un Maquereau, qui avoit 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. de diametre, & la poſtérieure 3 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains $\frac{3}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Maquereau, de 14 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & la poſtérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{8}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Maquereau, de 13 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign $\frac{2}{3}$. Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'un Merlan, qui avoit 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 3 lignes $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Criſtallin d'un autre Merlan, de 12 pouces de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lignes de diametre, & la poſtérieure 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 4 grains.

Le Criſtallin d'un Chien de Mer, qui avoit 3 pieds 3 pouc. de longueur, faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 18 grains.

Le Criſtallin d'un autre Chien de Mer, long de 2 pieds $\frac{1}{2}$; faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 5 lignes. Il avoit

5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 16 grains.

Le Cristallin d'une Raye appellée *Ange*, longue d'un pied $\frac{1}{2}$ sans la queüe, faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 4 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 17 grains.

Le Cristallin d'une autre Raye appellée *Bouclée*, longue de 2 pieds sans la queüe, faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere de 6 lign. $\frac{1}{4}$ de diametre, & la postérieure de 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur ou d'axe. Il pesoit 18 grains.

Le Cristallin d'un Rouget, qui avoit 10 pouces de longueur, faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere de 5 lignes de diametre, & la postérieure de 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 8 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'un Hareng faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'un autre Hareng faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere de 3 lignes de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de la circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'une Tanche faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la postérieure de 2 lignes. Il avoit 2 lignes de largeur, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain.

Le Cristallin d'une Anguille d'eau douce faisoit par sa convéxité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains.

Le Criſtallin d'une Anguille de Mer faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure de 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 14 grains.

Le Criſtallin d'une Lamproye étoit tout ſemblable à celui de l'Anguille d'eau douce.

Le Criſtallin d'une Lote faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure d'une ligne $\frac{3}{4}$. Il avoit une ligne $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit $\frac{3}{4}$ de grains.

J'ai trouvé dans les Criſtallins de la plûpart des Viperes & des Aſpics les mêmes dimenſions & les mêmes poids.

Le Criſtallin d'une Loutre, que j'ai diſſéquée, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de ſa circonférence, & 2 lignes d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une Tortüe, qui avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, ſans y comprendre la tête ni la queüe, faiſoit par ſa convéxité antérieure la portion d'une ſphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit de largeur ou de diametre de ſa circonférence 2 lign. $\frac{1}{4}$, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaiſſeur. Il peſoit 2 grains.

Le Criſtallin d'une groſſe Grenoüille faiſoit par ſa convéxité antérieure une portion de ſphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la poſtérieure 2 lignes. Il avoit de largeur ou de diametre de ſa circonférence 2 lignes, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. Il peſoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Criſtallin d'une moyenne Grenoüille ne peſoit qu'un grain, & avoit les dimenſions plus petites.

Morgagni adverſ. 6. p. 90. Il faut encore remarquer que plus les Animaux ſont jeunes, le Criſtallin ſe trouve d'autant plus mou. Il eſt d'une molleſſe qui reſſemble à celle de la boüillie refroidie dans les Fœtus & les nouveau-nés, il eſt même plus mou au centre qu'à la circonférence,

circonférence, ce qu'il eſt facile de remarquer dans les Criſtallins de Veaux & d'Agneaux.

Si l'on fait ſécher ces Criſtallins, il s'en évapore les deux tiers ou les trois quarts, & l'on trouve une cavité au dedans, ou bien il ſe fait un enfoncement ſur l'une des deux ſurfaces, quelquefois ſur toutes les deux la même choſe arrive aux Criſtallins d'Enfants nouveau-nés, mais ſi l'on met ſécher des Criſtallins d'Hommes de l'âge de 50 à 60 ans, il ne ſe fait aucun enfoncement qui ſoit conſidérable, & qui d'ailleurs ne provient que de la molleſſe de la partie extérieure, il s'en évapore ſeulement le tiers ou le quart, ce qui arrive de même aux Criſtallins des autres Animaux, dont l'évaporation ſe fait à proportion de leur âge. Ces Criſtallins, qui ſont d'une ſi grande molleſſe dans le premier âge, deviennent peu-à-peu plus ferme, enſorte que dans l'Homme de 15 ou 20 ans la conſiſtance du Criſtallin ſe trouve égale au centre & à la circonférence, ce que l'on remarque auſſi dans les Criſtallins de Veaux de deux mois, ou deux mois & demi, & dans ceux d'Agneaux de ſix ſemaines ou deux mois. La partie centrale commence à devenir plus ferme dans l'Homme à l'âge de 20 ou 25 ans; cette fermeté s'augmente & s'étend peu-à-peu vers la circonférence, qui devient auſſi plus ferme, mais quelque fermeté qu'elle acquiert, elle l'eſt rarement autant que la partie centrale.

Les Criſtallins ſont non ſeulement d'autant plus fermes que les Animaux ſont plus âgés, mais ceux des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons le ſont plus que ceux de l'Homme. Les Criſtallins des Yeux de Dindon, d'Oye, de Cheval, de Bœuf, de Mouton, & âgés d'un an, ſont plus fermes que ceux d'Hommes âgés de 25 ans.

Les Criſtallins ſe trouvent d'autant plus fermes, qu'ils ſont plus gros à proportion de leur âge. Ceux de Chevaux le ſont plus que ceux de Bœufs, qui le ſont plus que ceux de Moutons, & ceux-ci que ceux de Chiens & de Chats.

Ceux des Animaux à quatre pieds ſont plus fermes que ceux des Oiſeaux, mais ceux des Poiſſons ſont beaucoup plus

fermes que ceux de Chevaux & de Bœufs, enſorte que la partie centrale des Criſtallins des Poiſſons a une fermeté qui approche quelquefois de la dureté de la Corne; il eſt vrai que la ſubſtance externe de ces Criſtallins eſt plus molle que celle des autres Criſtallins (ce que Morgagni a remarqué) car elle eſt mucilagineuſe, ce que j'ai vû auſſi dans le Criſtallin de la Loutre, animal à quatre pieds, mais aquatique.

Adverſ. 6. p. 90.

Il y a encore une choſe ſinguliére qui arrive aux Criſtallins des Yeux de l'Homme, & que je n'ai vûë dans aucun des Criſtallins des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons.

Le Criſtallin de l'Homme eſt tranſparent & ſans couleur depuis la naiſſance juſqu'à l'âge de 25 ans ou environ, après quoi il commence à prendre dans le centre une couleur jaune de paille très-légere qui augmente à meſure que l'on avance en âge; la couleur devient peu-à-peu plus jaune, & s'étend vers la circonférence. J'ai vû les Criſtallins d'un Invalide âgé de 81 ans, qui reſſembloient par leur couleur & leur tranſparence à des morceaux d'Ambre jaune bien tranſparents; & plus les Criſtallins ſont fermes, plus ils ſont jaunes. Mais quelque fermeté qu'ayent les Criſtallins des Animaux à quatre pieds, des Oiſeaux & des Poiſſons, je n'en ai trouvé aucun qui eût la moindre couleur. Il y a des Criſtallins de Chevaux, mais peu, qui acquiérent cette couleur en ſéchant à l'air, ils n'avoient aucune couleur dans le temps que je les ai tirés des Yeux. Les Criſtallins de Poiſſons, qui ſont plus fermes que ceux de Chevaux, ne jauniſſent point en ſéchant. J'ai quelquefois trouvé dans le même Homme un Criſtallin plus jaune que l'autre.

V. les Mem. de l'Acad. an. 1726. p. 81. & 82.

Venons préſentement à la ſtructure du Criſtallin. Il eſt formé & composé de fibres agencées les unes contre les autres dans un certain ordre. On voit aſſés facilement ces fibres dans un Criſtallin nouvellement tiré de l'Oeil d'un Bœuf. On frotte un Scalpel d'huile, on l'enfonce environ de l'épaiſſeur d'une demi-ligne, plus ou moins, au centre d'une des ſurfaces de ce Criſtallin, puis on ramene le Scalpel vers la circonférence,

en déchirant la ſubſtance du Criſtallin, on voit les fibres du Criſtallin qui forment des pellicules poſées les unes ſur les autres. On découvre facilement ces pellicules dans les Criſtallins ſéchés à l'air, mais on ne voit point les fibres. On découvre encore mieux l'un & l'autre dans ceux que l'on a fait boüillir dans l'eau.

Voici les expériences que j'ai faites pour cela avec des Criſtallins de Bœufs.

J'ai pris un Criſtallin de Bœuf qui peſoit 48 grains, il avoit 8 lignes $\frac{1}{2}$ de diametre, & 5 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Je l'ai laiſſé ſécher à l'air au mois de Juillet. Au bout de quatre jours il ne peſoit plus que 22 grains. Il avoit 7 lignes de diametre, & 4 lignes $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur, mais ſes ſurfaces étoient très-inégales, boſſelées, plus épaiſſes en des endroits que dans d'autres. Il étoit blanc, opaque à ſa partie extérieure, tranſparent à ſa partie interne, mais non pas de cette tranſparence dont il étoit lorſque je l'ai tiré de l'Oeil. La partie externe étoit feüilletée, la partie interne étoit égale, & s'enlevoit par piéces qui reſſembloient à des côtes de Melon, le tout ſe réduiſoit facilement en poudre.

J'ai laiſſé ſécher beaucoup d'autres Criſtallins, il s'en eſt trouvé qui peſoient 50 grains, qui étant ſéchés, ne peſoient plus que 12 grains; d'autres peſant 46 grains, peſoient 30 grains étant ſecs. Les Criſtallins qui perdent le plus de leur peſanteur, ont moins de matiére tranſparente, & plus de cette matiére feüilletée, blanche & opaque; & ceux qui conſervent le plus de leur peſanteur, ont moins de matiére blanche & opaque, & plus de matiére tranſparente. En général on leur trouve d'autant plus de matiére tranſparente, étant ſéchés, qu'ils ſont naturellement plus fermes & d'Animaux plus âgés; c'eſt ce qui fait que l'on rencontre rarement de la ſubſtance tranſparente dans les Criſtallins de l'Homme qui ſont ſéchés; ils ſe réduiſent preſque entiérement en matiére blanche en ſéchant, &, comme je l'ai dit, perdent quelquefois les trois quarts de leur peſanteur. Les Criſtallins de Veaux, & de tous les jeunes Animaux, perdent, en ſéchant, auſſi les trois

quarts de leur peſanteur & plus, & l'on n'y trouve point de matiére tranſparente. Les Criſtallins ſont beaucoup plus mous à leur partie extérieure qu'à leur partie interne; lorſque l'humidité, qui cauſe cette molleſſe, vient à s'évaporer, elle laiſſe des eſpaces vuides, les parties ſolides ſe rapprochent les unes des autres, mais inégalement, ainſi les plans ne ſe trouvant plus paralleles les uns à l'égard des autres, la matiére lumineuſe qui y paſſe, trouve inceſſamment des plans inclinés, ſe rompt & ſe refléchit d'une infinité de maniéres, ce qui rend le corps opaque, comme il arrive au Verre pilé & au Sablon, compoſés d'une infinité de parties toutes tranſparentes.

Traité de l'Oeil, ch. 4. Briggs dit que les Criſtallins mis dans une cuillier d'argent expoſée ſur les charbons ardents, ſe réduiſent en gelée: je ne ſçais s'il a obmis de rapporter quelques circonſtances, j'ai fait cette expérience comme il le dit, bien-loin de ſe réduire en gelée, ils ſe grillent après que toute l'humidité eſt évaporée, il n'y reſte le plus ſouvent point de matiére tranſparente, parce que l'humidité qui ſe trouve dans toute la ſubſtance du Criſtallin eſt pouſſée avec trop de force par la chaleur, & dérange les parties internes du Criſtallin.

J'ai mis tremper un Criſtallin dans l'eau froide, il peſoit 44 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaiſſeur. Je l'ai retiré 26 heures après, il peſoit 56 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 6 lign. $\frac{3}{4}$ d'épaiſſeur. J'en ai mis tremper d'autres, qui ont donné bien des variétés: plus ils ſont fermes, plus ils groſſiſſent, & fendent quelquefois leur capſule, & pour lors ils ſe trouvent très-inégaux, & toûjours très-mous; ſi on les laiſſe tremper plus long-temps, ils ſe réduiſent en mucilage.

Les Criſtallins boüillis dans l'eau, deviennent opaques & fermes; leur ſurface reſte quelquefois réguliére, & quelquefois irréguliére. Ces Criſtallins diminüent dans leur poids & leurs dimenſions, puis expoſés à l'air encore tout chauds, ſe ſéchent bien vîte, & ſe fendent d'abord en trois parties à leurs ſurfaces antérieures & poſtérieures. Chacune de ces parties

se divise en plusieurs autres, & par ce moyen on peut découvrir leur structure, mais cela se fait encore mieux dans les Cristallins trempés dans les Esprits acides, ce qui m'a engagé de faire quantité d'expériences dans lesquelles j'ai employé beaucoup de Cristallins de Bœufs, & très-peu de Cristallins d'Hommes, parce qu'ils sont trop petits & trop mous.

V. M. Antoine Maîtrejean, Descript. de l'Oeil, ch. 11.

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un Cristallin d'Homme qui pesoit 4 grains; il avoit 4 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, & 2 lign. d'épaisseur. Il a tout aussi-tôt blanchi, il nageoit sur la liqueur. Je l'ai retiré 24 heures après, il n'avoit plus de capsule, elle étoit dissoute.

Le Cristallin étoit devenu jaune-pâle, ses surfaces étoient encore unies & polies. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Etant resté quelque temps à l'air, il s'est fendu en plusieurs rayons de la circonférence au centre; il s'est séparé par piéces qui ressembloient à des côtes de Melon, & par fibres très-fines de la grosseur des fils de Soye grege, elles étoient jaunâtres. Tous les Cristallins d'Hommes que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre, ont été de même, à peu de chose près. Les plus mous se dissolvent tant soit peu, ils diminüent de poids, & restent plus mous que les autres.

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un Cristallin de Bœuf, il pesoit 47 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre ou de largeur, & 6 lignes d'épaisseur. La capsule s'est d'abord fendüe, & s'est séparée du Cristallin qui nageoit sur la liqueur, elle est devenüe jaune, le Cristallin a blanchi tout aussi-tôt, il s'est formé beaucoup de bulles, la capsule s'est presque entiérement dissoute. J'ai retiré le Cristallin 24 heures après, il étoit jaune à sa surface. Il pesoit 52 grains, il est augmenté de 4 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lignes de diametre, & 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il avoit donc diminué de demi-ligne dans son diametre, & de deux tiers de ligne dans son épaisseur, quoiqu'il eût augmenté de poids. Il étoit fendu en trois rayons du centre à la circonférence, il s'est séché à l'air en 24 heures, & il s'est divisé en piéces qui ressembloient à des côtes de Melon, qui se sont

ſéparées en peau, qui étoient jaunes de Safran, & ſes peaux en fibres très-déliées comme le Criſtallin de l'Homme.

Tous les Criſtallins de Bœufs que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre pur, ont donné les mêmes phénomenes. Il y en a qui n'ont augmenté que d'un grain, d'autres ont diminué de 5 ou 6 grains, quelques-uns ont eu la ſurface très-inégale, molle, enſorte que je n'ai pû en meſurer les dimenſions, & n'ont pû ſe ſécher à l'air qu'en trois fois 24 heures, il s'en eſt trouvé qui étoient mous dans le centre, & d'autres fermes dans toute leur ſubſtance.

J'ai mis un Criſtallin d'Homme dans un mêlange de partie égale d'Eſprit de Nitre & d'Eau commune, il peſoit 4 grains $\frac{1}{4}$, il avoit 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Il a blanchi dans le moment par rayons, il nageoit ſur la liqueur, mais le lendemain il s'eſt trouvé au fond. Je l'ai retiré 24 heures après, il étoit opaque, dur, jaunâtre, fendu en quatre rayons, enveloppé de ſa capſule, qui eſt reſtée tranſparente. Il peſoit 4 grains, il avoit 4 lignes de largeur, & 2 lignes d'épaiſſeur. Il avoit donc diminué d'un quart de grain, & d'un tiers de ligne dans ſon diametre.

J'ai mis un Criſtallin de Bœuf dans le même mêlange d'Eſprit de Nitre & d'Eau, il peſoit 49 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{2}{3}$ d'épaiſſeur. Il a d'abord nagé ſur la liqueur, & eſt devenu blanc en une demi-minute, une heure & demie après il étoit précipité au fond de la liqueur. Je l'ai retiré, il s'eſt trouvé blanc, opaque, fendu en ſix rayons du centre de ſa ſurface antérieure juſqu'auprès de ſa circonférence. Je l'ai remis dans la liqueur, le lendemain je l'ai trouvé nageant ſur la liqueur, je l'ai retiré, il étoit jaune de paille, dur, opaque, fendu plus profondément qu'il n'étoit le jour précédent. Il avoit 8 lignes de diametre ou de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaiſſeur. Il peſoit 44 grains ſans membrane qui peſoit un grain $\frac{1}{2}$, elle étoit tranſparente. Ce Criſtallin a donc diminué dans ſes dimenſions & dans ſa peſanteur.

La même choſe eſt arrivée à un autre Criſtallin dans une pareille liqueur.

Les Criſtallins mis dans l'Eſprit de Sel dulcifié, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans l'Eſprit de Nitre mêlé avec moitié Eau.

Les Criſtallins que j'ai mis dans l'Eſprit de Sel, ont donné à peu-près les mêmes phénomenes que ceux que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre pur. Ils ont nagé ſur cet Eſprit ; ils ont blanchi tout d'abord, puis ils ſont devenus jaunes, ils ſe ſont fendus par rayons, la membrane ou capſule s'eſt diſſoute dans quelques expériences, elle s'eſt trouvée toute entiére dans d'autres, & tranſparente. Ils ont diminué dans leurs dimenſions, mais ce qu'il y a de différent, ils ont toûjours diminués de poids depuis 5 grains juſqu'à 10, & ces Criſtallins étant gardés, ſont toûjours devenus bruns ou noirs, au lieu que les Criſtallins, mis dans l'Eſprit de Nitre & ſéchés, ſont reſtés jaunes de Safran ou aurore.

Les Criſtallins mis dans l'Eſprit de Vitriol pur, ont eu les mêmes phénomenes que ceux qui ont été mis dans le mélange d'Eſprit de Nitre & d'Eau commune. Il y a cela de différent : les Criſtallins, tant d'Hommes que de Bœufs, ſont devenus blancheâtres dans l'Eſprit de Vitriol, ils ont moins diminué dans leur peſanteur & dans leurs dimenſions, principalement ceux de Bœufs, & ils ne ſe ſont fendus qu'après avoir été expoſés à l'air & un peu ſéchés. Les Criſtallins d'Hommes ont d'abord nagé ſur la liqueur, mais le lendemain ils ſe ſont trouvés au fond ; les Criſtallins de Bœufs ont été au fond de la liqueur auſſi-tôt qu'on les y a mis, & ſont devenus tous blancs.

V. M. Antoine Maîtrej. Deſcr. de l'Oeil, c. 11. du Criſtallin.

La même choſe arrive aux Criſtallins trempés dans égale partie d'Eſprit de Vitriol & d'Eau, mais il faut les y laiſſer plus long-temps. Ils n'ont point diminué de peſanteur, il y en a même qui ont augmenté de 2 grains, juſqu'à 4 grains.

J'ai mis des Criſtallins de Bœufs dans l'Eſprit de Vinaigre ; ils ont tous augmenté dans leur poids & leurs dimenſions ; il y en a quelques-uns qui expoſés à l'air, ſe ſont fendus très-réguliérement en ſéchant, mais les autres ſe ſont trouvés irréguliers.

La plûpart des Criſtallins que j'ai mis dans l'Huile de Vitriol, ſont devenus d'un jaune-brun, opaques, mous comme de la pâte, très-irréguliers & inégaux à leur ſurface externe. Si on les expoſe à l'air, ils deviennent d'un brun noir, & ne ſe ſéchent jamais bien, la membrane s'eſt diſſoute ; l'Huile de Vitriol dulcifiée les a rendus opaques, blancs.

Le mêlange d'égale partie d'Huile de Vitriol & d'Eau commune produit le même effet ſur les Criſtallins que l'Eſprit de Vitriol pur.

Nous venons de voir que les Criſtallins trempés 24 heures, plus ou moins, dans les Eſprits acides de Vitriol, de Vinaigre, deviennent opaques, blancs, auſſi-bien que ceux qui ont trempé dans l'Eſprit de Nitre ou de Sel, affoiblis avec de l'Eau. Ces Criſtallins ſe fendent quelquefois dans le temps même qu'ils trempent dans la liqueur, mais pour l'ordinaire ils ne ſe fendent qu'après en avoir été retirés, & avoir été expoſés à l'air pendant quelque temps, & pour lors ils ſe fendent plus ou moins réguliérement en pluſieurs endroits de leurs ſurfaces antérieures & poſtérieures.

Si l'on ſépare ces parties les unes des autres, on les trouve à peu-près ſemblables aux piéces d'un Oignon qu'on auroit coupé par ſon axe en pluſieurs parties : on peut les ſéparer par pellicules, qui jointes & unies enſemble, forment des enveloppes qui ſont emboîtées les unes dans les autres. Chacune de ces pellicules eſt formée par une infinité de filets courbes & déliés comme des fils de Soye grege, comme je l'ai déja dit, & aſſemblés les uns contre les autres à peu-près parallelement.

Tous les Criſtallins ne ſe fendent pas de la même maniére. Ceux d'Hommes ſe fendent de la circonférence au centre ; les fentes commencent à ſe former à la circonférence, & ſe continüent vers le centre, où le plus ſouvent elles n'arrivent pas. Il y a rarement de la régularité dans ces fentes. Ceux de Poiſſons commencent toûjours au centre des deux ſurfaces antérieure & poſtérieure, & ſe continüent d'une ſurface à l'autre.

Les

Les Criſtallins des Animaux à quatre pieds, que nous avons diſſéqués, ſe fendent auſſi du centre de leur ſurface à la circonférence, le plus ſouvent aſſés réguliérement, & ces fentes ſe trouvent diſpoſées de trois maniéres différentes, mais toûjours en rayons.

Dans la premiére les fentes ſe trouvent ſelon la rectitude des fibres, du centre à la circonférence, qui diviſent le Criſtallin en trois parties, chacune deſquelles eſt diviſée en ſix autres, dont chacune forme un angle.

Dans la ſeconde on trouve des Criſtallins diviſés en trois parties, du centre à la circonférence, mais non pas ſelon la rectitude des fibres, car la diviſion ſe fait dans les angles de la premiére ſorte, ce qui fait que chacune de ces trois parties ſe trouve diviſée en douze parties ſelon la rectitude des fibres, mais non pas du centre à la circonférence.

Dans la troiſiéme les Criſtallins ſe diviſent d'abord en trois parties comme dans la premiére maniére, puis ils ſe diviſent en trois autres ſemblables à la ſeconde, mais ces fentes & ces diviſions ſont rarement réguliéres, car il ſe trouve quelquefois plus de diviſions, quelquefois moins, ce qui dépend du plus ou du moins d'adhérance des fibres les unes aux autres qui compoſent le Criſtallin.

Quoiqu'il en ſoit, chaque couche dont le Criſtallin eſt compoſé, eſt produite par une fibre, qui en paſſant & repaſſant de la partie antérieure à la poſtérieure, & de la partie poſtérieure à la partie antérieure, forme le plan de fibres qui produiſent ces couches, à peu-près de la même maniére que Leeuwenhoek, qui a donné tant de belles obſervations faites avec le Microſcope, les repreſente. Il ne dit point qu'il ait mis tremper les Criſtallins dans aucune liqueur, & ne dit pas les moyens dont il s'eſt ſervi pour les préparer, & rendre ces fibres palpables, il paroît ſeulement qu'il a examiné ces Criſtallins tirés nouvellement des Yeux, & qu'il en a examiné d'autres qui ont été expoſés à l'air pendant trois jours. Il s'eſt ſans doute ſervi du Microſcope, quoiqu'il n'en faſſe aucune mention, pour moi je n'ai pû découvrir cette ſtructure par

Arcan. natur. detect. tom. 2. p. 66. de formatione Criſtallini.

aucun Microſcope. Je me ſuis ſervi de Loupes de 6 à 7 pouces de foyer pour mieux découvrir les fibres des Criſtallins que j'ai mis tremper dans les Eſprits acides, mais on peut s'en paſſer; on peut même ſe ſervir de Verre d'un plus petit foyer ſelon la diſpoſition des Yeux, il y a des gens qui découvrent mieux les fibres du Criſtallin avec un Verre de 2 pouces $\frac{1}{2}$ & 3 pouces de foyer, qu'avec des Verres qui en ont plus ou moins.

SOLUTION FORT SIMPLE D'UN PROBLEME ASTRONOMIQUE;

D'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.

Par M. GODIN.

PROBLEME.

25 Février 1730. *TROUVER le point de l'Ecliptique où le mouvement du Soleil en aſcenſion droite eſt égal à ſon mouvement en longitude.*

Figure 1. SOLUTION. Soit EQ un quart de l'Equateur, EC un quart de l'Ecliptique, $pPCQ$ le Colure des Solſtices, p le Pole de l'Ecliptique, P celui de l'Equateur, PE un Méridien mené par l'un des Equinoxes. Soit S le point cherché ſur l'Ecliptique, & Y un autre point auſſi ſur l'Ecliptique infiniment proche du premier, & YZ une portion d'un parallele à l'Equateur, on aura le petit Triangle SZY qu'on peut conſidérer comme plan & rectiligne, dont l'angle YSZ eſt égal à l'angle PSC du triangle ſphérique PSC. Si par le point Y on mene un autre Méridien PYT, la queſtion ſe réduit à trouver le point S de l'Ecliptique, tel que l'arc SY ſoit égal à l'arc RT de l'Equateur.

Dans le Triangle ſphérique PCS rectangle en C, on aura cette proportion,

Sin. PS : Sin. PC :: Rayon : Sin. PSC;

& dans le petit Triangle on aura

YS : YZ :: Rayon : Sin. $YSZ = PSC$,

& parce que $TR = YS$,

TR : YZ :: Rayon : Sin. YSZ;

mais on aura auſſi cette autre proportion,

TR : YZ :: Rayon : Sin. PZ ou PS.

En comparant les deux derniéres analogies, il ſuit que le ſinus de l'angle YSZ ou PSC eſt égal au ſinus de l'arc PS.

Pour trouver la valeur de cet arc, multipliez par la premiére analogie le ſinus de PC complément de l'obliquité de l'Ecliptique par le Rayon, le produit ſera le quarré du ſinus de l'arc PS ou de l'angle PSC; & en logarithmes, ſi l'on ajoûte le logarithme du ſinus de $66° 31'$ au logarith. du ſinus total, la moitié de la ſomme ſera le logarithme du ſinus de l'arc PS qu'on trouvera de $73° 16' 27''$, ſon complément SR ſera donc de $16° 43' 33''$ pour la déclinaiſon du Soleil au point S au temps de ſon mouvement en longitude égal à ſon mouvement en aſcenſion droite, & ſa diſtance SE au plus proche Equinoxe ſe trouvera par cette analogie

Sin. CQ : Sin. SR :: Sin. EC ou le Rayon : Sin. ES qu'on trouvera de $46° 14' 17''$, & par conſéquent SC de $43° 45' 43''$ à quelques ſecondes près de ce qui eſt dans les Tables de M. de la Hire.

Si l'inclinaiſon de l'Orbite d'une Planete étoit de $15°$, le point cherché S ſeroit éloigné du point C de $44° 29' 40''$, & ſi cette inclinaiſon étoit de $1°$ ſeulement, cet arc SC ſeroit de $44° 40' 15''$, car cet arc s'approche d'autant plus de $45°$ que l'inclinaiſon eſt petite, & au contraire; pour 85 degrés d'inclinaiſon, par exemple, il eſt de $16° 18' 50''$, ce qui paroîtra évident, ſi l'on conſidere que le ſinus de l'arc PS doit toûjours être moyen proportionnel entre le rayon & le ſinus de PC, car dans la premiére analogie, en permutant, on aura Sin. PC : Sin. PS :: Sin. $PSC =$ Sin. PS : Rayon;

& par conſéquent plus le ſinus de PC approchera de la grandeur du rayon, c'eſt-à-dire, moins l'arc CQ ou l'inclinaiſon de la Planete ſera grande, & plus la moyenne proportionnelle PS approchera auſſi du rayon, & par conſéquent le point S du point E; ce ſera le contraire, ſi PC eſt plus petite.

On ſe ſervira de la même Méthode pour toutes les Planetes, ſuivant les différentes inclinaiſons de leurs Orbites à l'Ecliptique & à l'Equateur.

Regiomont. Epitom. Almag. lib. 3. prop. 25. Voyés auſſi *Kepler. Epitom. lib. 3. p. 258.*

Regiomontanus a réſolu ce Probleme par les plus grands & les plus petits rapports entre les ſinus des arcs de déclinaiſon & de leurs compléments, & les ſinus des arcs, diſtances de ces points à l'un des Equinoxes ; il trouve 46° 15′ pour l'arc ES, ou 43° 45′ pour SC ; mais ſuppoſant ſon obliquité de l'Ecliptique de 23° 28′, moindre que celle que je ſuppoſe de 23° 29′, il devoit trouver l'arc SC plus grand d'une minute entiére ou environ ; ce qui doit venir de ſon calcul.

Stevin. Hypomnem. mathem. tom. 1. coſmogr. part. 3. de mot. cæleſt. p. 148. & ſeq.

Stevin a auſſi réſolu le Probleme d'après *Regiomontanus*, & par la même méthode, il a prétendu l'éclaircir, mais il l'a rendu trop diffuſe. Il ſuppoſe l'obliquité de l'Ecliptique de 23° 51′ 20″, d'où il trouve l'arc SC de 43° 43′ 16″ $\frac{1}{4}$.

Mem. de l'Acad. 1704. p. 134.

Enfin M. *Parent* en a donné une Solution dans laquelle il employe le Calcul différentiel : je crois l'avoir réſolu plus ſimplement, & d'une maniére plus aſtronomique.

Dans l'ancienne démonſtration de *Regiomontanus*, on ſuppoſe que le point S eſt tellement pris, que l'arc PS eſt moyen proportionnel entre le rayon & le ſinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, mais on n'y démontre pas pourquoi cela donne la ſolution du Probleme.

Dans celle de M. *Parent* il trouve la Tangente de la diſtance du Solſtice au point S, moyenne proportionnelle entre le rayon & le ſinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, d'où il ſuit que cette Tangente eſt égale au ſinus, complément de la déclinaiſon du Soleil au point S de ſon mouvement médiocre.

Si l'on connoiſſoit le lieu du point *S* dans l'Ecliptique, indépendamment du lieu des points *E* & *C*, c'eſt-à-dire, quelle que fût la longitude de ces points, en connoiſſant ſeulement la plus grande diſtance *CQ* de l'Orbe *EC* à l'Orbe *EQ*, on détermineroit la longitude de ces points *E* & *C*; & par conſéquent 1.° ſi *EQ* repréſente l'Ecliptique, & *EC* l'Orbite d'une Planete, connoiſſant l'inclinaiſon *CQ* de cet Orbite à l'Ecliptique, on trouvera par la méthode ci-deſſus, la valeur des arcs *SR*, *SC*, & *SE*; & trouvant par obſervation le lieu de la Planete en *S* dans le temps que ſon mouvement *SY* ſur ſon Orbite eſt égal à ſon mouvement en longitude *TR* ſur l'Ecliptique, ou bien obſervant ce lieu *S* dans le temps que l'inclinaiſon apparente *SR* de la Planete eſt égale à celle qu'on a déterminée par calcul, on aura auſſi le lieu des points *C* & *E*, c'eſt-à-dire, des limites & des Nœuds de cette Planete; le Nœud, par exemple, aura une plus grande longitude que le point *S* de tout l'arc déterminé *SE*, ſi la latitude de la Planete va en décroiſſant, & au contraire elle ſera moindre, ſi la latitude va en augmentant. Figure 1.

2.° Si *EC* eſt toûjours l'Orbite de la Planete, & que *EQ* ſoit l'Equateur, connoiſſant par obſervation la plus grande déclinaiſon *CQ* de la Planete, on déterminera comme ci-deſſus les valeurs de *SR*, *SC*, & *SE*; obſervant donc le lieu de la Planete, lorſqu'elle a une déclinaiſon *SR* égale à la calculée, ou lorſque ſon mouvement ſur ſon Orbite eſt égal à ſon mouvement en aſcenſion droite, on aura l'aſcenſion droite du point *S* ou *R*, & par conſéquent celles des points *E* & *C*, c'eſt-à-dire, qu'on connoîtra le point de l'Equateur où l'Orbite de la Planete le coupe, & le point de l'Equateur auquel répondent les limites de cet Orbite.

Mais connoiſſant le point où l'Orbite d'une Planete coupe l'Equateur, & le point où l'Ecliptique coupe auſſi l'Equateur, on connoîtra le point d'interſection de l'Orbite de cette Planete & de l'Ecliptique, il ne faut pour cela que réſoudre le Triangle ſphérique *AFG* dans lequel *AG* repréſente l'Equateur, *AF* l'Ecliptique, & *GF* l'Orbite de la Planete. Dans Figure 2.

ce Triangle on connoît le côté *AG*, différence d'aſcenſion droite entre *A*, l'un des Equinoxes, & *G* le point de l'Equateur où il eſt coupé par l'Orbite de la Planete ; l'angle en *A* eſt l'obliquité de l'Ecliptique, & l'angle en *G*, ou ſon ſupplément, eſt l'obliquité de l'Orbite de la Planete égale à ſa plus grande déclinaiſon obſervée ; donc on connoîtra le côté *AF*, diſtance du Nœud de la Planete à l'un des Equinoxes, & l'angle en *F* de l'inclinaiſon de l'Orbite de cette Planete à l'Ecliptique.

On peut donc trouver le lieu des Nœuds d'une Planete par l'obſervation de ſon inclinaiſon à l'Ecliptique & de ſa déclinaiſon au temps, de ſon mouvement médiocre ſur ſon Orbite par rapport à ſon mouvement ſur l'Ecliptique & à ſon mouvement en aſcenſion droite.

Mais cette théorie ſi ſimple ne ſuffit abſolument que lorſqu'on eſt au centre des Cercles *EC* & *EQ*, & que les arcs *CQ*, *SR*, ſont les véritables latitudes ou déclinaiſons, & qu'elles ſont invariables, c'eſt-à-dire, non ſujettes à des inégalités optiques, elle ne convient donc, par rapport à la recherche des Nœuds des Planetes, qu'à un Obſervateur qui ſeroit dans le Soleil ſuppoſé immobile au centre du mouvement de ces Planetes. De ce centre ſeul les arcs *CQ* & *SR* meſurent les véritables inclinaiſons des points *C* & *S* ; car comme les plus grandes latitudes ou déclinaiſons *CQ*, vûës de la Terre, ſont variables ſuivant le plus ou le moins de diſtance de la Terre à la Planete, le point *S* & par conſéquent le lieu du Nœud *E* auroient autant de poſitions différentes que *CQ* auroit de différentes valeurs. Donc les plus grandes latitudes ou déclinaiſons, vûës de la Terre, ne peuvent ſervir à la ſolution de ce Probleme, ſi ce n'eſt lorſqu'elles ſont égales à ces mêmes choſes vûës du Soleil, c'eſt-à-dire, lorſque la Planete poſée dans ſes limites, eſt également éloignée du Soleil & de la Terre, ou en quadrature environ avec le Soleil, ce qui eſt un cas fort rare.

Figure 1.

Cependant comme la détermination des Nœuds des Planetes eſt très-importante, & qu'on ne ſçauroit avoir trop de

Méthodes pour arriver au même but, lorſque chacune a ſa difficulté, voici de quelle maniére j'employe celle-ci à cette recherche.

Je ſuppoſe ſeulement que l'on connoiſſe la théorie du Soleil ou de la Terre, & les diſtances de la Planete au Soleil, d'où ſuit la connoiſſance de ſes diſtances à la Terre.

Soit *S* le Soleil, *T* la Terre. *APL* eſt l'Orbite d'une Planete poſée en *P*. *ARM* eſt l'Ecliptique. Le point *A* un des Nœuds de la Planete. Connoiſſant *LM* la plus grande inclinaiſon de l'Orbite de la Planete à l'Ecliptique vûë du Soleil, on trouvera, comme ci-deſſus, l'inclinaiſon *PR* vûë du Soleil telle que la Planete poſée en *P* paroîtra décrire ſur ſon Orbite un arc égal à ſon arc correſpondant ſur l'Ecliptique. Si l'on prend donc, de la maniére dont on va dire, le lieu de la Planete ſur l'Ecliptique en *R* par rapport au premier point d'*Aries*, dans le moment que cette Planete a l'inclinaiſon calculée, dans le Triangle ſphérique *APR* rectangle en *R*, on connoît le côté *PR*, & l'angle en $A = LM$; on connoîtra donc *AR*, & par conſéquent le lieu du Nœud *A* ſur l'Ecliptique, vû du Soleil. Figure 3.

Je ſuppoſe donc que l'on obſerve continuellement les latitudes apparentes de la Planete, c'eſt-à-dire, l'angle *PTR*, & que par les diſtances connües du Soleil à la Terre & à la Planete, on détermine laquelle de toutes les latitudes *PR* obſervées, eſt égale à l'inclinaiſon calculée vûë du Soleil, en ce cas le point *P* ſera celui d'égalité du mouvement de la Planete ſur ſon Orbite, & en longitude ſur l'Ecliptique; & ſi l'on obſerve dans le même moment le lieu de la Planete ſur l'Ecliptique en *R*, vû de la Terre, qui donnera l'angle *CTR*, on aura, en réſolvant le Triangle *RST*, dont les trois côtés & l'angle en *T* ſont connus, l'angle *RST* qui comparé avec le lieu héliocentrique de la Terre, donnera la véritable longitude héliocentrique de la Planete réduite à l'Ecliptique; d'où l'on conclurra, comme ci-deſſus, le vrai lieu de la Planete.

Pour les Planetes qui ont des Satellites, le Probleme devient en certains cas plus facile, car on peut quelquefois y

déduire immédiatement de l'obſervation ce qu'on vient de déterminer par les diſtances, qui eſt ce qu'on appelle la ſeconde inégalité de la Planete ; car ſi l'on ſçait aſſés préciſément le temps de la révolution périodique d'un Satellite autour de ſa Planete, on obſervera très-aiſément la valeur de l'arc *OE* de l'Orbite du Satellite compris entre le milieu *O* de ſa demeure dans l'ombre de la Planete & le point *E* où il paroît vû de la Terre en conjonction avec ſa Planete ; cet arc eſt égal à l'angle *TPS* ; ainſi dans le Triangle *TPS*, on connoît *ST* l'angle *TPS* & l'angle *STP*, différence entre les lieux apparents du Soleil & de la Planete, on connoîtra donc le côté *TP*; & dans le Triangle *RTP* rectangle en *R*, on connoît l'angle en *T* & le côté *TP*; donc on connoîtra *TR*. Enfin dans le Triangle *RTS* on connoît *ST* & *TR*, & l'angle compris *STR*, ce qui donnera l'angle *RST*, différence de longitude entre la Terre & la Planete vûës du Soleil, d'où l'on conclurra, comme ci-devant, le vrai lieu du point *A*, Nœud de la Planete.

Je ſuppoſe ici, comme on voit, qu'on puiſſe obſerver l'immerſion & l'émerſion du Satellite de l'ombre de ſa Planete, ce qui ne ſe peut pas dans tous les Satellites, dans le premier de Jupiter, par exemple, & très-rarement dans le ſecond.

On trouvera de la même maniére le point de l'Equateur où il eſt coupé par l'Orbite d'une Planete vûë du Soleil.

Par ces Méthodes on multiplie les points des Orbites des Planetes qui peuvent ſervir à déterminer la poſition de leurs Nœuds ; par la Méthode ordinaire, qui eſt d'obſerver la Planete proche de ſes Nœuds mêmes lorſque ſa latitude change de dénomination dans l'eſpace de quelques jours, on n'a, dans toute la révolution d'une Planete, que deux occaſions favorables de faire ces obſervations, & il faut, de même que nous venons de faire, y ſuppoſer les diſtances de la Planete à la Terre & au Soleil, pour changer les latitudes apparentes & la poſition apparente du Nœud en inclinaiſons & en vrai lieu héliocentrique du Nœud.

Il reste à donner, dans une suite, quelques exemples de ces Méthodes pour différentes Planetes, fondées sur des observations, afin qu'on puisse plus sûrement juger du degré de précision qu'on en peut attendre.

MÉMOIRE SUR LE SEL LIXIVIEL DU GAYAC.

Par M. BOURDELIN.

DANS le Mémoire que je présentai en 1728 à l'Académie, sur la formation des Sels alkalis, je tâchai de prouver que ces Sels n'étoient que des Sels décomposés, & que si la partie grasse des Végétaux contribuoit à leur formation, ce n'étoit qu'en enlevant au Sel essentiel une grande partie de ses Acides, & point du tout en s'unissant avec ce même Sel essentiel, comme le veut M. Stahl, & comme il prétend le prouver par une expérience que je rapportai d'après lui, & de laquelle je tirai des conséquences toutes différentes, & tout-à-fait opposées à celles qu'il en tire. Dans le même Livre, le même Auteur rapporte une expérience assés singuliére, concernant ce sujet. On a crû jusqu'ici que le feu formoit seul les Sels alkalis que l'on tire des matiéres végétales, que cet agent n'avoit besoin, pour former ces Sels, d'aucune aide de la part du Chimiste, ni d'aucune préparation, & qu'il suffisoit de lui livrer une Plante desséchée pour qu'il formât, en la détruisant, autant de Sel lixiviel qu'elle contenoit de matiére propre à s'alkaliser. Mais dans l'expérience de M. Stahl la chose se passe différemment; le Chimiste paroît avoir grande part à la production du Sel alkali; ce n'est qu'après que son industrie a tiré du Mixte les matériaux nécessaires pour la composition de ce Sel, qu'il les a rapprochés, &, pour ainsi dire, présentés l'un à l'autre, que le feu les combine, les unit 28 Janvier 1730.

plus étroitement, & opere par ce moyen, & avec ce ſecours, une production de Sel alkali bien plus abondante. Voici le fait.

M. Stahl fait remarquer, en parlant des Sels alkalis, qu'il y a quelques Végétaux qui n'en donnent pas tant par l'opération ordinaire, c'eſt-à-dire, lorſque l'on ſe contente de les faire ſécher & de les brûler, que lorſqu'on s'y prend d'une autre façon. Il rapporte pour exemple le bois de Gayac, dont » on ne tire, dit-il, par l'incinération ſeule, que très-peu de Sel » alkali ; mais ſi l'on prend, dit M. Stahl, les rapures de ce » même bois, qu'on les faſſe boüillir un certain temps, que » l'on en faſſe évaporer la décoction lentement, & juſqu'à ſic- » cité, la matiére qui reſte, étant brûlée & légerement calcinée, » donne infiniment plus de Sel fixe. Voilà l'expérience de M. Stahl, voyons l'explication qu'il en donne.

» Pour expliquer ce phénomene, dit M. Stahl, il eſt proba- » ble que les parties ſalines nitreuſes qui ſont contenües dans » le Gayac, y ſont logées ſéparément & à quelque diſtance des » parties huileuſes qui ſont renfermées dans leurs petites loges » particuliéres. Cela fait que dans l'inſtant de la déflagration, » le feu pouſſe & chaſſe hors du Mixte ſéparément les parties » ſalines & les parties huileuſes, qui par ce moyen ne peuvent » pas ſe toucher, ſe joindre, brûler enſemble, & ainſi ſe com- » biner pour compoſer le Sel alkali ; au lieu que ſi, par la » coction, on tire de leurs cellules chacun de ces deux prin- » cipes, enſorte qu'ils puiſſent ſe confondre librement enſemble » dans l'eau, & que par le moyen de l'épaiſſiſſement de la ma- » tiére qui reſte après l'évaporation pouſſée juſqu'à ſiccité, les » particules ſalines & huileuſes puiſſent s'accrocher enſemble, » & ſe mêler les unes avec les autres, & qu'alors on brûle cette » matiére, l'action du feu peut combiner plus facilement les » deux principes qui dans cet état ſe touchent immédiatement, » & de cette combinaiſon ſuit l'effet qu'on doit attendre, c'eſt- » à-dire, la production du Sel alkali. M. Stahl, dans cette explication de ſon expérience, ne s'écarte point de ſes principes, & déduit toûjours la formation du Sel alkali d'une Plante, du mêlange & de l'union intime & durable qui ſe fait du Sel

effentiel de cette Plante avec fa partie graffe par le moyen du feu, & dans le fein du feu.

Il y a plufieurs chofes dans cette explication qu'un Lecteur attentif ne fçauroit aifément paffer. Mais, fans entrer dans un plus grand détail, fur quel fondement M. Stahl fuppofe-t-il une diftance fi éloignée entre les particules falines & huileufes dans le bois de Gayac ? Quelle preuve en pourroit-il apporter ? Si l'on regarde le Gayac comme les autres Plantes, c'eft-à-dire, comme un affemblage de Vaiffeaux ou de Tuyaux arrofés par des liqueurs, dans lefquelles tous les principes de la Plante, & par conféquent l'Huile & le Sel effentiel, font déja renfermés, &, pour ainfi dire, combinés par la Nature, on accordera difficilement à M. Stahl les différents logements, & les cellules écartées qu'il affigne à ces deux principes. M. Stahl alléguera-t-il en fa faveur une apparence d'analogie qui peut fe rencontrer entre les Plantes & les Animaux, dans lefquels, par le moyen des fécrétions, différentes humeurs fe trouvent renfermées féparément dans différents réfervoirs ? Mais pour lors on fera en droit de pouffer l'analogie plus loin, & de dire que comme dans les Animaux il fe trouve par-tout de l'Huile & du Sel mêlés enfemble, il doit auffi s'en trouver par-tout dans les Plantes. Il eft bien vrai que dans certaines liqueurs des Animaux, on découvre diftinctement que certains principes y dominent. Mais ces mêmes principes s'y trouvent-ils dans leur premiére fimplicité, s'y trouvent-ils totalement dégagés les uns des autres ? Rencontre-t-on, par exemple, du Sel pur, de l'Huile pure ? Les graiffes des Animaux ne contiennent-elles pas du Sel, même en affés grande quantité ? Dans la Bile, toute fulphureufe qu'elle eft, ne démêle-t-on pas, même par le feul goût, le Sel qui y eft mêlé ? Avanceroit-on avec raifon, que dans la Salive il ne fe trouve purement & fimplement que du Sel ? De même dans les Plantes, leurs fucs les plus aqueux en apparence, ne contiennent-ils que du Sel, ne s'y rencontre-t-il pas quelque portion d'Huile ? Quoique la Réfine foit la partie graffe des Plantes, cette Réfine n'eft-elle purement que de l'Huile ? Quand on la

brûle, ne donne-t-elle pas du Sel alkali? preuve qu'elle contient une portion de Sel eſſentiel qui ſe décompoſe dans le feu. Mais ſi, dans les Végétaux, comme dans les Animaux, la partie ſaline & la partie graſſe ſe trouvent mêlées enſemble, même dans les liqueurs dans leſquelles on auroit le plus lieu de croire qu'elles exiſtent ſéparément l'une de l'autre, que doit-on penſer de tout le corps de la Plante en général, dont les canaux contiennent les Sucs qui ſont l'origine & la ſource de toutes les ſécrétions qui ſe font dans la Plante, comme le Sang l'eſt de celles qui ſe font dans l'Animal, & dans leſquels par conſéquent ces deux principes ſont contenus confuſément, avant de ſe ſéparer pour être renfermés dans leurs différents réſervoirs. M. Stahl ne nie pas non plus qu'il ſe rencontre du Sel & de l'Huile combinés enſemble dans toute l'étendüe de la Plante, puiſqu'il avoüe qu'en brûlant le Gayac à la façon ordinaire, on en tire du Sel alkali, mais on l'en tire, dit-il, en moindre quantité. La difficulté ne roule donc que ſur le plus ou le moins, & le Gayac donne moins de Sel alkali par ce procédé, parce que la diſtance éloignée qui ſe rencontre, ſelon M. Stahl, entre l'Huile & le Sel dans ce bois, fait qu'une grande partie de ces deux principes échappe au mêlange & à la combinaiſon que le feu en feroit, s'ils étoient plus rapprochés, & ſi toute l'Huile requiſe pour la formation du Sel lixiviel pouvoit ſe combiner avec tout le Sel eſſentiel.

Je n'oppoſerai à ce raiſonnement que l'expérience que fournit le Nitre fixé par les charbons. Ce Sel ne s'alkaliſe que par le moyen de la poudre de Charbon que l'on y jette, lorſqu'il eſt en fuſion dans le Creuſet qui le contient. Il ſe fait, pour lors, une liaiſon étroite & une union de la partie graſſe du charbon avec l'acide du Nitre qu'elle emporte avec elle, & à qui elle fait ſuivre la même détermination de mouvement qu'elle a reçû du feu, & qu'elle ſuit elle-même, comme j'ai tâché de le prouver dans mon Mémoire de 1728. Il ſe fait donc, avant cette ſuite de l'Acide nitreux, une liaiſon de la partie graſſe du Charbon avec ce Sel. Mais pourquoi la même

chose n'arrivera-t-elle pas entre l'Huile & le Sel essentiel d'une même Plante? L'Acide du Nitre & la partie grasse du Charbon sont deux substances tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, cependant elles s'unissent lorsque l'on jette la poudre de Charbon dans le Creuset; tout le Nitre qui y est contenu se décompose, & devient du Sel alkali. Est-il vrai-semblable qu'il se trouve plus de proximité entre ces deux substances, qu'il ne s'en trouve entre deux pareils principes renfermés dans une même Plante, & que la Nature avoit intimement mêlés & combinés dans les liqueurs & le suc nourricier qui a servi à la végétation, l'accroissement & la conservation de cette Plante? Que l'on explique la formation du Sel alkali par l'union fixe & durable de la partie grasse avec le Sel essentiel entier, selon l'hypothese de M. Stahl, ou qu'on l'explique, selon la mienne, par la liaison qui se fait de cette même partie grasse avec l'Acide seulement du Sel essentiel, lequel Acide est emporté par elle; toûjours, selon l'un ou l'autre sentiment, se fait-il une union étroite, & toûjours sera-t-on fondé à demander pourquoi cette union se fait entre deux matiéres tout-à-fait étrangeres l'une à l'autre, & pourquoi elle ne se feroit pas entre deux semblables substances, qui sont déja rassemblées & mêlées ensemble dans un même Végétal. Mais passons du vrai-semblable au vrai; après avoir réfuté sommairement l'explication de M. Stahl, suivons son expérience, & éxaminons-en la vérité.

La premiére fois que je lûs avec attention l'expérience de M. Stahl, sa singularité fit naître en même temps ma surprise & mes doutes. Je trouvois qu'il y avoit de l'industrie à remédier ainsi à l'empêchement que la Nature sembloit avoir formé dans le Gayac à une production abondante de Sel alkali. Mais je n'étois pas bien convaincu de la réalité de l'obstacle, ni de l'efficacité du remede qu'on y apportoit. Malgré la grande réputation que s'est acquis M. Stahl, & qu'il s'est acquis à juste titre, la confiance que j'avois à une expérience qu'il citoit, & que je devois supposer qu'il avoit faite, ne pût jamais aller jusqu'à me persuader que la simple décoction du

Gayac dût apporter un si grand changement dans la quantité de Sel fixe qu'on en tire. Je ne concevois pas que l'Eau boüillante seule, soit comme échauffée par le feu, soit comme composée de parties qui, à l'aide du feu, pussent s'insinuer dans les pores d'un Mixte, eût assés d'efficacité pour tirer d'un bois, dont le tissu est aussi serré & aussi dense que l'est celui du Gayac, une si grande quantité de Sel essentiel. La peine que j'avois à concilier mes idées avec l'expérience de M. Stahl, me fit prendre le parti de la réïtérer d'après lui. Mais comme il ne suffisoit pas de tirer le Sel alkali de la décoction résineuse du Gayac, & qu'il falloit le comparer avec celui que fourniroit une pareille quantité de Gayac brûlé à la façon ordinaire, j'en ai brûlé de trois façons différentes. J'ai brûlé le Gayac en morceaux, comme on le fait ordinairement, j'en ai brûlé en rapures, & enfin j'ai fait boüillir, pour mon expérience, des rapures de Gayac, desquelles j'ai tiré la Résine par ce moyen, & ces mêmes rapures boüillies & dépoüillées de leur partie grasse, je les ai fait sécher, & les ai brûlé ensuite.

De quelque façon que j'aye brûlé le Gayac, soit en rapures qui eussent boüilli, soit en rapures qui n'eussent point boüilli, soit en substance, je veux dire en morceaux, j'en ai toûjours brûlé six livres à la fois. De ces trois façons différentes, la plus simple fut celle qui me donna à la premiére opération le plus de Sel lixiviel. Six livres de Gayac brûlé en morceaux m'en fournirent un gros & 7 grains, c'est-à-dire, 79 grains. Pareil poids de rapures ne me donna que 39 grains. Je n'insisterai point ici sur la raison qui fit que les rapures me donnerent moins de Sel que le bois. Je dirai seulement que je crois qu'il y eut de ma faute, parce que je ne lessivai leurs cendres que deux fois, & peut-être une troisiéme ou une quatriéme lessive m'auroient-elles donné encore assés de Sel lixiviel pour égaler la quantité que m'en avoit fourni le Gayac brûlé en morceaux.

Je pris six autres livres de Gayac en morceaux, je le brûlai, je le réduisis en cendres, que je calcinai ensuite dans le

Creuſet, elles ne me fournirent en deux évaporations que 51 grains de Sel, ſçavoir 45 grains à la premiére, & 6 à la ſeconde. Je pris enſuite des rapures de Gayac, que j'avois fait boüillir pendant ſix heures, & qui peſoient ſix livres avant l'ébullition. Je les fis ſécher pour les brûler. Leurs cendres calcinées & leſſivées me fournirent en trois évaporations 58 grains de Sel lixiviel. On voit par-là que ſi dans la premiére expérience le Gayac en morceaux l'avoit emporté par le produit du Sel lixiviel ſur les rapures, dans celle-ci les rapures, quoique boüillies, & qui devoient avoir perdu une partie de leur Sel, l'ont cependant réciproquement emporté ſur le bois.

Quand même j'aurois été bien perſuadé de la vérité & de l'exactitude de l'expérience de M. Stahl, cette ſeule circonſtance auroit ſuffit pour faire naître mes doutes. Les rapures de Gayac boüillies & ſéchées, reſſembloient trop par leur produit au bois de Gayac brûlé en morceaux, & en approchoient de trop près pour que je puſſe attendre de la matiére réſineuſe, provenant de la décoction épaiſſie, une quantité conſidérable de Sel lixiviel. Car comme il ne pouvoit ſe trouver de Sel dans cet extrait réſineux, qu'à proportion de ce que pouvoient lui en avoir communiqué les rapures de Gayac, & par conſéquent à proportion de ce qu'elles en avoient perdu, il n'étoit pas naturel d'attendre de cette matiére réſineuſe une grande quantité de Sel lixiviel, lorſque les rapures, qui avoient fourni dans la décoction cette même Réſine, conſervoient encore tant de Sel. J'aurois eu quelque ſujet de me flatter plus juſtement de l'eſpérance que donne M. Stahl, ſi j'avois vû que l'ébullition eût dépoüillé mes rapures de Gayac de leur Sel, au point qu'elles ne m'en euſſent preſque pas fourni en les brûlant, après les avoir fait ſécher. Pour lors il y auroit eu quelque raiſon d'attendre de la décoction épaiſſie la multiplication conſidérable de Sel fixe que M. Stahl en promet. Car à s'en rapporter aux termes dans leſquels s'exprime M. Stahl, il ſemble que le Gayac, dont on a tiré la teinture ou l'extrait par le moyen de l'ébullition, devienne,

pour ainsi dire, une Tête-morte, & une matiére absolument dénuée de tout son Sel, & que tout ce Sel passe dans la décoction, dans laquelle il doit produire par l'incinération, en se combinant avec la partie grasse, une quantité de Sel lixiviel infiniment, & sans aucune comparaison plus considérable que n'en donne le Gayac brûlé à la façon ordinaire. Que M. Stahl regarde les rapures de Gayac qui ont boüilli comme une Tête-morte dénuée de son Sel essentiel, il n'y a presque pas lieu d'en douter; il paroît en faire si peu de cas, que uniquement attentif au produit de l'extrait, il semble rejetter comme inutiles les rapures qui l'ont fourni, & ne conseille même pas de les brûler après en avoir tiré la Résine & le Sel par le moyen de la décoction. Il me reste maintenant à détailler mon expérience telle que je l'ai faite d'après M. Stahl.

Je pris six livres de rapures de Gayac. Je les fis boüillir pendant six heures. J'en fis évaporer la décoction jusqu'à siccité. Il me resta de cette évaporation 7 gros de matiére résineuse, & ces 7 gros de matiére résineuse ne me donnerent, par la calcination & la lessive des cendres, que 4 grains de Sel lixiviel. Quoique la quantité de Sel lixiviel que m'avoient donné mes rapures boüillies & séchées, eût commencé à me faire soupçonner le peu que m'en fourniroit leur résidu résineux, un reste de préjugé pour une expérience citée par M. Stahl, & que je devois croire qu'il avoit fait lui-même, me tenoit encore en suspens; & j'avoüerai que je vis avec surprise combien ma méfiance fut justifiée. J'avois travaillé auparavant de la même maniére douze livres de rapures de Gayac. J'en avois tiré 10 gros d'extrait résineux, qui ne m'avoient produit que 14 grains de Sel lixiviel. Mais il m'étoit arrivé un accident en faisant cette opération. Un grand Vaisseau de terre, dont je me servois pour faire boüillir mes rapures de Gayac, s'étoit cassé sur le feu, après y avoir été cinq heures. Il s'étoit répandu une certaine quantité de décoction, je ne sçavois à quoi pouvoit monter ce déchet. Cet accident, joint au peu de Sel lixiviel que j'avois tiré de l'extrait résineux de ces douze livres de rapures, me fit naître

quelques ſcrupules. Comme j'avois toûjours préſente à l'eſprit l'explication que M. Stahl donne à ſon expérience, & la quantité conſidérable de Sel lixiviel que produit ſelon lui le Gayac travaillé de cette façon, je ne doutai preſque point que l'opération ne fût manquée, & que ce ne fût ma faute ſi le Gayac m'avoit ſi peu donné de Sel lixiviel. Je pris donc le parti, pour ma propre ſatisfaction, de réïtérer l'expérience avec ſix livres de rapures de Gayac, comme je viens de le dire ci-deſſus. Elle fut exactement faite, & ſervit à diſſiper mes doutes. Quand je vis que 7 gros d'extrait réſineux, provenant de la décoction de mes ſix livres de rapures de Gayac, ne me donnoient que 4 grains de Sel lixiviel, je trouvai qu'il n'étoit point étonnant que 10 gros de pareil réſidu, provenant des douze livres de rapures de Gayac que j'avois travaillé précédemment, ne m'euſſent donné que 14 grains de ce même Sel. Ce raiſonnement me parut pendant quelque temps aſſés plauſible, & j'en ſerois demeuré-là, ſi une derniére réfléxion ne m'en eût empêché.

Il eſt difficile de vouloir être exact, ſur-tout en Chimie, ſans devenir un peu ſcrupuleux. Comme M. Stahl, dans l'expoſé de ſon expérience, ne limite point la durée de l'ébullition du Gayac, & qu'il dit ſimplement qu'il faut le faire boüillir un peu de temps, j'imaginai que je n'avois peut-être pas donné à ſes termes toute leur étendüe, & que faute de cela je n'avois pas pouſſé l'ébullition aſſés loin. Ce ſcrupule ne me permit pas de m'en tenir à mes expériences précédentes, il fallut les réïtérer de nouveau. Je n'avois donné que ſix heures de feu à la décoction des derniéres rapures de Gayac dont j'avois tiré la Réſine, je pris le parti de leur en donner douze cette fois-ci. Je fis acheter douze livres de rapures de Gayac. Je les partageai en deux ; j'en pris ſix, que je brûlai comme j'avois déja fait, ſans autre préparation. Elles me donnerent à la premiére leſſive 90 grains de Sel lixiviel. Les ſix livres reſtantes, je les fis boüillir douze heures entiéres, ayant ſoin de renouveller de temps en temps l'eau, de crainte qu'elle ne ſe tarît, & que la matiére ne ſe brûlât pêle-mêle,

c'eſt-à-dire les rapures, & la Réſine que l'eau boüillante en détachoit. J'eûs de cette décoction 9 gros de Réſine, au lieu que des ſix livres que j'avois fait boüillir précédemment, je n'en avois tiré que 7 gros. Cette augmentation d'extrait me fit eſpérer plus de Sel lixiviel, & mon eſpérance ſe trouva bien fondée. Je tirai de mes neuf gros d'extrait réſineux, après la calcination & la leſſive des cendres, 32 grains de Sel lixiviel. C'étoit, à la vérité, beaucoup plus que je n'en avois tiré dans mes deux opérations antérieures ; mais cela ne répondoit cependant pas, à beaucoup près, aux promeſſes de M. Stahl, ni au produit des ſix livres de rapures que je venois récemment de brûler ſans les avoir dépoüillé de leur partie graſſe. Il y avoit encore loin de 32 à 90. J'étois bien ſûr de mes rapures, elles étoient les mêmes ; ainſi je devois en obtenir au moins la même quantité de Sel lixiviel par le procédé de M. Stahl que par le mien. Cependant tout le produit de la Réſine calcinée & leſſivée ſe bornoit à 32 grains. Il falloit donc que les rapures, qui avoient boüilli, conſervaſſent ce qui manquoit de Sel à la décoction épaiſſie. Pour m'en aſſûrer, j'eûs encore recours à la calcination des cendres des rapures dont j'avois tiré la Réſine. Six livres de ces rapures que j'avois employé pour la décoction, s'étoient réduites à cinq. Elles étoient beaucoup plus brunes que les autres qui m'étoient reſtées des opérations précédentes. Je brûlai ces cinq livres ; les cendres qui en provinrent, ayant été bien calcinées, devinrent d'une couleur approchante d'un chamois un peu foncé. Elles ſe réduiſirent en une poudre auſſi fine que ſi elle eût été porphyrizée, & qui s'envoloit pour peu qu'on remuât le Creuſet qui les contenoit. Ces cendres ne ſe pelotonnerent point, comme le font ordinairement, ſur la fin de la calcination, celles qui contiennent beaucoup de Sel lixiviel. Leur ſéchereſſe & leur légereté me fit mal augurer d'abord de leur richeſſe, cependant ma prévention ſe trouva mal fondée. Ces cendres, tout arides qu'elles paroiſſoient, m'ont donné un tiers & preſque moitié plus de Sel lixiviel que celles du réſidu réſineux. J'ai fait de chacune de ces trois ſortes de cendres

ſix leſſives. Les rapures qui n'avoient point boüilli, & qui avoient été brûlées à la façon ordinaire, m'ont donné en tout 130 grains de Sel lixiviel. Les rapures qui avoient boüilli pendant douze heures entiéres, & dont j'avois tiré la Réſine, m'ont donné 78 grains, & l'extrait réſineux provenant de ces mêmes rapures boüillies, & duquel M. Stahl promet un produit ſi abondant, ne m'a donné que 47 grains & demi de Sel lixiviel.

Il eſt aiſé de voir, par le détail de cette derniére expérience, que j'avois eu quelque raiſon de douter de l'exactitude & de la vérité de celle que rapporte M. Stahl. Tant s'en faut que les cendres de l'extrait réſineux ne l'emportent par l'abondance de leur Sel lixiviel ſur celles des rapures de Gayac brûlé à la façon ordinaire, qu'au contraire elles le cedent en quantité, même aux cendres des rapures qui ont boüilli, deſquelles cet extrait réſineux eſt le produit. Il ne ſe trouve donc plus rien d'étonnant ni de myſtérieux dans l'opération de M. Stahl. La décoction emporte une partie du Sel eſſentiel du Gayac, & le confond avec la partie graſſe de ce bois; de-là il réſulte dans la décoction épaiſſie, autant de Sel fixe que l'ébullition a ôté de Sel eſſentiel aux rapures. Ce qui en eſt reſté aux rapures après l'ébullition, ſe retrouve en Sel lixiviel dans leurs cendres. Ainſi tirer le Sel lixiviel du Gayac à la façon de M. Stahl, ce n'eſt que diviſer un tout en deux parties, c'eſt obtenir par deux opérations ce qu'on peut obtenir par une ſeule, c'eſt augmenter la peine ſans augmenter le profit.

On me demandera peut-être d'où vient que les cendres du Gayac qui a été brûlé à la façon ordinaire, ont donné ſeules plus de Sel lixiviel que celles des rapures boüillies & de l'extrait réſineux jointes enſemble, puiſque celles-ci ont fourni quatre grains & demi moins que les autres. La réponſe eſt aiſée à faire. Après l'évaporation d'une leſſive, on a beau gratter le vaiſſeau dans lequel elle a été faite, quelque ſoin que l'on prenne, il y reſte toûjours un peu de Sel, & cette petite quantité du Sel lixiviel qui s'attache au vaiſſeau eſt

proportionnée à l'étendüe de la surface de ce même vaisseau. Quelque peu sensible que paroisse ce déchet dans une seule évaporation, il doit le devenir, & augmenter après plusieurs opérations. Les rapures de Gayac, qui m'ont servi dans ces derniéres expériences, étoient les mêmes, puisque je n'avois fait qu'en partager douze livres en deux parts. Elles devoient par conséquent contenir autant de Sel les unes que les autres. Mais ces trois sortes de cendres ont été lessivées chacune six fois, comme je l'ai déja dit. Regardons maintenant les cendres du résidu résineux & celles des rapures boüillies, comme deux parties ne faisant qu'un même tout, c'est-à-dire, comme les cendres de six livres de Gayac. Il s'ensuivra que ces cendres-ci ont souffert le déchet de douze opérations, pendant que celles des six livres qui ont été brûlées à la façon ordinaire, n'ont souffert que le déchet de six évaporations. Supposé que celles-ci ayent perdu à chaque évaporation trois quarts de grain de Sel lixiviel, ce qui est peu de chose, & ce qui sera en tout quatre grains & demi pour les six évaporations, il s'ensuivra que les autres en auront perdu neuf.

Je ne dirai rien ici sur la nature du Sel lixiviel du Gayac. J'ai crû avoir lieu de penser, pour plusieurs raisons, qu'il n'étoit gueres alkali, peut-être même pourroit-il se faire qu'il ne le fût point du tout. En ce cas M. Stahl auroit bien perdu de la peine à en expliquer la formation. Je n'ose pourtant pas encore prononcer que ce Sel ne soit absolument point Alkali. Mais ce que je puis avancer avec certitude, c'est que s'il l'est, il l'est peu. Je renvoye cette discussion à un autre Mémoire, dans lequel je me propose d'examiner les variétés qui se rencontrent entre différents Sels lixiviels.



EXAMEN ET RE'SOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS SUR LES JEUX.

Par M. NICOLE.

ON peut conſidérer tous les Jeux, que l'amuſement ou le deſir d'augmenter ſon argent ont inventés, ſous deux eſpeces. La premiére eſpece renferme les Jeux où le hazard ſeul a part, & qui par leur nature mettent les Joüeurs dans différentes conditions, enſorte que l'un ait avantage ſur l'autre, comme dans les Jeux de la Baſſette, du Pharaon, & des Trois Dés, &c. La ſeconde eſpece renferme les Jeux où le hazard étant égal pour les Joüeurs comme dans le Piquet, &c. les forces ou degrés d'habileté entre les Joüeurs ſont différents. 11 Février 1730.

Entre les divers Problemes que l'on peut propoſer ſur chacune de ces deux eſpeces de Jeux, il y en a qui leur ſont communs, la plus grande probabilité de gagner pour l'un des Joüeurs, pouvant venir également de la nature du Jeu qui lui donne de l'avantage, ou de la ſupériorité d'habileté.

La queſtion que l'on examine ici eſt de cette eſpece, elle m'a été faite pluſieurs fois par de gros Joüeurs : la voici.

Deux Joüeurs joüent une partie à un Jeu quelconque, par exemple au Piquet ; l'un des Joüeurs a plus de probabilité de gagner cette partie qu'il n'en a de la perdre, on demande, lorſque ces Joüeurs conviennent de joüer un certain nombre de parties, ſi le Joüeur ſupérieur a toûjours le même avantage ſur l'autre, ou le même degré de probabilité de gagner plus de parties que l'autre ; ou ſi cette probabilité augmente, on demande ſelon quelle loi ſe fait cette augmentation.

PROBLEME.

Deux Joüeurs, dont les forces ſont entr'elles comme p *&* q, *joüent au Piquet un certain nombre de parties, on demande quelle probabilité il y a que le Joüeur le plus fort gagne, ce que les Joüeurs appellent la* queüe des paris, *& quel eſt ſon avantage. Celui qui perd, eſt celui qui eſt marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on eſt convenu de joüer.*

Pour réſoudre ce Probleme, il faut découvrir d'abord quel eſt l'avantage de ce Joüeur; lorſque l'on ne joüe que deux parties, enſuite lorſque l'on en joüe quatre, puis ſix, huit, dix, & enfin le nombre dont on eſt convenu. Car il eſt clair que ſon ſort, lorſque l'on en joüe douze, par exemple, doit réſulter de l'examen des différents états dans leſquels cette partie de Jeu peut ſe trouver dans tout le cours de ces douze parties, & que quelques-uns de ces états répondent à la ſituation où ſeroient les deux Joüeurs, s'ils ne joüoient qu'en deux parties, ou en quatre, ſix, huit & dix.

SOLUTION.

J'appelle *Pierre* le premier Joüeur, dont la force eſt exprimée par p, & *Paul* le ſecond Joüeur, dont la force eſt exprimée par q; p eſt plus grand que q.

Soit ſuppoſé qu'ils joüent d'abord en deux parties, ſoit nommé a l'argent que l'on gagne, lorſque l'on gagne le pari. Cela poſé:

Si l'on nomme f le ſort de Pierre que l'on cherche, x ſon ſort lorſqu'il gagne la premiére partie, & y lorſqu'il la perd, on aura ces Equations, $f = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}$, $x = \frac{p \times \overset{2.0}{a} + q \times \overset{1.1}{o}}{p+q}$ & $y = \frac{p \times \overset{1.1}{o} + q \times \overset{0.2}{-a}}{p+q}$, dans leſquelles les nombres qui ſont écrits au deſſus de chaque membre de ces Equations, ſervent à exprimer ce que chaque Joüeur a gagné de parties. Donc $f = \frac{p \times ap + q \times -aq}{\overline{p+q}^2} = \frac{app - aqq}{\overline{p+q}^2}$, qui eſt le ſort de Pierre,

ou ſon avantage, lorſque l'on joüe en deux parties.

Soit ſuppoſé maintenant que ces Joüeurs joüent en quatre parties.

Si l'on nomme f le ſort de Pierre que l'on cherche, x ſon ſort lorſqu'il gagne la premiére partie, y lorſqu'il la perd; z ſon ſort, lorſqu'ayant gagné la premiére partie, il gagne encore la ſeconde; r ſon ſort, lorſqu'ayant gagné les deux premiéres parties, il perd la troiſiéme, on aura ces Equations,

$$f = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q}, \quad x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.1}{\overline{\dfrac{app-aqq}{\overline{p+q}^2}}}}{p+q}, \quad z = \frac{p \times \overset{3.0}{a} + q \times \overset{2.1}{r}}{p+q},$$

$$r = \frac{p \times \overset{3.1}{a} + q \times \overset{2.2}{0}}{p+q} = \frac{ap}{p+q}. \text{ Donc } z = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{\overline{p+q}^2}$$

$$= \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^2} \ \& \ x = \frac{ap^3 + 2appq + appq - aq^3}{\overline{p+q}^3}$$

$$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^3}.$$

Pour déterminer y, ſoit encore nommé t le ſort de Pierre, lorſqu'ayant perdu la premiére partie, il perd encore la ſeconde, & u ſon ſort, lorſqu'ayant perdu les deux premiéres parties, il gagne la troiſiéme, on aura ces nouvelles Equations,

$$y = \frac{p \times \overset{1.1}{\overline{\dfrac{app-aqq}{\overline{p+q}^2}}} + q \times \overset{0.2}{t}}{p+q}; \quad t = \frac{p \times \overset{1.2}{u} + q \times \overset{0.3}{-a}}{p+q};$$

$$u = \frac{p \times \overset{2.2}{0} + q \times \overset{1.3}{-a}}{p+q} = -\frac{qa}{p+q}. \text{ Donc } t = -\frac{apq}{\overline{p+q}^2}$$

$$-\frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2} \ \& \ y = \frac{ap^3 - apqq - 2apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3}$$

$$= \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3}$$; & en ſubſtituant dans la premiére Equation pour x & y leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{ap^4 + 3ap^3q - apq^3 + ap^3q - 3apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4} = \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$$

qui eſt le ſort cherché de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joüe en quatre parties.

Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on joüe en ſix parties, en employant autant d'inconnües que l'on en a beſoin, on aura toutes les E'quations ſuivantes,

$$ſ = \frac{p \times \overset{1.0}{x} + q \times \overset{0.1}{y}}{p+q},\quad x = \frac{p \times \overset{2.0}{z} + q \times \overset{1.1}{\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}}}{p+q},$$

$$z = \frac{p \times \overset{3.0}{r} + q \times \overset{2.1}{t}}{p+q},\quad r = \frac{p \times \overset{4.0}{a} + q \times \overset{3.1}{u}}{p+q},\quad u = \frac{p \times \overset{4.1}{a} + q \times \overset{3.2}{m}}{p+q},$$

$$m = \frac{p \times \overset{4.2}{a} + q \times \overset{3.3}{o}}{p+q} = \frac{ap}{p+q}.$$ Donc $$u = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{\overline{p+q}^{2}}$$

$$= \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}},\quad r = \frac{ap}{p+q} + \frac{appq + 2apqq}{\overline{p+q}^{3}} = \frac{ap^3 + 3appq + 3apqq}{\overline{p+q}^{3}}.$$

Pour déterminer t, on a $$t = \frac{p \times \overset{3.1}{\frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^{2}}} + q \times \overset{2.2}{\frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{2}}}}{p+q}$$

$$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}}.$$ Donc $$z = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}.$$

D'où enfin on a $$x = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^{5}}.$$

Pour déterminer y, on a ces autres E'quations

$$y = \frac{p \times \overset{1.1}{\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^{4}}} + q \times \overset{0.2}{k}}{p+q},\quad k = \frac{p \times \overset{1.2}{f} + q \times \overset{0.3}{h}}{p+q};$$

$$f = \frac{p \times \overset{2.2}{\frac{app - aqq}{\overline{p+q}^{2}}} + q \times \overset{1.3}{e}}{p+q},\quad e = \frac{p \times \overset{2.3}{d} + q \times \overset{1.4}{-a}}{p+q},\quad d = \frac{p \times \overset{3.3}{o} + q \times \overset{2.4}{-a}}{p+q}$$

$$= -\frac{qa}{p+q}.$$ Donc $$e = -\frac{pqa}{\overline{p+q}^{2}} - \frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{2}};$$

donc $$f = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^{3}};$$ on a auſſi $$h = \frac{p \times \overset{1.3}{-\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^{2}}} + q \times \overset{0.4}{-a}}{p+q}$$

$$=$$

$= - \frac{3appq - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3}$, donc $k = \frac{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$, & enfin $y = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}$. Et en ſubſtituant dans la premiére E'quation, pour x & y, les valeurs trouvées, il vient

$$ſ = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6}$$

pour le ſort cherché de Pierre, ou ſon avantage, lorſque l'on joüe en ſix parties.

Soit ſuppoſé maintenant que l'on joüe en huit parties, & que A repréſente le ſort de Pierre, lorſque l'on joüe en deux parties, B lorſque l'on joüe en quatre parties, C lorſque l'on joüe en ſix parties.

Si l'on employe autant d'inconnües que l'on en a beſoin, on aura toutes les E'quations ſuivantes,

$$ſ = \frac{\overset{1.0}{p} \times x + \overset{0.1}{q} \times y}{p+q},\ x = \frac{\overset{2.0}{p} \times z + \overset{1.1}{q} \times C}{p+q},\ z = \frac{\overset{3.0}{p} \times u + \overset{2.1}{q} \times t}{p+q},$$

$$u = \frac{\overset{4.0}{p} \times r + \overset{3.1}{q} \times n}{p+q},\ r = \frac{\overset{5.0}{p} \times a + \overset{4.1}{q} \times m}{p+q},\ m = \frac{\overset{5.1}{p} \times a + \overset{4.2}{q} \times k}{p+q};$$

$k = \frac{\overset{5.2}{p} \times a + \overset{4.3}{q} \times l}{p+q}$, $l = \frac{\overset{5.3}{p} \times a + \overset{4.4}{q} \times o}{p+q} = \frac{ap}{p+q}$. Donc $k = \frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^2}$, $m = \frac{ap^3 + 3appq + 3apq^2}{\overline{p+q}^3}$ & $r = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq + 4apq^3}{\overline{p+q}^4}$.

On trouvera auſſi $n = \frac{p \times \overset{4.1}{\overline{\frac{ap^3 + 3appq + 3apqq}{\overline{p+q}^3}}} + \overset{3.2}{q \times h}}{p+q}$,

$$h = \frac{p \times \overset{4.2}{\overline{\frac{app + 2apq}{\overline{p+q}^2}}} + \overset{3.3}{q \times A}}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{\overline{p+q}^3}.$$ Donc

$n = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{\overline{p+q}^4}$; & en ſubſtituant pour t

& n les valeurs que l'on vient de trouver, il vient

$$u = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq + 10appq^3 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Pour trouver

la valeur de t, on a $$t = \frac{\overset{3.1}{p \times \frac{\overline{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}}{\overline{p+q}^4}} + \overset{2.2}{q \times B}}{p+q}$$

$$= \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Donc

$$z = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq + 20ap^3p^3 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6},$$ & enfin

$$x = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq + 35ap^4q^3 - 21appq^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^7}.$$

Pour déterminer y, on a toutes ces Équations

$$y = \frac{p \times \overset{1.1}{C} + q \times \overset{0.2}{g}}{p+q},\quad g = \frac{p \times \overset{1.2}{f} + q \times \overset{0.3}{e}}{p+q},\quad f = \frac{p \times \overset{2.2}{B} + q \times \overset{1.3}{d}}{p+q},$$

$$d = \frac{p \times \overset{2.3}{c} + q \times \overset{1.4}{b}}{p+q},\quad c = \frac{p \times \overset{3.3}{A} + q \times \overset{2.4}{Y}}{p+q},\quad Y = \frac{p \times \overset{3.4}{X} + q \times \overset{2.5}{-a}}{p+q},$$

$$X = \frac{p \times \overset{4.4}{o} + q \times \overset{3.5}{-a}}{p+q} = -\frac{aq}{p+q}.$$ Donc $$Y = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2},$$

& $$c = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^2}.$$ Pour trouver la valeur de b, on a

$$b = \frac{p \times \overset{2.4}{Z} + q \times \overset{1.5}{-a}}{p+q},\quad Z = \frac{\overset{3.4}{p \times -\frac{aq}{p+q}} + \overset{2.5}{q \times -a}}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{\overline{p+q}^2},$$

donc $$b = -\frac{3appq - 3apq^2 - aq^3}{\overline{p+q}^3};$$ ainsi en substituant les valeurs de b & c, il vient $$d = \frac{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4},$$

donc $$f = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}.$$ Pour trouver

la valeur de e, on a $$e = \frac{\overset{1.3}{p \times \frac{\overline{ap^4 - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}}{\overline{p+q}^4}} + \overset{0.4}{q \times V}}{p+q},$$

$$V = \frac{p \times -\frac{3appq - 3apqq - aq^3}{\overline{p+q}^3} + q \times -a}{p+q} =$$

$$-\frac{4ap^3q - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$$, donc $e =$

$$\frac{ap^5 - 10ap^3qq - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{\overline{p+q}^5}$$. Maintenant si l'on substitüe pour f & e les valeurs trouvées, on aura

$$g = \frac{ap^6 + 6ap^5q - 20ap^3q^3 - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6}$$. Donc enfin

$$y = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq - 35ap^3q^4 - 21ap^2q^5 - 7apq^6 - aq^7}{\overline{p+q}^7};$$

Et en substituant, dans la premiére Equation, pour x & y les valeurs trouvées, il vient

$$f = \frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{\overline{p+q}^8}$$

qui est le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joüe en huit parties.

On pourroit, par la même voye, déterminer le sort de Pierre, lorsque l'on joüe dix parties, & ensuite lorsque l'on en joüe un plus grand nombre; mais le nombre des Equations, qu'il faudroit parcourir pour résoudre ces autres cas, devenant fort considérable, il est plus simple, pour les résoudre, d'examiner les grandeurs qui ont été trouvées pour les cas précédents, de les comparer entr'elles, & de découvrir par cette comparaison la loi selon laquelle elles croissent. Les grandeurs, qui ont été trouvées, sont

$\frac{app - aqq}{\overline{p+q}^2}$, pour 2 parties.

$\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{\overline{p+q}^4}$, pour 4 parties.

$\frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{\overline{p+q}^6}$, pour 6 parties.

$$\frac{ap^8+8ap^7q+28ap^6qq+56ap^5q^3-56ap^3q^5-28appq^6-8apq^7-aq^8}{\overline{p+q}^{\,8}},$$

pour 8 parties.

qui se réduisent, en divisant les numérateurs & les dénominateurs par $p+q$,

à $\frac{ap-aq}{p+q}$, pour 2 parties.

à $\frac{ap^3+3appq-3apqq-aq^3}{\overline{p+q}^{\,3}}$, pour 4 parties.

à $\frac{ap^5+5ap^4q+10ap^3qq-10appq^3-5apq^4-aq^5}{\overline{p+q}^{\,5}}$, pour 6 parties.

à $\frac{ap^7+7ap^6q+21ap^5qq+35ap^4q^3-35ap^3q^4-21appq^5-7apq^6-aq^7}{\overline{p+q}^{\,7}}$,

pour 8 parties.

à $\frac{ap^9+9ap^8q+36ap^7qq+84ap^6q^3+126ap^5q^4-126ap^4q^5-84ap^3q^6-36appq^7-9apq^8-aq^9}{\overline{p+q}^{\,9}}$;

pour 10 parties.

à $a\times\left\{\frac{p^{11}+11p^{10}q+55p^9q^2+165p^8q^3+330p^7q^4+462p^6q^5-462p^5q^6-330p^4q^7-165p^3q^8-55p^2q^9-11pq^{10}-q^{11}}{\overline{p+q}^{\,11}}\right.$,

pour 12 parties.

On aura donc pour 24 parties, ou douze Rois,

$$a\times\left\{\frac{\begin{array}{l}p^{23}+23p^{22}q+253p^{21}q^2+1771p^{20}q^3+8855p^{19}q^4+33649p^{18}q^5\\+100947p^{17}q^6+245157p^{16}q^7+490314p^{15}q^8+817190p^{14}q^9\\+1144066p^{13}q^{10}+1352078p^{12}q^{11}-1352078p^{11}q^{12}-1144066p^{10}q^{13}\\-817190p^9q^{14}-490314p^8q^{15}-245157p^7q^{16}-100947p^6q^{17}\\-33649p^5q^{18}-8855p^4q^{19}-1771p^3q^{20}-253p^2q^{21}-23pq^{22}-q^{23}\end{array}}{\overline{p+q}^{\,23}}\right.$$

Si $p=5$ & $q=4$;

On aura $a\times\frac{5-4}{9}=\frac{1}{9}a$ pour 2 parties.

$a\times\frac{425-304}{729}=\frac{121a}{729}$ pour 4 parties.

$a\times\frac{35625-23424}{59049}=\frac{12201a}{59049}$ pour 6 parties.

$$a \times \frac{2965625 - 1817344}{4782969} = \frac{1148281a}{4782969} \text{ pour 8 parties.}$$

$$a \times \frac{242359625 - 141604864}{383964489} = \frac{100754761a}{383964489} \text{ pour 10 parties.}$$

$$a \times \frac{20314265625 - 11066793984}{31381059609} = \frac{9247471641a}{31381059609} \text{ pour 12 parties.}$$

Et $a \times \frac{617677182163500976 5625}{886293811965250109 5929}$, ou environ $a \times \frac{193}{277}$ pour 24 parties.

Cette derniére grandeur eſt entre $\frac{2}{3} a$ & $\frac{3}{4} a$. Ainſi dans la ſuppoſition, que les forces ou habiletés des Joüeurs ſoient comme 5 à 4, l'avantage qu'a le Joüeur le plus fort ſur le plus foible n'eſt que la neuviéme partie de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'ils joüent en deux parties, & cet avantage devient un peu plus des deux tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'ils joüent en vingt-quatre parties. Lors donc que dans cette ſuppoſition deux Joüeurs joüent au Picquet, & mettent au Jeu chacun neuf Loüis pour ce que l'on appelle la queüe des paris, le Joüeur le plus foible fait préſent à l'autre de 6 Loüis 13 liv. 0 ſ. 2 den. des neuf Loüis qu'il a mis au Jeu.

REMARQUE I.

Les grandeurs qui ont été trouvées dans les cas que l'on vient d'éxaminer, & qui expriment l'avantage du Joüeur le plus fort ; ces grandeurs, dis-je, étant compoſées de termes poſitifs & de termes négatifs, il eſt clair que la ſomme de tous les poſitifs exprimera le ſort du Joüeur le plus fort, ou ſon droit à la partie, & que la ſomme de tous les négatifs exprimera le ſort du plus foible, ou le droit qu'il a à cette partie ; car l'avantage n'eſt autre choſe que l'excès du ſort de l'un ſur le ſort de l'autre.

Ainſi, pour deux parties,

Le ſort de l'un ſera $\frac{p}{p+q} \times a$. Et le ſort de l'autre ſera $\frac{q}{p+q} \times a$.

Pour quatre parties

$\frac{p^3 + 3ppq}{\overline{p+q}^3} \times a$. Et $\frac{3pqq + q^3}{\overline{p+q}^3} \times a$.

Pour ſix parties

$$\frac{p^5+5p^4q+10p^3qq}{\overline{p+q}^5}\times a. \quad \text{Et} \quad \frac{10ppq^3+5pq^4+q^5}{\overline{p+q}^5}\times a.$$

Pour huit parties

$$\frac{p^7+7p^6q+21p^5qq+35p^4q^3}{\overline{p+q}^7}\times a. \quad \text{Et} \quad \frac{35p^3q^4+21ppq^5+7pq^6+q^7}{\overline{p+q}^7}\times a.$$

Pour dix parties.

$$\frac{p^9+9p^8q+36p^7qq+84p^6q^3+126p^5q^4}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

$$\text{Et} \quad \frac{126p^4q^5+84p^3q^6+36ppq^7+9pq^8+q^9}{\overline{p+q}^9}\times a.$$

D'où l'on voit que pour avoir le ſort de chacun des deux Joüeurs, lorſqu'ils joüent un nombre quelconque de parties, il faut élever le binôme $p+q$ à une puiſſance dont l'expoſant ſoit moindre d'une unité que le nombre de parties que l'on doit joüer, diviſer en deux parties ce binôme ainſi élevé, dont la premiére ſera compoſée de tous les premiers termes juſqu'au milieu, & la ſeconde, de tous les derniers termes pris, depuis le milieu. Chacune de ces parties étant le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur eſt la puiſſance entiére, exprimera le ſort de chacun des Joüeurs, & l'excès de l'une de ces fractions ſur l'autre exprimera l'avantage du Joüeur le plus fort.

REMARQUE II.

Si l'on avoit cherché par une voye ſemblable à celle que l'on a ſuivie ici, le ſort des Joüeurs & l'avantage de l'un ſur l'autre, lorſqu'ils joüent en un nombre impair de parties, on auroit trouvé les mêmes formules que l'on a trouvées, en ſuppoſant ce nombre de parties exprimé par le nombre pair qui le ſuit, enſorte que le ſort eſt le même, ſoit que l'on joüe en une ou deux parties; il eſt encore le même, ſoit que l'on joüe en trois ou quatre parties, cinq ou ſix parties, & ainſi des autres.

Ceci peut faire difficulté à la premiére vûë; car il eſt viſible que le Joüeur le plus fort a d'autant plus d'avantage que l'on joüe en un plus grand nombre de parties; ainſi par cette conſidération il doit avoir plus d'avantage, lorſque l'on joüe en ſix parties, que lorſque l'on joüe en cinq parties. Mais cet avantage eſt diminué dans le cas de ſix parties, en ce que ce Joüeur, pour gagner, doit gagner deux parties plus que l'autre, car en ce cas, pour gagner, il faut qu'il prenne quatre parties, & l'autre deux; au lieu que dans le cas de cinq parties, il ſuffit qu'il prenne une partie plus que l'autre, c'eſt-à-dire, trois parties, & l'autre deux: ainſi, par cette ſeconde conſidération, l'avantage du Joüeur le plus fort doit être diminué, car il eſt évident qu'il eſt plus difficile de gagner deux parties plus que l'autre, qu'il ne l'eſt d'en gagner ſeulement une de plus. Cette réfléxion ſuffit pour faire voir la poſſibilité de ce que donne le calcul, car le même raiſonnement aura lieu pour tout nombre pair de parties comparé au nombre impair qui le précéde.

COROLLAIRE I.

Si l'on ſuppoſe $p = q$, & que l'on ſubſtitüe dans la Table qui exprime l'avantage du Joüeur le plus fort, pour q, ſa valeur p, on verra que cet avantage devient nul dans tous les cas, c'eſt-à-dire, quelque ſoit le nombre de parties que l'on joüe. Et ſi l'on ſubſtitüe p à la place de q, dans la Table qui exprime le ſort des deux Joüeurs, on trouvera $\frac{1}{2}$ pour le ſort de chaque Joüeur, quelque ſoit le nombre de parties que l'on joüe, & c'eſt auſſi ce qui doit arriver.

COROLLAIRE II.

Si avant la fin des parties que l'on eſt convenu de joüer, on étoit obligé de quitter le jeu, & que l'on voulût découvrir de quelle maniére il faut partager l'argent du jeu relativement à l'état où eſt la partie, lorſque l'on ceſſe de joüer: on trouvera de quelle maniére il faut faire ce partage, & quel eſt l'avantage ou le deſavantage des Joüeurs, en éxaminant

entre toutes les Equations que l'on a été obligé de parcourir, quelle eſt celle qui renferme le cas propoſé, & cette Equation donnera ce qu'on cherche.

Si l'on demande, par exemple, quel eſt l'avantage de Pierre, qui eſt le Joüeur le plus fort, lorſque l'état de la partie eſt telle, que joüant en huit parties, ce Joüeur en a quatre, & l'autre deux, l'Equation de ce cas a été trouvée $k = \frac{\frac{app + 2apq}{2}}{p+q}$ pour l'avantage de Pierre, qui dans la ſuppoſition de $p = 5$ & $q = 4$, donne $\frac{65}{81}a$ pour cet avantage; d'où il ſuit que ce qui appartient à l'un des Joüeurs eſt $\frac{73}{81}a$, & ce qui appartient à l'autre eſt $\frac{8}{81}a$, c'eſt-à-dire, qu'il faut que Paul donne à Pierre $\frac{65}{81}a$.

Si l'état de la partie eſt tel, que Pierre a deux points, & Paul quatre, lorſque l'on joüe en huit points, l'Equation de ce cas eſt $Y = - \frac{\frac{2apq - aqq}{2}}{p+q}$, qui eſt l'avantage de Pierre; mais comme cette grandeur eſt négative, elle exprime ce que Pierre doit payer à Paul, ou l'avantage de Paul, qui dans la ſuppoſition de $p = 5$ & $q = 4$, eſt $-\frac{56}{81}a$, c'eſt-à-dire, que Pierre doit payer à Paul $\frac{56}{81}a$, & les ſorts ſeront comme $\frac{25}{162}$ à $\frac{137}{162}$. Il en ſera ainſi des autres que l'on voudra imaginer.



DE LA

DE LA MECHANIQUE avec laquelle diverses Especes de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feüilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.

Par M. DE REAUMUR.

IL ne faut point avoir fait une étude particuliére de l'Histoire naturelle pour avoir vû dans des Jardins, dans des Bois, certaines feüilles simplement courbées, d'autres pliées en deux, d'autres roulées plusieurs fois sur elles-mêmes, d'autres ramassées en un paquet informe, & pour avoir remarqué que ces feüilles sont tenües, dans ces différents états, par un grand nombre de fils. Nos Poiriers, nos Pommiers, nos Groseliers, & bien d'autres Arbres & d'autres Plantes, mettent chaque jour sous les yeux de ces sortes de feüilles. On a pû encore observer que le milieu de ces feüilles est souvent occupé par un Insecte, & ordinairement par une Chenille. Le Chêne, le meilleur de tous les Arbres pour nos usages, est aussi le plus amusant pour un Naturaliste; M. Valisnieri assûre qu'il nourrit seul plus de deux cents différentes especes d'Insectes; je n'ai pas compté celles que j'y ai observées, mais je ne crois pas qu'elles aillent loin de ce nombre. Il est aussi de tous les Arbres celui où l'on voit plus de feüilles pliées & roulées: on y en apperçoit qui le sont avec une régularité qui donne envie de sçavoir comment des Insectes peuvent venir à bout de les contourner de la sorte; ces Insectes sont des Chenilles. J'ai cherché à découvrir la méchanique à laquelle elles ont recours pour faire si bien prendre la forme de Rouleaux, ou de Cornets, à des feüilles. Je vais expliquer celle qu'elles m'ont laissé voir, & ce sera, je crois, avoir expliqué celle dont se servent quantité d'autres Insectes qui font des ouvrages du même genre, mais moins parfaits.

8 Mars 1730.

Si l'on conſidere les feüilles des Chênes, vers le milieu du Printemps, lorſqu'elles ſe ſont entiérement développées & étendües, on en apperçoit pluſieurs roulées de différentes maniéres, toutes capables de leur attirer de l'attention. La partie ſupérieure du bout des unes paroît avoir été ramenée vers le deſſous de la feüille, pour y décrire le premier tour d'une Spirale, qui a été enſuite recouvert de pluſieurs autres tours, fournis par des roulements ſucceſſifs, & pouſſés quel-
* Figure 1. quefois juſqu'au milieu de la feüille, & quelquefois par de-là *. Nos doigts ne pourroient mieux faire pour rouler réguliérement une feüille, que ce qu'on voit ici; les Oublis ne ſont pas mieux roulés. Le centre du rouleau eſt vuide, c'eſt un Tuyau creux, dont le diametre eſt proportionné à celui du corps d'une Chenille, qui l'habite, & qui la fait pour l'habiter. D'autres feüilles des mêmes Arbres (mais le nombre de celles-ci eſt plus petit) ſont roulées vers le deſſus comme les premiéres le ſont vers le deſſous. D'autres, en grand nombre, ſont roulées vers le deſſous de la feüille comme les premiéres, mais dans des directions totalement différentes. La longueur ou l'axe des premiers rouleaux eſt perpendiculaire à la principale nervûre & à la queüe de la feüille, la longueur de
* Fig. 2. ceux-ci eſt parallele à la même nervûre *. Le roulement de celles-ci n'eſt quelquefois pouſſé que juſqu'à la principale ner-
* Fig. 3. vûre, & quelquefois la largeur entiére de la feüille eſt roulée *. Les axes, ou longueurs, de divers autres rouleaux ſont obliques à la principale nervûre, leurs obliquités varient ſous une infinité d'angles, de façon néantmoins que l'axe du rouleau prolongé rencontre ordinairement la groſſe nervûre du côté
* Fig. 18. du bout de la feüille *. Quoique la ſurface des rouleaux ſoit quelquefois très-unie, & telle que la donne celle d'une feüille aſſés lice, il y en a pourtant qui ont des inégalités, des enfoncements, tels que les donneroit une feüille chifonnée.

De pareils ouvrages ne ſeroient pas bien difficiles à faire à qui a des doigts, mais les Chenilles n'ont ni doigts ni parties qui ſemblent équivalentes. D'ailleurs d'avoir roulé les feüilles, c'eſt avoir fait au plus la moitié de la beſogne, il

faut les contenir dans un état d'où leur reſſort naturel tend continuellement à les tirer. La méchanique à laquelle elles ont recours pour cette ſeconde partie de l'ouvrage eſt aiſée à obſerver. On voit des paquets de fils, attachés par un bout à la ſurface extérieure du rouleau, & par l'autre au plat de la feüille *; ce ſont autant de liens, autant de petites cordes qui tiennent contre le reſſort de la feüille. Il y a quelquefois plus de dix à douze de ces liens rangés à peu-près ſur une même ligne, lorſque le dernier tour d'un rouleau a à peu-près la longueur, ou ſeulement la largeur entiére de la feüille. Toutes ou preſque toutes les Chenilles ſçavent filer; chaque lien eſt un paquet de fils de ſoye blanche, preſſés les uns auprès des autres, mais qu'on juge pourtant tous ſéparés.

* Fig. 1. & 2. *lo, lo*, &c.

On imagine aſſés que ces petits cordages ſont ſuffiſants pour conſerver à la feüille la forme de rouleau, mais il ne m'a pas paru auſſi aiſé d'imaginer comment la Chenille lui donnoit cette forme; comment, & dans quel temps elle attachoit les liens. Tout cela m'a ſemblé dépendre de bien de petites manœuvres que j'ai eu très-envie de ſçavoir, & qu'on ne pouvoit apprendre qu'en les voyant pratiquer par l'Inſecte même. Il n'y avoit gueres apparence d'y parvenir en obſervant les Chenilles ſur les Chênes qu'elles habitent; le moment où elles travaillent n'eſt pas facile à ſaiſir, & la préſence d'un Spectateur ne les excite pas au travail. J'ai tenté un moyen qui m'a réüſſi mieux que je ne l'eſperois. J'ai picqué dans un grand Vaſe, plein de terre humide, des branches de Chêne fraîchement caſſées; j'ai diſtribué ſur leurs feüilles quantité de Chenilles que j'avois tirées des rouleaux qu'elles s'étoient déja faits. Par bonheur elles ſouffrent impatiemment d'être à découvert; ſçavent-elles qu'elles courent alors riſque de devenir la pâture des Oiſeaux? ou ſi elles ſentent qu'elles ont beſoin d'être à l'abri des impreſſions du grand air? Quoiqu'il en ſoit, elles ſe ſont miſes à travailler dans mon Cabinet & ſous mes yeux comme elles l'euſſent fait en plein Bois.

Ordinairement c'eſt le deſſus de la feüille qu'elles roulent vers le deſſous, mais les unes commencent le rouleau par le

bout même de la feüille, & les autres par une des dentelures des côtés. Les rouleaux commencés de la premiére façon, se trouvent perpendiculaires à la principale nervûre, & ceux qui sont commencés de la seconde, lui sont ou paralleles ou inclinés. Quelque platte que paroisse une feüille, lors même que sa surface supérieure est concave, il est rare que le bord, ou quelque endroit du bord d'une de ses dentelures, ne soit point un peu recourbé en dessous; & quelque petite que soit l'étendüe de la partie recourbée, & quelque petite que soit sa courbure, ç'en est assés pour donner prise à la Chenille, pour la mettre en état de commencer à contourner la feüille, & de la contourner ensuite autant qu'il lui plaira. Des fils pareils à ceux qui maintiennent la feüille dans la figure de rouleau, servent à la lui faire prendre. Ce n'est qu'en la tirant successivement en différents endroits avec de petites cordes qu'elle vient à bout de la plier en une espece de spirale, qui a quelquefois cinq à six tours qui tournent autour du même centre.

Nôtre Insecte ayant donc choisi un endroit où le bord de la feüille est tant soit peu recourbé en dessous, elle s'y établit, & commence à travailler *. Alors sa tête se donne des mouvements alternatifs très-prompts; elle décrit alternativement des especes d'arcs en sens opposés, comme le sont ceux des vibrations d'un Pendule. Le milieu de son corps, ou quelque endroit plus proche de la queüe, est l'espece de centre sur lequel la tête, & la partie du corps à qui elle tient, se meuvent. La tête va s'appliquer contre le dessous de la feüille, tout près du bord, & de-là elle va s'appliquer le plus loin qu'elle peut aller, du côté de la principale nervûre *; elle retourne sur le champ d'où elle étoit partie la premiére fois, & revient de même ensuite retoucher une seconde fois l'endroit le plus éloigné du bord. Ainsi continüe-t-elle à se donner de suite plus de deux à trois cents mouvements alternatifs, c'est-à-dire, à filer autant de fils, car chaque mouvement de tête, chaque allée & chaque retour produit un fil, que la Chenille attache par chaque bout aux endroits où sa

* Fig. 4.

* Fig. 5. & 6.

tête paroît s'appliquer. Chacun de ces fils eſt tendu depuis la partie recourbée de la feüille juſqu'à ſa partie plane, il ſert, ou doit ſervir, à tirer la premiére vers la ſeconde ; tous ces fils enſemble doivent faire une eſpece de lien. Ils ne partent pas tous d'un même point, les ſurfaces ſur leſquelles ils ſont appliqués, ſoit du côté du bord de la feüille, ſoit du côté oppoſé, approchent quelquefois de la circulaire, & ont plus d'une ligne de diametre *. La Chenille même n'en colle pas un grand nombre en deſſous, près du bord de la feüille. Bientôt elle en colle quelques-uns contre le bord même, & ceux qu'elle file peu à près, elle les attache à la ſurface ſupérieure, à la vérité à une petite diſtance du bord *. Ce premier paquet de fils donne déja une augmentation de courbure à la feüille vers le deſſous. Une partie ſenſible paroît ſe replier ; la partie même du bord, à laquelle le paquet de fils eſt attaché, eſt plus recourbée que celles qui la ſuivent, qui tendent à ſe redreſſer ; mais bien-tôt une plus longue portion va ſe replier. Le premier lien ayant été aſſés fourni de fils, la Chenille va en commencer un autre à deux ou trois lignes de diſtance du précédent. Pour former celui-ci, elle fait une manœuvre préciſément pareille à celle qu'elle a employée pour le premier. Il a auſſi un effet pareil ; la partie qui eſt entre le premier lien & le ſecond, ſe recourbe plus qu'elle n'étoit, & ce qui eſt par de-là le nouveau lien commence à ſe recourber, & ſe recourbera davantage, lorſque la Chenille aura filé plus loin un troiſiéme lien pareil aux précédents.

* Fig. 8. & 9.

* Fig. 7.

L'étendüe de la partie qui doit former le premier tour du rouleau n'eſt pas grande, il en eſt ici comme d'un papier qu'on roule, en commençant à le rouler près d'un de ſes angles ; auſſi trois à quatre paquets de fils ſuffiſent pour donner la courbure à tout ce premier tour.

C'eſt encore au moyen de pareils fils, de pareils liens, que le ſecond tour doit être tortillé *. Il faut tirer vers le deſſous de la feüille une portion de ſa ſurface ſupérieure ſuffiſamment diſtante de celle qui a été roulée, c'eſt-à-dire, qu'il faut que chaque nouveau lien ſoit attaché par un bout à une partie

* Fig. 10.

de la feüille plus éloignée du bord, & que par l'autre bout il ſoit attaché plus près de la principale nervûre, ou de la queüe de la feüille. En un mot, des paquets de fils arrangés au deſſus de ceux du premier tour, comme ceux du premier l'ont été, doivent produire un effet ſemblable; & comme les premiers ont fait faire à la feüille un premier ou à peu-près un premier tour de ſpirale, de même les autres lui en feront faire un ſecond, ou à peu-près, & ainſi de tours en tours.

L'effet néantmoins de ces paquets de fils, leur entier uſage, n'eſt pas encore aſſés clair à beaucoup près, on voit bien, comme nous l'avons vû d'abord, qu'ils ſervent à tenir la feüille roulée; mais quoique je viſſe la feüille ſe courber de plus en plus, à meſure qu'un nouveau lien ſe finiſſoit, j'avoüe que je n'appercevois pas la cauſe du roulement. Le paquet n'eſt que l'aſſemblage de fils filés ſucceſſivement. Dans l'inſtant que chaque fil vient de ſortir de la filiére, pendant qu'il eſt mol encore, l'Inſecte l'applique contre la feüille, il eſt aſſés gluant pour s'y coller. Il peut bien avoir été tiré droit d'une partie de la feüille à l'autre, mais il ne ſçauroit avoir été aſſés tendu pour faire un effort capable de ramener les deux parties de la feüille l'une contre l'autre. Je ſçais que ce fil, quoique extrêmement délié, a quelque force; je l'ai vû en bien des circonſtances ſuſpendre la Chenille en l'air, mais il n'a pas été poſſible, que quand il a été attaché mol, qu'il ait été attaché avec le degré de tenſion néceſſaire pour forcer une des parties d'une feüille à s'approcher de l'autre. Si après avoir été filé, il ſe raccourciſſoit en ſéchant, ce raccourciſſement le mettroit en état d'agir, mais où peut aller le raccourciſſement d'un fil ſi court? combien donneroit-il peu de courbure à la feüille!

Une force plus puiſſante agit auſſi contre elle, c'eſt une grande partie du poids de la Chenille, & ce n'a été qu'après avoir vû cet Inſecte faire ſouvent de pareil ouvrage, que j'ai apperçû tout l'artifice de ſa méchanique. Il dépend de la ſtructure de chaque paquet de fils, de chaque lien. Nous l'avons conſidéré d'abord comme formé de fils à peu-près paralleles; mais à préſent, pour nous en faire une idée plus

exacte, nous devons le regarder comme composé de deux plans de fil posés l'un au dessus de l'autre *. Tous les fils du plan supérieur croisent ceux du plan inférieur. La manœuvre de l'Insecte m'en a convaincu ; les fils eux-mêmes observés à la Loupe devoient me le faire voir ; enfin un paquet considéré à la vûë simple, suffisoit pour découvrir cette structure qui m'avoit échappé ; il est plus large à l'une & à l'autre de ses extrémités, qu'il ne l'est au milieu, le nombre des fils du milieu est pourtant égal à celui des fils des bouts. Pourquoi y occupent-ils moins de place ? c'est qu'ils y sont plus serrés les uns contre les autres, c'est qu'ils s'y croisent. Regardons donc chaque lien comme composé de deux plans de fils qui se croisent, suivons la Chenille pendant qu'elle file ceux de chacun de ces plans, & nous découvrirons le double usage de ces deux plans, de ces deux especes de toile. Les fils du premier plan étant tous attachés à peu-près parallelement les uns aux autres, comme on le voit en *AB* *, la Chenille passe de l'autre côté pour filer ceux du second plan *CD* *. Pendant qu'elle file, elle ne peut aller de *C* en *D* sans passer sur les fils *AB*, & loin de chercher à les éviter, en soûtenant son corps & sa tête plus haut, on voit sa tête & une partie de son corps toûjours appliqués sur le plan *AB*, elle ne l'abandonne point, elle le presse. Ces fils ensemble font une espece de toile, ou de chaîne de toile, capable de soûtenir cette pression ; ils tirent par conséquent les deux parties de la feüille l'une vers l'autre. Celle qui est près du bord cede, se rapproche de l'autre ; la feüille se courbe. Il n'est plus question que de lui conserver la courbure qu'elle vient de prendre, & c'est à quoi sert le nouveau fil que la Chenille attache. Ces fils, comme je l'ai déja fait remarquer, sont capables de soûtenir un effort aussi considérable que celui que la feüille fait contre eux, puisqu'ils peuvent soûtenir une Chenille en l'air. Il suit de ce que nous venons de dire, que les fils de la couche supérieure sont les seuls qui soient tendus, que ceux de la couche inférieure deviennent lâches, c'est aussi ce qu'on peut remarquer en observant le paquet avec attention.

* Fig. 12.

* Fig. 13.

* Fig. 14. & 15.

La même méchanique, qui s'obſerve dans les deux différentes couches d'un même lien, doit ſe trouver & ſe voit bien plus aiſément dans les liens des différents tours, comparés les uns aux autres. Quand la feüille ne fait encore qu'un tour de ſpirale, les liens qui retiennent ce tour ſont tendus, au moins leur partie ſupérieure l'eſt. Mais quand la même feüille a, par ſon roulement, fait un ſecond tour, ce ne ſont plus que les derniers liens qui retiennent ce tour, qui ſont tendus, tous ceux qui arrêtoient d'abord le tour précédent ſont lâches, ils ne produiſent plus aucun effet*. Si on appuye légérement ſur ceux du ſecond tour avec une plume, on voit que la feüille eſt tirée par cet effort; mais quoiqu'on appuye davantage ſur ceux du premier tour, l'action ne paſſe pas juſqu'à la feüille, auſſi la vûë ſeule apprend qu'ils ſont comme flottants. Il n'y a donc que les liens du dernier tour, ou plûtôt que la couche ſupérieure des fils du lien du dernier tour, qui conſervent la courbure de la feüille.

* Fig. 16.

Une Chenille qui s'eſt attaquée à une feüille de Chêne épaiſſe, dont les nervûres ſont groſſes, pourroit ne pas filer des fils aſſés forts pour tenir contre la roideur des principales nervûres, & ſur-tout de celle du milieu. Mais elle ſçait les rendre ſouples; elle ronge en trois à quatre endroits différents ce que ces nervûres ont d'épaiſſeur de plus que le reſte de la feüille; les endroits ainſi rongés n'ont qu'une petite étendüe. Ils m'ont paru ſe trouver où la feüille doit être pliée pour recommencer à faire un nouveau tour.

Quand la Chenille, après avoir roulé une portion de la feüille, parvient à un endroit où il y a une dentelure qui déborde beaucoup par de-là le reſte, il arrive que les fils qu'elle attache au bout de cette dentelure, au lieu de la rouler, la plient, elle ne ſe courbe que vers le commencement du pli, le reſte conſerve une figure à peu-près plane; de plus, ſi la Chenille donnoit à toute cette partie de la feüille une égale courbure, une égale rondeur, comme elle l'a fait aux parties qu'elle a ci-devant roulées, & qui étoient d'une moindre étendüe, le vuide du rouleau auroit là beaucoup plus

de

de diametre qu'il n'en a ailleurs, il n'auroit plus les proportions commodes à l'Insecte. Après avoir observé de ces grandes dentelures de feüilles, qu'elles avoient presque pliées à plat, je les ai vû dans la suite en former un Tuyau d'un aussi petit diametre que l'étoit celui des autres endroits, & un Tuyau très-bien arrondi. Pour cela, la Chenille a besoin d'avoir recours à deux manœuvres différentes. 1.° Elle raccourcit la partie pliée, elle en retranche, pour ainsi dire, tout ce qu'elle a de trop d'étendüe, elle en attache une portion à plat contre la feüille par un millier de fils. 2.° Ce qui reste libre est trop applatti, c'est à coups de tête qu'il m'a paru qu'elle l'arrondissoit. J'ai vû des Chenilles renfermées dans ces endroits trop applattis, qui agitoient leur tête vivement & alternativement en des sens contraires. A chaque mouvement la tête frappoit contre les parois, c'étoient des especes de petits coups de marteau dont on entendoit le bruit.

Au reste, quand la Chenille a fini le premier tour du rouleau, elle travaille presqu'à moitié à couvert; le bout replié ne touche jamais entiérement la partie de la feüille sur laquelle il a été ramené, outre que souvent il n'est pas courbé autant qu'il le faudroit pour cela, c'est que ses bords sont dentelés, & laissent des passages au corps fléxible de l'Insecte. La Chenille se sert des mêmes passages pour faire sortir la moitié de son corps ou plus, lorsqu'elle file les liens qui attachent le milieu du troisiéme ou du quatriéme tour. Pour les liens qui sont plus près des bouts, les ouvertures des bouts lui donnent une plus libre sortie. Le bout de la queüe reste dans l'intérieur du rouleau, pendant que la tête va filer aussi loin qu'elle peut atteindre *, ce qui la mene assés près du milieu du rouleau. * Fig. 10.

Outre les liens qui sont tout du long du dernier tour du rouleau, l'Insecte a souvent besoin d'en mettre aux deux bouts, ou au moins à un des bouts; mais ils sont tellement disposés, qu'ils ne lui ôtent pas la liberté de sortir de l'intérieur de ce rouleau, & d'y rentrer. C'est-là son domicile, c'est une espece de cellule cylindrique, qui ne reçoit le jour

que par les deux bouts ; & ce qu'elle a de commode, c'eſt que ſes murs fourniſſent la nourriture à l'Animal qui l'habite. Cette Chenille vit de feüilles de Chêne ; étant à couvert, elle les ronge à ſon aiſe & en ſûreté. Elle commence par ronger le bout qui a été le premier contourné, & de ſuite elle mange tout ce qui a été tortillé, au dernier tour près. Auſſi de quatre à cinq tours que faiſoit une feüille tortillée par de-là le milieu, ou même entiérement tortillée, ſouvent on ne retrouve plus que le dernier tour.

Quelquefois j'ai trouvé que le rouleau avoit été formé de deux feüilles roulées ſelon leur longueur ; celle qui devoit occuper le centre, avoit alors été preſqu'entiérement rongée, il n'en reſtoit que les plus groſſes fibres. J'en ai vû qui en faiſant leur rouleau, ne laiſſoient pas de manger ; elles dreſſoient en même temps les endroits qui ſe ſeroient mal-aiſément pliés, elles les rongeoient.

Cette induſtrieuſe & laborieuſe Chenille eſt au plus de celles qui ſont d'une grandeur médiocre *. Elle eſt d'un gris ardoiſé ; quelquefois elle paroît pourtant d'un brun verdâtre, mais je crois que c'eſt quand elle eſt bien ſoulée de feüilles. Peut-être auſſi que ſa couleur paroît différente après des changements de peau, car elle en change probablement plusieurs fois, les dépoüilles qu'on trouve dans les rouleaux le prouvent. Elle eſt d'une extrême vivacité ; pour peu qu'on la touche, on la voit ſe remuer en différents ſens avec une grande vîteſſe.

* Fig. 17.

Un des bouts du rouleau eſt l'ouverture par où elle jette ſes excréments, qui ſont de petits grains noirs & à peu-près ronds.

Une partie d'une feüille, ou même une feüille de Chêne entiére, ne ſeroit pas une proviſion ſuffiſante pour la nourriture de nôtre Chenille pendant toute ſa vie ; elles ſe font de nouveaux rouleaux quand elles en ont beſoin. Après y avoir vêcu en Chenilles, elles s'y métamorphoſent en Cryſalides, & enſuite en Papillons. Le dernier rouleau qu'elles ſe font, differe un peu des autres, les tours en ſont moins ſerrés,

l'Insecte est devenu plus gros. Chaque tour de ce dernier rouleau n'est pas attaché par ces forts liens distribués d'espaces en espaces, des fils un peu écartés les uns des autres, mais qui regnent depuis un bout jusqu'à l'autre, le retiennent *; c'est une espece de toile légere dont la force n'est pas équivalente à celle des cordages employés ci-devant. Il semble que l'Insecte sçache proportionner la force qu'il employe à la résistance qu'il a à vaincre; plus le diametre des tours est petit, & plus le ressort de la feüille agit pour la redresser, aussi est-ce sur-tout le dernier tour qui n'est tenu que par la toile dont nous parlons. Dans la fabrique de cette espece de toile, on observe la même méchanique que nous avons remarquée dans celle des liens; elle est de même composée de deux plans de fils qui se croisent très-visiblement; ceux de dessous servent à tirer la feüille, à la courber, pendant que l'Insecte s'appuye dessus, & qu'il file ceux du plan supérieur qui doivent la fixer dans cette courbure. * Fig. 18.

C'est dans ces mêmes Etuis, où nos Chenilles ont vêcu & crû, qu'elles se transforment en Crysalides *. La peau des Crysalides est molle & tendre dans les premiers moments de la transformation, quoique par la suite elle devienne séche & dure; l'attouchement de la feüille seroit trop rude pour cette peau, lorsqu'elle ne vient que d'être dégagée de dessous l'enveloppe de Chenille. Il semble que l'Insecte ait prévû qu'il avoit à craindre cette incommodité, car lorsque le temps de cette premiére métamorphose approche, il tapisse l'intérieur du rouleau d'une légere couche de fils de soye, dont l'attouchement est plus doux que celui de la surface raboteuse de la feüille. * Fig. 19. & 20.

Enfin à l'état de Crysalide doit succéder celui de Papillon *. La condition de cette Chenille, comme celle de toutes les Chenilles que nous connoissons, est de vivre successivement sous ces trois formes différentes. Je ne sçais point assés précisément combien elle conserve celle de Crysalde, mais il ne m'a pas paru que ce fut plus de trois semaines. Quand elle est prête de la quitter, elle avance vers un des bouts du * Fig. 21. & 22.

* Fig. 18. r. rouleau jusqu'à en sortir près d'à moitié ou plus *; là, plus exposé à l'air, le fourreau de Crysalde acheve de se sécher, & les efforts que fait le Papillon, qu'il renferme, le brisent plus aisément. Le Papillon s'en échappe, & n'a plus besoin, pour prendre l'essor, que de laisser évaporer pendant quelques instants l'humidité de ses aîles. Si on éxamine dans le mois de Juillet les rouleaux de nos feüilles du Chêne, il y en aura peu à qui on ne trouve un fourreau de Crysalde qui est resté à un des bouts, & cela parce que les Papillons en sont sortis depuis le mois de Juin.

La couleur de ces Papillons est composée de différentes nuances de brun jaunâtre, les unes plus foncées, les autres plus claires, mêlées par des especes de taches qui font un agréable effet *. Les mêmes Chenilles en donnent de deux grosseurs différentes. Les plus petits, selon l'analogie ordinaire, devroient être les mâles, j'en ai pourtant vû d'accouplés qui ne différoient pas considérablement en grosseur. Pendant leur accouplement, ils sont placés derriére contre derriére, à la maniére des Hannetons.

* Fig. 21. & 22.

Au reste l'espece de Chenille grise, ou d'un gris verdâtre, dont nous avons parlé jusqu'ici, n'est pas la seule qui roule des feüilles de Plantes & d'Arbres, ni même la seule qui roule des feüilles de Chêne. J'ai observé d'autres especes, soit beaucoup plus grosses, soit plus petites, qui roulent aussi les feüilles de ce dernier Arbre, & entre celles-ci j'en ai observé d'entiérement vertes, de verdâtres, & de diverses autres couleurs. Il y en a une qui roule fort artistement les feüilles d'Orme, qui ne differe guére ni par sa grandeur, ni par sa couleur, de nôtre habile rouleuse. Mais comme toutes ces diverses especes n'ont point d'artifices différents de celui que nous avons suivi jusqu'ici, que leurs rouleaux ne sont pas toûjours aussi-bien faits que ceux que nous avons décrits, elles n'ont rien qui doive nous arrêter. En général presque toutes les rouleuses sont d'une très-grande vivacité.

Il nous reste à parler des Chenilles qui, au lieu de rouler les feüilles, se contentent de les plier. Le nombre de ces

plieuſes eſt encore plus grand que celui des rouleuſes, leurs ouvrages ſont plus ſimples; mais il y en a qui malgré leur ſimplicité ne laiſſent pas de paroître induſtrieux. Le Chêne nous fournit encore de ceux-ci; on voit de ſes feüilles dont le bout a été ramené vers le deſſous *; il y a été appliqué & aſſujetti preſque à plat, il ne reſte d'élévation ſenſible qu'à l'endroit du pli. J'ai obſervé de ces feüilles, où tout le contour de la partie pliée étoit logé dans une eſpece de rainure que la Chenille avoit creuſée dans plus de la moitié de l'épaiſſeur de la feüille. Sur d'autres feüilles du même Arbre, on voit que de leurs grandes dentelures ont été de même pliées en deſſous. La plûpart des autres Arbres nous offrent auſſi des feüilles pliées par les Chenilles. Mais il n'y en a point où on puiſſe en obſerver plus commodément que ſur les Pommiers, ils en ont de toutes eſpeces à nous faire voir; de ſeulement pliées en partie, je veux dire de ſimplement courbées *; de pliées entiérement, je veux dire, où la partie pliée a été ramenée à plat ſur une autre partie de la feüille; de courbées, de pliées vers le deſſus, & de courbées ou pliées vers le deſſous. Entre ces derniéres, le Pommier même en a qui ont une ſingularité que je n'ai obſervée ſur aucunes de celles des autres Arbres. Tout autour du bord de la dentelure de la partie repliée, il y a un bourlet comme cotonneux, qui eſt pourtant de ſoye d'un jaune pâle *; il s'éleve d'environ une ligne au deſſus de la partie qu'il entoure; il la borde comme feroit un cordonnet; il a plus d'épaiſſeur que de largeur.

* Fig. 23.

* Fig. 24.

* Fig. 27.

Au lieu que les Chenilles rouleuſes habitent des rouleaux, les plieuſes ſe tiennent dans une eſpece de Boîte plate; elles n'y ont pas un grand eſpace, mais il eſt proportionné à la grandeur & à la groſſeur de leur corps; ordinairement elles ſont des plus petites. Chacune eſt bien cloſe dans cette eſpece d'étui plat, ou de boîte; il reſte pourtant quelquefois une ouverture à chaque bout, mais à peine ces ouvertures ſont-elles ſenſibles *. Elles ſe renferment auſſi pour ſe nourrir à couvert; mais ſi elles rongeoient, comme font les rouleuſes,

* Fig. 27. *BD.*

l'épaiſſeur entiére de la feüille, leurs eſpeces de boîtes ſeroient bien-tôt tout à jour, au lieu que tant qu'elles y demeurent, jamais on n'y voit de trous. Leur goût, & peut-être leur prévoyance, les porte à ne manger qu'une partie de l'épaiſſeur de la feüille. Celles qui plient les feüilles en deſſous, épargnent la membrane qui en fait le deſſus, & celles qui plient les feüilles en deſſus, épargnent la membrane qui en fait le deſſous. Les unes & les autres n'attaquent point les nervûres & les fibres un peu groſſes. Elles ſçavent ne détacher que la ſubſtance la plus molle, la pulpe, le parenchime qui eſt renfermé dans le rézeau fait par l'entrelaſſement des fibres. Auſſi la ſtructure de ce rézeau eſt-elle bien plus ſenſible dans les endroits où elles ont rongé que dans les autres.

Celles qui habitent des feüilles bien pliées, commencent à ronger la ſubſtance de la feüille à un des bouts de l'étui, & la partie qui a été rongée la premiére, eſt celle ſur laquelle elles dépoſent leurs excréments. Elles continüent à ronger, en avançant vers l'autre bout, mais elles ont la propreté d'aller jetter leurs excréments dans l'endroit où ſont les premiers; ainſi ils ſe trouvent accumulés à un coin, & jamais il n'y en a d'épars. C'eſt au moins ce qu'obſervent réguliérement les Chenilles de nos Pommiers, dont les étuis ſont environnés d'un bourlet ou cordon ſoyeux. On voit avec plaiſir manger celles qui ſe contentent de courber des feüilles, ſur-tout ſi on les conſidere à la Loupe. On remarque avec quelle adreſſe & avec quelle vîteſſe elles découpent partie de l'épaiſſeur de la feüille. Leur tête eſt un peu inclinée vers un côté, afin apparemment qu'une ſeule de leurs dents perce d'abord une petite portion de la ſubſtance de la feüille, que les deux dents, ſerrées l'une contre l'autre, dans le moment ſuivant, ſçavent détacher. Les coups de dents ſe ſuccedent avec une vîteſſe prodigieuſe, & à meſure qu'ils ſont réitérés, le rézeau, formé par les fibres, ſe découvre, devient net, dans les endroits où auparavant il étoit à peine ſenſible. Ce n'eſt que par de petites aires que la ſubſtance de la feüille eſt emportée.

Ces Chenilles, qui ſe contentent de courber les feüilles,

ſont celles auſſi qui ſont les plus aiſées à obſerver dans leur travail, il eſt le plus ſimple de ceux de ce genre ; il ſuffira pourtant de l'avoir détaillé, pour avoir donné une idée de tous les autres. Une petite Chenille d'un verd clair, dont chaque anneau eſt chargé de pluſieurs petits grains noirs, eſt ſur toutes commode à ſuivre, elle aime à ronger le deſſus de la feüille, & par conſéquent elle doit plier la feüille, ou ramener la dentelure de quelque endroit de ſes bords, vers le deſſus ; elle ſe contente de faire décrire un arc tantôt plus, tantôt moins courbe à la partie qu'elle contourne *, mais jamais elle ne la contourne au point de ramener ſes bords à toucher le deſſus de la feüille. Elle ne craint point la préſence du Spectateur, elle plie la feüille ſur ſa main, s'il tient ſa main en repos. Une de ces Chenilles étant poſée ſur le deſſus d'une feüille platte de Pommier, n'eſt donc pas long-temps ſans travailler à donner à une portion de cette feüille la courbure qu'elle lui veut. Entre les différents endroits des bords de la feüille, il y en a toûjours qui s'élevent plus que les autres. C'eſt à un de ceux-là qu'elle s'adreſſe ; elle s'en approche à une diſtance convenable, & ſe fixant ſur ſa queüe & ſur les anneaux qui en ſont proche, elle porte ſa tête ſur le bord de la feüille, & de-là la ramene ſur le plat de la feüille, du côté de la principale nervûre * ; elle file de ſuite pluſieurs fils paralleles les uns aux autres, qui font le commencement d'une piéce de toile qu'elle va étendre.

* Fig. 24.

* Fig. 25.

Nous avons conſidéré la feüille comme à peu-près platte ; mais ſeulement comme à peu-près platte, ainſi les fils qui viennent d'être filés ne ſont appliqués contre cette feüille que par leurs bouts, le reſte de leur longueur eſt en l'air. La Chenille monte ſur ces fils qui, chargés de ſon poids, forcent le bord de la feüille à avancer vers la principale nervûre. Les nouveaux fils, que la Chenille file en cette poſition, maintiennent le bord de la feüille dans le commencement de la courbure qu'elle a priſe ; en étendant enſuite cette toile, & marchant deſſus à meſure qu'elle l'étend, la Chenille force toûjours de plus en plus la feüille à ſe plier. Cette méchanique

eſt bien ſimple, & ne mériteroit pas de nous arrêter, après avoir vû pratiquer l'équivalent par nos rouleuſes, mais le ſupplément qu'il faut y ajoûter ne doit pas être paſſé ſous ſilence. Les fils qui compoſent la toile, n'ont qu'une longueur proportionnée aux arcs que la tête de la Chenille peut décrire, étant fixée ſur une portion de ſon corps. Si au moyen de cordes ſi courtes, & dirigées comme elles le ſont, la Chenille forçoit la feüille à ſe courber entiérement, la feüille ainſi courbée décriroit une circonférence d'un très-petit rayon, telles que ſont celles des premiers tours de certains rouleaux. Or la courbure qu'elle veut, & qu'elle a beſoin de donner à cette partie de la feüille, doit être celle d'un cercle, ou d'une autre courbe d'un plus grand rayon. Pour parvenir à la lui donner, elle ne continüe pas à la tirer par des cordes ſi courtes, ou dont les directions ſoient ſi inclinées. Après avoir filé une certaine étendüe de toile, elle ceſſe de ſuivre la même ligne, elle vient ſe placer plus près de la groſſe nervûre *, & là elle commence à filer une toile compoſée de fils; elle colle un des bouts de chacun des nouveaux fils à la toile précédente, & l'autre le plus près qu'elle peut aller de la principale nervûre, ou même par de-là. Ce qui fait le même effet que ſi elle eût augmenté près d'une fois la longueur des premiéres cordes. Elle monte alors ſur ce nouveau plan, & ſe place vers l'endroit où les deux piéces de toiles ont été réünies. Là placée, elle attache des fils au bord de la feüille, & vers la principale nervûre, elle forme une nouvelle toile; à cette nouvelle toile, elle attache bien-tôt les fils d'une autre, qui croiſent ceux de la précédente, & ainſi de ſuite elle continüe à faire courber la feüille, mais doucement, & ſans que ſa courbure ſoit conſidérable. Des plans de toile s'élevent ainſi ſucceſſivement les uns aux deſſus des autres, & quand la Chenille a avancé ſon ouvrage, elle paroît, par rapport à la ſurface de la feüille, comme ſur un échafaud.

* *Fig.* 26.

Elle ne ſe tient pourtant pas toûjours ſur ces plans de toile; de temps en temps elle en deſcend, & vient ſur la ſurface de la feüille, quelquefois c'eſt pour s'y repoſer en mangeant;

mangeant; quelquefois on l'y voit la tête levée, agiter avec vîtesse ses premiéres jambes; elles lui servent alors de mains pour briser les toiles des plans inférieurs, qui ne peuvent plus que l'incommoder, lorsqu'elle veut marcher sur la feüille, & qui peuvent même s'opposer à l'effet qu'elle a à faire produire aux toiles des plans supérieurs.

Celles-ci, comme je l'ai assés dit, se contentent de courber une portion de la feüille; mais celles qui achevent de la plier, ne commencent pas leur ouvrage autrement; elles commencent par faire prendre de la courbure à la partie qui doit être ramenée à plat, & quand elle en a pris suffisamment, la Chenille passe sous le plan de toile qui la tient courbée, & au dessous de ce plan elle en file d'autres, successivement, qui sont tous de plus proches en plus proches du pli de la partie recourbée. L'effet de ceux-ci dépend de leur position. N'en considérons qu'un, celui qui suit immédiatement l'extérieur. D'un côté les bouts de ses fils ne sont pas attachés à la dentelure, ils le sont un peu au dessous, & par l'autre bout ils sont attachés à partie de la feüille correspondante. D'où il est clair que quand la Chenille charge ce plan de fils, cette toile, qu'elle approche l'une de l'autre les deux parties de la feüille, qu'elle les approchera encore davantage, & qu'elle les conduira à s'appliquer l'une contre l'autre, en filant une seconde, une troisiéme couche de fils, s'il en est besoin, dont les bouts des fils se trouvent toûjours attachés plus près de l'endroit où doit être le pli.

Les couches de fils, les toiles qui précédent la derniére filée, ne produisent presque plus d'effet *. Les fils des premiéres se trouvent en dehors de la dentelure, & la Chenille y pousse ceux des toiles qui la suivent. De-là il arrive que ces fils lâches, entrelassés, & poussés par de-là le bord de la partie pliée, forment une espece de bourlet, qui semble avoir été fait avec plus d'artifice qu'il ne l'a été *.

* Fig. 28.

* Fig. 27.

Au reste, quelque soit la position de la feüille, la Chenille fait toûjours le même usage du poids de son corps pour la courber ou plier. Si une feüille est posée horizontalement,

& que la Chenille la courbe en deſſus, alors le plan des fils eſt plus élevé que la ſurface de la feüille, & la Chenille va ſe mettre ſur le deſſus de cette toile. Mais ſi la Chenille roule la feüille en deſſous, le plan de chaque toile eſt plus bas que celui de la feüille, & la Chenille charge cette toile, tantôt en ſe poſant ſur la ſurface intérieure, & elle eſt alors dans une ſituation naturelle, tantôt en ſe mettant à la renverſe ſur la ſurface extérieure, & tenant ſes jambes cramponnées entre les fils de la toile. Il y en a même qui ne travaillent à plier les feüilles de Chêne, qu'en ſe tenant cramponnés de la ſorte.

Des circonſtances déterminent quelquefois des Chenilles, qui plient ordinairement des feüilles en deſſous, à les plier en deſſus, elles profitent des diſpoſitions qu'a la feüille à ſe contourner plus d'un côté que de l'autre; c'eſt ce que m'ont fait voir celles que j'ai fait travailler chés moi. Ainſi il ne leur eſt pas abſolument eſſentiel de ronger la feüille par une de ſes ſurfaces plûtôt que par l'autre. Il y a des feüilles de Chêne qui ſont pliées par le moyen de paquets, de liens de fils, pareils à ceux qu'employent les rouleuſes, mais on trouve aſſés ordinairement dans l'intérieur du pli des toiles, qui ont apparemment ſervi à achever d'approcher les deux parties l'une de l'autre.

Toutes ces Chenilles ſe métamorphoſent en Papillons, mais la plûpart très-petits, ce qui m'a fait négliger de les faire graver.

Diverſes eſpeces d'Araignées courbent auſſi des feüilles; d'autres les plient, & d'autres les aſſemblent en paquet. Ce que nous avons vû pratiquer aux Chenilles, met aſſés au fait des différentes maniéres dont s'y peuvent prendre les Araignées, qui ſont de maîtreſſes fileuſes. Au reſte ſi les Araignées plient des feüilles, c'eſt pour s'y renfermer avec leurs œufs, qu'elles dépoſent ſur ces mêmes feüilles, & qu'elles y enveloppent de ſoye. Là elles ſe placent ſur le paquet d'œufs, ſur lequel elles reſtent conſtamment, comme s'il avoit beſoin d'être couvé.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA *Figure 1*, repréſente une feüille, dont le bout a été roulé vers le deſſous. La face *AA*, qui paroît ici, eſt celle de deſſous. *BC* le rouleau, dont la partie qui paroît eſt une portion du deſſus de la feüille. *lo, lo, lo*, marquent quelques-uns des liens de ſoye qui tiennent cette feüille roulée.

La *Figure 2*, eſt celle d'une feüille roulée parallelement, ou à peu-près, à ſa principale nervure *N*. La face *AN* eſt le deſſous de la feüille. *BC* le rouleau. *lo, lo, lo*, quelques-uns des liens de ſoye qui conſervent ce rouleau dans ſa forme. Ici il n'y a à peu-près que la moitié de la feüille roulée.

La *Figure 3*, eſt celle d'une feüille roulée en entier, parallelement à ſa principale nervure. *ll, ll*, les liens du rouleau.

La *Figure 4*, fait voir une Chenille, qui profitant de la petite courbure que la feüille a en *A*, va travailler à la rouler parallelement à ſa principale nervure.

La *Figure 5*, & la *Figure 6*, repréſentent des Chenilles en différentes attitudes, qui n'ont encore collé leurs fils que ſur le plat de la feüille, & au deſſous de la partie courbée, ou à ſon bord.

La *Figure 7*, repréſente une Chenille qui colle un fil en deſſus de la feüille, en deſſus de la partie repliée.

La *Figure 8*, eſt celle d'une feüille qu'une Chenille a commencé a rouler par le bout. Elle a déja attaché les liens *lo, lo*, & file actuellement le lien *IK*.

Dans la *Figure 9*, la Chenille a filé trois liens *lo, lo, lo*, & va en commencer un quatriéme.

La *Figure 10*, montre un rouleau, dont le premier tour eſt fini, & dont le ſecond eſt commencé. Les liens *MN* de ce tour ſont au deſſus des liens *lo* du tour précédent.

La *Figure 11*, eſt celle d'une feüille, dont le ſecond tour eſt roulé ſur une plus grande longueur que dans la Fig. 10.

La *Figure 12*, repréſente deux plans de lignes *AB, CD*, qui ſe croiſent en *E*: elle donne en grand une image de la

ſtructure de chaque lien *lo* des autres Figures. Les lignes de chacun de ces plans doivent être regardées comme autant de fils.

Dans la *Figure 13*, une Chenille eſt repréſentée filant le premier plan *AB* des fils, dont un paquet ou lien eſt compoſé.

Dans les *Figures 14* & *15*, la Chenille a changé de côté, & file le ſecond plan, le plan ſupérieur des fils du lien *CD*. Dans la Fig. 14, elle colle le bout d'un nouveau fil en *C*, & dans la Fig. 15, elle colle l'autre bout du même fil en *D*; & pendant qu'elle l'y colle, le poids de ſon corps charge le premier plan.

. La *Figure 16*, eſt la coupe d'un rouleau, qui fait environ deux tours; on y voit les fils des liens *lo* lâches & flottants, pendant que les fils ſupérieurs du lien *NM* du ſecond tour ſont ſeuls tendus.

La *Figure 17*, repréſente nôtre Chenille rouleuſe dans la grandeur naturelle. On l'a dans d'autres attitudes dans pluſieurs des Figures précédentes.

La *Figure 18*, eſt celle d'une feüille que la Chenille a roulée, lorſqu'elle étoit prête de ſe métamorphoſer. Les fils qui maintiennent le dernier tour de ce rouleau depuis *p* juſqu'en *q*, ne ſont pas diſpoſés par paquets, ils forment une eſpece de toile. En *r* eſt la coque de la Cryſalide, d'où l'Inſecte eſt ſorti ſous la forme de Papillon.

La *Figure 19*, repréſente une Cryſalide de cette Chenille, vûë par deſſous en *A*, & par deſſus en *B*.

La *Figure 20*, eſt la Cryſalide *A* deſſinée plus grande que nature.

Les *Figures 21* & *22*, ſont celles de deux des Papillons dans leſquels nos Chenilles ſe transforment. Celui de la Figure 21 eſt plus petit que celui de la Fig. 22.

La *Figure 23*, eſt celle d'une feuille de Chêne, dont le bout *bcb* a été plié en deſſous.

La *Figure 24*, repréſente une de ces feüilles de Pommiers que les Chenilles ſe contentent de courber.

La *Figure 25*, fait voir une Chenille qui commence à

attacher des fils à une feüille de Pommier pour la courber: elle a déja fait une eſpece de toile compoſée de fils paralleles.

Dans la *Figure 26*, la Chenille a filé une ſeconde portion de toile; un des bouts de chacun des fils de celle-ci eſt attaché ſur la toile précédente. Les fils de la derniére croiſent les fils de la premiére, leur direction eſt oblique à celle des autres. Entre *f, f,* on voit que les fils de la ſeconde toile ſont attachés à ceux de la premiére.

La *Figure 27*, eſt celle d'une feüille de Pommier pliée vers le deſſous. *BCD* eſt un bourlet ou cordon ſoyeux, qui entoure la dentelure de la partie pliée.

La *Figure 28*, fait voir la feüille précédente dans un temps où elle n'étoit pas entiérement pliée. En *efg* paroiſſent les toiles, qui plus preſſées les unes contre les autres, font le bourlet ſoyeux, lorſque la portion de la feüille eſt entiérement pliée.



METHODE

Pour trouver les Tautochrones, dans des Milieux résistants, comme le Quarré des Vîtesses.

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.

AVANT que d'entreprendre la Solution générale, voici quelques considérations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles.

DÉFINITION I. Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée a, & d'une indéterminée x, de maniére que a & x fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque terme ; prenant ensuite une autre déterminée A, & une indéterminée X, proportionnelles aux premiéres a & x, c'est-à-dire, telles que $a \,.\, A :: x \,.\, X$, si l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x, j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espece, *fonctions semblables*. Ainsi par ex. $a^3 + faax + gaxx + hx^3$ & $A^3 + fAAX + gAXX + hX^3$ sont des fonctions semblables ; de même $V(a^4 + fx^4)$ & $V(A^4 + fX^4)$; $\frac{aa + fax + gxx}{ha^3 + ix^3}$ & $\frac{AA + fAX + gXX}{hA^3 + iX^3}$; $a + V(ax + fxx)$ & $A + V(AX + fXX)$; $\frac{a + x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ & $\frac{A + X}{AXX + f\sqrt{(A^6 + X^6)}}$; & ainsi des autres, prenant toûjours $f, g, h, i,$ &c. pour des coëfficients numériques.

DÉFINITION II. J'appelle aussi *fonctions semblables transcendentes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par dx & dX, & qui seroient supposées intégrées par le signe $\int$. Ainsi par ex. $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ & $\int \frac{AdX}{\sqrt{(AA - XX)}}$ sont des fonctions semblables transcendentes, & ainsi des autres.

DÉFINITION III. Les fonctions semblables, soit algébriques, soit transcendentes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur, de l'exposant des termes du numérateur, en comptant dx ou dX pour une dimension; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{(a^4+x^4)}$ est réputé de deux dimensions; $\frac{a+x}{axx+f\sqrt{(a^6+x^6)}}$ aura pour dimension $1-3=-2$; $\int\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ est d'une dimension, parce que adx est de deux dimensions, & $\sqrt{(aa-xx)}$ d'une; ainsi cette fonction $\int\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ a pour exposant $2-1=1$, de même $\frac{a^3+faxx}{gaxx+hx^3}$ & $\int\frac{axdx}{fa^3+gx^3}$ n'ont aucune dimension, parce que $3-3=0$.

THÉOREME.

Toutes les fonctions semblables, soit transcendentes, soit algébriques, sont entre elles comme leurs quantités semblables a *&* A, *ou* x *&* X, *élevées au même exposant que ces fonctions. Ainsi par ex.* $aa . AA :: (xx . XX ::) \frac{a^3+faxx}{gx} . \frac{A^3+fAXX}{gX} :: \int dx\sqrt{(aa+xx)} . \int dX\sqrt{(AA+XX)} :: \int\frac{x^3dx}{aa+ax} . \int\frac{X^3dX}{AA+AX}$; *de même* $\frac{1}{a} . \frac{1}{A} :: (\frac{1}{x} . \frac{1}{X} ::) \frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}} . \frac{1}{\sqrt{(AA-XX)}} :: \int\frac{adx}{\sqrt{(a^6-x^6)}} . \int\frac{AdX}{\sqrt{(A^6-X^6)}} :: \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6+x^6)}} . \int\frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6+X^6)}}$, *& ainsi des autres.*

COROLL. L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entre elles: car elles sont entre elles comme a^0 à A^0, ou comme x^0 à X^0. Mais $a^0=1=A^0$, ou $x^0=1=X^0$. Ainsi par exemple $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=\int\frac{AdX}{\sqrt{(A^4-X^4)}}$; $\int\frac{aadx+xxdx}{a^3+fx^3}=\int\frac{AAdX+XXdX}{A^3+fX^3}$; $\frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{f\sqrt[3]{(axx)}}=\frac{A+\sqrt{(AA-XX)}}{f\sqrt[3]{(AXX)}}$; $\frac{a+fx}{a-gx}+\frac{aa+hax}{aa-gxx}$

$= \frac{A+fX}{A-gX} + \frac{AA+hAX}{AA-gXX}$, & ainſi des autres.

SCHOLIE. J'ai déja traité ce même ſujet autrefois dans un Mémoire que donna feu mon Fils Nicolas, inſéré dans le VII.e Tome des Suppl. des Act. de Leipſ. pag. 322. La démonſtration ſe préſente d'elle-même, pour peu qu'on y faſſe attention, & eſt plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette conſidération eſt le ſeul moyen de ſe bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes où l'on eſt obligé de conſidérer les fonctions ſemblables, comme l'on verra dans la ſuite.

PROBLEME I, ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe par laquelle un corps deſcendant par ſa peſanteur dans un milieu d'une denſité uniforme, de quelque poinct de la Courbe qu'il commence à deſcendre, parvienne toûjours dans un temps égal au poinct le plus bas; & de-là remonte dans le même temps par l'autre branche de la Courbe juſqu'où il pourra remonter, en ſuppoſant la réſiſtance comme le quarré des vîteſſes.

§. I. SOLUT. J'appelle l'Arc total *deſcendu*, celui qui eſt compris entre le poinct le plus élevé d'où le corps commence à deſcendre, & le poinct le plus bas; l'Arc total *remonté*, celui qui eſt compris entre le poinct le plus bas que je prends pour le *ſommet* de la Courbe, & le poinct juſqu'où il peut remonter avec ſa vîteſſe acquiſe, juſqu'à ce qu'il ait perdu toute ſa vîteſſe; l'Arc *partial*, ſoit deſcendu, ſoit remonté, eſt une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, priſe depuis le ſommet juſqu'au lieu de la Courbe où ſe trouve le corps, ſoit en deſcendant, ſoit en montant.

II. Soit maintenant la gravité qui anime les corps $=g$, la vîteſſe dans un poinct quelconque de l'Arc total $=v$, l'Arc partial $=r$ (je l'appelle plûtôt r que s, parce que la lettre s ſe confondroit facilement avec le nombre 5) l'Abſciſſe priſe ſur l'Axe élevé verticalement depuis le ſommet de la Courbe, correſpondante à l'Arc partial, $=x$, l'Appliquée correſpondante au même Arc, $=y$, la réſiſtance qu'on ſuppoſe proportionnelle

proportionnelle au quarré de la vîtesse, $= \frac{vv}{n}$, où j'entends par $\frac{1}{n}$, l'intensité de cette résistance, n étant constant pour un arc total quelconque.

III. Par la décomposition de la force de la pesanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $= \frac{gdx}{dr}$; de laquelle ôtant, lorsque le corps descend, ou à laquelle ajoûtant, lorsque le corps remonte, la force de la résistance $\frac{vv}{n}$; l'on a pour la force accélératrice ou retardatrice $(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n})$ *Not. B.* (le signe supérieur ayant lieu lorsque le corps descend, & l'inférieur lorsqu'il remonte, ce qu'il faudra aussi toûjours observer dans la suite) l'on aura donc $(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}) \times \frac{dr}{v} = -dv$; d'où l'on tire cette Equation $gdx \mp \frac{vvdr}{n} = -vdv$ à laquelle il faut satisfaire. En faisant $dr = \frac{dz}{z}$; il vient $ngzdx \mp vvdz = -nzvdv$, ou $-2gzdx = \mp \frac{2}{n} vvdz + 2zvdv$; divisant par $z^{\pm \frac{2}{n} + 1}$, l'on aura $-2gz^{\mp \frac{2}{n}} dx = (\mp \frac{2}{n} vvdz + 2zvdv) z^{\mp \frac{2}{n} - 1}$; Pour intégrer cette Equation, il ne suffit pas d'écrire $-2g \int z^{\mp \frac{2}{n}} dx = vvz^{\mp \frac{2}{n}}$, (car cette valeur de $vvz^{\mp \frac{2}{n}}$, exprimée par $-2g\int z^{\mp \frac{2}{n}} dx$, est incomplete, n'appartenant à aucun arc total) mais $2gA - 2g\int z^{\mp \frac{2}{n}} dx = vvz^{\mp \frac{2}{n}}$, où je prends A pour quelque chose de constant, à quoi $\int z^{\mp \frac{2}{n}} dx$ devient égal, lorsque x devient l'Abscisse correspondante à quelque arc total, de maniére que A soit

conſtant pour cet arc total entier, mais différent pour un arc total différent.

IV. L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm\frac{2}{n}} - 2gz^{\pm\frac{2}{n}} \int z^{\mp\frac{2}{n}} dx$ $=$ (à cauſe de $z = c^r$, j'entends par c le nombre dont le logarithme eſt l'unité) $2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}} \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx$. Et ainſi dt ou le petit temps par l'élément d'un arc total quelconque ſera $= \frac{dr}{\sqrt{(2gAc^{\pm\frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm\frac{2r}{n}} \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx)}}$; ou pour abréger, en multipliant par la conſtante $\sqrt{2g}$, l'on aura $dt\sqrt{2g} = \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}} \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx)}}$. Afin donc que le temps, que le corps employe à deſcendre ou à remonter par un arc total quelconque, ſoit toûjours le même, il faut faire enſorte que la valeur de $\int \frac{dt}{2g}$, qu'on vient de trouver, ſoit égale à quelque fonction ſemblable de dimenſion nulle, comme par ex. $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$, où j'entends par m un nombre arbitraire conſtant, & dans laquelle le changement de la lettre A ne change point la valeur de la fonction; car $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$ donne toûjours un angle droit pris autant de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne A, lorſque PP devient $= AA$.

V. Pour faire donc enſorte que la valeur du temps qu'on vient de trouver $\int \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm\frac{2r}{n}} - c^{\pm\frac{2r}{n}} \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx)}}$ ſoit ſemblable à la ſomme qu'on a choiſie $\int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$, j'écris dans l'expreſſion du temps AA pour A, & je diviſe l'un & l'autre terme par $c^{\pm\frac{r}{n}}$, & j'ai $\int \frac{c^{\mp\frac{r}{n}} dr}{\sqrt{(AA - \int c^{\mp\frac{2r}{n}} dx)}}$, que je

suppose $= \int \frac{m\,dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$. La question se réduit donc à faire enſorte que $c^{\mp\frac{r}{n}}\,dr = m\,dP$, & que de plus $\int c^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx = PP$, car on tirera de-là la relation entre r & x dans laquelle A n'entrera point : ce que je fais ainſi.

VI. Par la premiére Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp\frac{r}{n}}\,dr = dP$; je l'integre, en obſervant la correction néceſſaire, afin que r & P s'évanoüiſſant, la valeur de P s'évanoüiſſe auſſi, & l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp\frac{r}{n}} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm} (\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n)^2 = PP$ qui doit être $= \int c^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx$; en différentiant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp\frac{r}{n}}\,dr\,(\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n) = c^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx$; d'où l'on tire tout d'un coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm\frac{r}{n}}\,dr\,(\mp nc^{\mp\frac{r}{n}} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm}\,dr \pm \frac{2n}{mm} c^{\pm\frac{r}{n}}\,dr$, ou $mm\,dx = \mp 2n\,dr + 2nc^{\pm\frac{r}{n}}\,dr$; en intégrant & faiſant encore la correction néceſſaire, afin que x s'évanoüiſſant, r s'évanoüiſſe auſſi, l'on aura $mmx = -2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm\frac{r}{n}}$; qui eſt l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation différentielle ſans quantités exponentielles, on le pourra de la maniére ſuivante : Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = mmx + 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation différentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a auſſi $2nnc^{\pm\frac{r}{n}} = \pm \frac{mmn\,dx}{dr} + 2nn$; donc $mmx + 2nn \pm 2nr = \pm \frac{mmn\,dx}{dr} + 2nn$, qui réduite, donne $mmx\,dr$

$\pm 2nrdr = \pm mmndx$, ou $\pm mmxdr + 2nrdr = mmndx$.

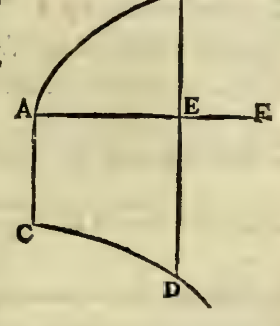
VII. *Coroll. 1.* Lorſque $n = \infty$, c'eſt-à-dire, lorſque $\frac{vv}{n}$ ou la réſiſtance eſt nulle, l'on aura $2rdr = mmdx$ & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abſciſſes ſont proportionnelles aux quarrés des arcs correſpondants, & qu'ainſi la Courbe eſt la Cycloïde, comme il doit arriver; car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne réſiſte point, il n'y a que la Cycloïde qui puiſſe être Tautochrone.

VIII. *Coroll. 2.* Mais ſi n demeurant finie, l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\pm xdr = ndx$, qui eſt l'Equation de la Tractoire de M. Huygens, dont la tangente eſt par-tout $= n$; enſorte que cette Tractoire eſt une des Tautochrones dans un milieu réſiſtant comme les quarrés des vîteſſes; mais comme ici le poinct le plus bas eſt à une diſtance infinie, car c'eſt le poinct où la tangente ſe confond avec l'aſymptote horiſontale, l'on voit que les temps de chaque deſcente, de quelque point de la Courbe qu'on commence à les compter, ſont infinis, mais cependant égaux, car dans certains cas les infinis ont entre eux une raiſon déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui ſont verſés dans le Calcul infinitéſimal.

Conſtruction de la Tautochrone.

IX. Voici comme on peut conſtruire la Tautochrone, que nous venons de trouver : Puiſque $dx = \mp \frac{2ndr}{mm} \pm \frac{2nc^{\pm\frac{r}{n}}dr}{mm}$, l'on aura dy ou $V(dr^2 - dx^2) = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm\frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm\frac{2r}{n}})} : mm$, & ainſi $y = \int dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm\frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm\frac{2r}{n}})} : mm$. Et comme l'on a de plus $x = (\mp 2nn$

$\mp 2nr + 2nnc^{\pm\frac{r}{n}}$) : mm, l'on aura les deux valeurs de x & y, en ſuppoſant les quadratures & les logarithmes pour une indéterminée r qu'on prendra.



Ayant donc décrit ſur l'Axe commun AF les deux Courbes AB & CD, telles que prenant l'abſciſſe $AE = r$, l'on ait l'appliquée $BE = \mp \frac{2n}{mm} \mp \frac{2nc^{\pm\frac{r}{n}}}{mm}$, & l'autre $ED = \sqrt{}(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm\frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm\frac{2r}{n}}) : mm$, les aires ABE & $ACDE$ diviſées par une ligne arbitraire L, donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; ſçavoir $\frac{ABE}{L} = x$ & $\frac{ACDE}{L} = y$.

SCHOLIE.

X. m marquant un multiple quelconque arbitraire de l'angle droit, nôtre ſolution donnera toûjours une infinité de Tautochrones particuliéres ſelon la diverſité infinie de m; ce qu'on voit aſſés, puiſque dans le cas même où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui eſt la Tractoire de M. Huygens *(§. 8.)* Au reſte l'on tire de nôtre Solution générale pluſieurs autres Problemes utiles & curieux, comme ceux-ci.

PROBLEME II.

XI. *La longueur d'un Arc total quelconque deſcendu dans l'Hypotheſe que nous avons priſe d'une réſiſtance proportionnelle au quarré de la vîteſſe, étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total remonté qui le ſuit immédiatement.*

SOLUTION.

Puiſque nous avons trouvé pour la deſcente *(§. 4.)* vv

$= 2gAc^{\frac{2r}{n}} - 2gc^{\frac{2r}{n}} \int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ & $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx = (\S. 6.)$ $\frac{1}{mm}(-nc^{-\frac{r}{n}} + n)^2 = \frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1)$ l'on aura $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$. Supposant maintenant l'Arc total descendu $= a$, il faut qu'au commencement de la descente, vv soit $= 0$, c'est pourquoi il faut faire $2gAc^{\frac{2r}{n}} = \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+\frac{r}{n}} + c^{+\frac{2r}{n}})$, d'où l'on tire $A = \frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1) =$ (lorsque r devient $= a$) $\frac{nn}{mm}(c^{-\frac{2a}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} + 1)$ $= \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$. Et puisque au point le plus bas de la descente, lorsque $r = 0$, $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ s'évanoüit, l'on aura vv, ou le quarré de la vîtesse finale du mobile descendant $= 2gAc^{\frac{2r}{n}} =$ (à cause de $r = 0$) $2gA =$ (à cause de $A = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$) $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$. Je trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b, le quarré de la vîtesse initiale du mobile remontant $= \frac{2nng}{mm}(c^{\frac{b}{n}} - 1)^2$. Mais la vîtesse finale du mobile descendant est la même que la vîtesse initiale du mobile remontant; d'où il suit que $1 - c^{-\frac{a}{n}} = c^{\frac{b}{n}} - 1$, & $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}} = 2 - \frac{1}{c^{\frac{a}{n}}}$ $= \frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{c^{\frac{a}{n}}}$; prenant les logarithmes du premier & du

dernier, l'on a $\frac{b}{n} = l.(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - \frac{a}{n}$; d'où enfin l'on a $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$.

XII. *Scholie.* La valeur de b qu'on vient de trouver, a toûjours lieu pour quelque valeur de n que ce soit; mais si $n = \infty$, c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b = a$, parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde (qui est la Tautochrone dans le vuide) doit être égal à l'Arc total descendu précédent; cependant nôtre expression ne paroît pas donner $b = a$, car $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devient $\infty\, l(2c^{\frac{a}{\infty}} - 1) - a = \infty\, l(2c^{0} - 1) - a = \infty\, l(2 - 1) - a = \infty\, l(1) - a = \infty \times 0 - a$, ce qui ne fait rien connoître de déterminé, puisque $\infty \times 0$ ou le produit de l'infini par un infiniment petit peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de faire voir que $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devient effectivement $= a$, lorsque $n = \infty$. En me servant du premier moyen, je supposerai $b = a$, & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour n, afin que la valeur de b, $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devienne $= a$; pour cela je fais $a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, d'où l'on a $2a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; & passant des logarith. aux nombres, j'ai $c^{2a} = (2c^{\frac{a}{n}} - 1)^n$ ou $c^{\frac{2a}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$, qui est une Equation quarrée, dont la racine extraite à l'ordinaire, donne $c^{\frac{a}{n}} = 1 \pm V(1 - 1) = 1 \pm 0$, & prenant les logarithmes, l'on a $\frac{a}{n} = l\,1 = 0$, donc $n = \infty$; d'où il suit que dans le cas où $n = \infty$,

l'on aura b ou $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = a$.

XIII. Par le moyen direct, voici ce que je fais ; de la quantité $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ je fais cette fraction $l\left(\frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)$ qui lorsque $n = \infty$, devient $\frac{0}{0}$; c'est une fraction dont les deux termes s'évanoüissent, il faut donc chercher sa valeur par la regle donnée dans l'Anal. des Infin. petits, art. 163, en considérant n comme variable, & divisant la différentielle du numerateur par la différentielle du dénominateur ; ce qui étant fait, l'on aura $dl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ divisé par $d\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $-\frac{2c^{\frac{a}{n}}dn \times a}{2nnc^{\frac{a}{n}} - nn}$ divisé par $-\frac{dn}{nn}$, d'où il vient $\frac{2c^{\frac{a}{n}} \times a}{2c^{\frac{a}{n}} - 1} =$ (en substituant ∞ pour n) $\frac{2a}{2-1} = 2a$; d'où je conclus que lorsque $n = \infty$, l'on aura $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) = 2a$, & qu'ainsi $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = 2a - a = a$.

PROBLEME III.

XIV. *Trouver le lieu de la plus grande vîtesse dans un Arc total quelconque de descente.*

SOLUTION. Puisque (§. 11.) $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}) =$ (*ibid.*) $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2 c^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$; qui étant divisé par la quantité constante $\frac{2nng}{mm}$, donnera $c^{\frac{2r}{n}}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2$

$-\left(1-2c^{\frac{r}{n}}+c^{\frac{2r}{n}}\right)$, qui doit être un *maximum ;* il faut donc faire sa différentielle $=0$, & l'on aura $\frac{2c^{\frac{2r}{n}}dr}{n}\left(1-c^{-\frac{a}{n}}\right)^2+\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr-2c^{\frac{2r}{n}}dr}{n}=0$, ou divisant par $\frac{2c^{\frac{r}{n}}dr}{n}$, l'on aura $c^{\frac{r}{n}}\left(1-c^{-\frac{a}{n}}\right)^2+1-c^{\frac{r}{n}}=0$, d'où l'on tirera par la réduction & le secours des logarithmes, $r=2a-nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)$. Si donc d'un arc total $=a$, l'on retranche depuis le poinct le plus bas, une partie $=2a-nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)$ l'on aura le poinct de la plus grande vîtesse.

XV. *Coroll. 1.* L'arc intercepté entre le commencement de la descente & le poinct de la plus grande vîtesse, $=a-2a+nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)=nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)-a$. D'où l'on voit *(§. 11.)* que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus grande vîtesse, est égal à l'arc remonté suivant.

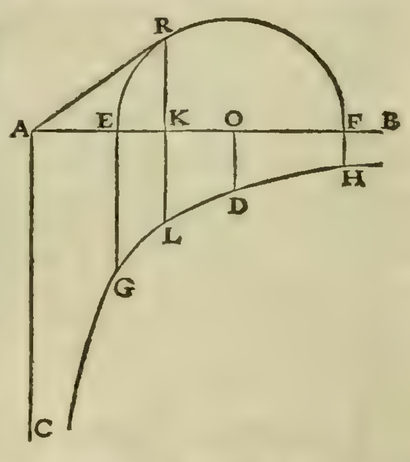
XVI. *Coroll. 2.* Ajoûtant l'arc commun compris entre le poinct le plus bas & le lieu de la plus grande vîtesse, l'on aura l'arc total descendu égal à l'arc compris entre le poinct de la plus grande vîtesse, & le poinct où le mobile cesse de remonter; c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à sa plus grande vîtesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il cesse de remonter un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de sa descente jusqu'au poinct le plus bas.

XVII. *Coroll. 3.* Puisque *(§. 11.)* l'arc total remonté, ou $b=nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)-a$, l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou $a+b=nl\left(2c^{\frac{a}{n}}-1\right)$

& ſa moitié $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; on voit de-là que le poinct qui partage en deux également l'arc entier deſcendu & remonté, eſt éloigné du poinct le plus bas, d'un arc $= a - \frac{1}{2} nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$. Mais puiſque l'arc deſcendu depuis le commencement juſqu'au poinct de la plus grande vîteſſe eſt $= nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, la diſtance de ce poinct au poinct le plus bas ſera $= a - nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1) + a = 2a - nl\,(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$; d'où il ſuit que le poinct de la plus grande vîteſſe eſt deux fois plus éloigné du poinct le plus bas que ne l'eſt de ce même poinct, le poinct qui partage en deux également l'arc compoſé de l'arc deſcendu & de l'arc remonté.

Conſtruction géométrique des deux Problemes précédents.

XVIII. Entre deux Aſymptotes *AB, AC*, perpendiculaires l'une à l'autre, ſoit décrite l'Hyperbole équilatere *GDH*, telle qu'ayant pris $AO = n$, l'Appliquée *OD* ſoit $= 1$. Soient priſes de l'un & de l'autre côté de *O*, les parties égales *OE, OF*, & par les poincts *E* & *F* ſoient tirées les Appliquées *EG, FH*, paralleles à l'autre Aſymptote *AC*. Je dis que les Aires *ODGE* & *ODHF* ſont proportionnelles aux Arcs entiers deſcendus & remontés, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $ODGE = a \times OD$, l'aire *ODHF* ſera $= b \times OD$.



Démonstr. D'un poinct quelconque K, soit menée l'appliquée KL, & soit appellée OK, z; l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = \frac{n}{n-z}$, & partant l'aire $OKLD = \int \frac{ndz}{n-z} = nl(\frac{n}{n-z})$, & l'aire entiére $OEGD = nl(\frac{n}{n-OE})$. L'on trouve de même $OFHD = nl(\frac{n+OF}{n})$. Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $nl(\frac{n}{n-OE}) = a$. De-là repassant aux nombres, l'on aura $(\frac{n}{n-OE})^n = c^a$, ou $\frac{n}{n-OE} = c^{\frac{a}{n}}$; d'où l'on tire OE ou $OF = n - nc^{-\frac{a}{n}}$, qui étant substitué pour OF dans $nl(\frac{n+OF}{n})$, l'on a l'aire $OFHD = nl(\frac{2n-nc^{-\frac{a}{n}}}{n}) = nl(2-c^{-\frac{a}{n}}) = nl(\frac{2c^{\frac{a}{n}}-1}{c^{\frac{a}{n}}}) = nl(2c^{\frac{a}{n}}-1) - a$. Or nous avons trouvé dans l'analyse précédente (§. 11.) que cette expression étoit celle de b; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$.

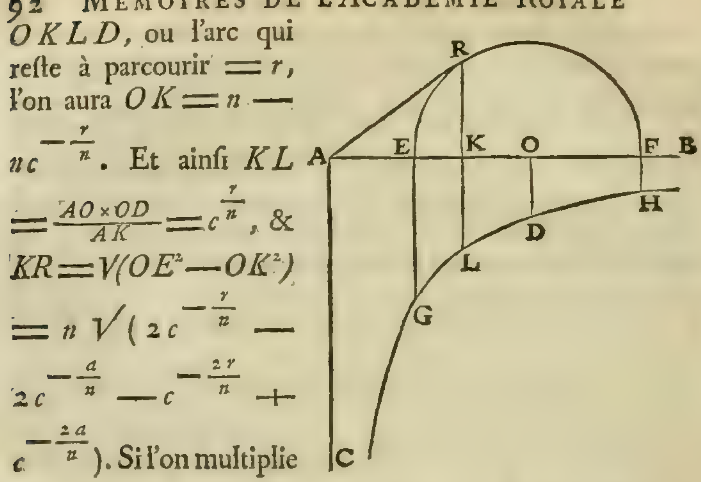
LEMME

Qui sert à déterminer la plus grande vîtesse.

XIX. *Si du centre* O, *& d'un rayon quelconque* OE, *moindre que* OA, *l'on décrit un demi-cercle* ERF *à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée* LK, *le rectangle* LK × KR *sera proportionnel à la vîtesse qu'aura le mobile, après qu'il sera descendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire* OEGD, *dans l'instant qu'il acheve un arc exprimé par l'aire* EGLK.

Démonstr. Car ayant pris, comme nous avons fait ci-dessus, l'aire $OEGD$, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé $OE = n - nc^{-\frac{a}{n}}$. Si donc l'on fait de la même maniére, l'aire

OKLD, ou l'arc qui reſte à parcourir $= r$, l'on aura $OK = n - nc^{-\frac{r}{n}}$. Et ainſi $KL = \frac{AO \times OD}{AK} = c^{\frac{r}{n}}$, & $KR = \sqrt{(OE^2 - OK^2)} = n\sqrt{(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})}$. Si l'on multiplie



KL par KR, l'on aura $LK \times KR = nc^{\frac{r}{n}}\sqrt{(2c^{-\frac{r}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})}$, dont le quarré $= 2nnc^{\frac{r}{n}} - 2nnc^{\frac{2r-a}{n}} - nn + nnc^{\frac{2r-2a}{n}}$, diviſé par nn, donne $2c^{\frac{r}{n}} - 2c^{\frac{2r-a}{n}} - 1 + c^{\frac{2r-2a}{n}}$. Mais il eſt facile de voir que cette quantité eſt $= c^{\frac{2r}{n}}(1 - c^{-\frac{a}{n}})^2 - (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$, ce que nous avons fait voir dans la Solution précédente *(§. 14.)* être proportionnel à vv ou au quarré de la vîteſſe. Donc $LK \times KR$ eſt proportionnel à la ſimple vîteſſe.

XX. L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande vîteſſe, il n'eſt queſtion que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne *LKR*, enſorte que $LK \times KR$ ſoit le plus grand de tous les rectangles pareils; ce qui étant fait, l'arc total deſcendu ſera à l'arc compris entre le poinct le plus bas & le poinct de la plus grande vîteſſe, comme l'aire *EGDO* à l'aire *KLDO*. Or il eſt évident que le plus grand de tous les rectangles $LK \times KR$ eſt celui qui ſe fait

lorſque la ſoutangente de l'hyperbole pour *L* & la ſoutangente du cercle pour *R* ſont égales. Mais la ſoutangente de l'hyperbole eſt égale à l'abſciſſe *AK* par la nature de l'hyperbole ; donc la même *AK* doit auſſi être la ſoutangente du cercle pour le poinct *R*. On tire de-là une conſtruction facile & élégante. Du centre de l'hyperbole *A*, ſoit tirée *AR* tangente au cercle, & du poinct d'attouchement *R* ſoit abbaiſſée la perpendiculaire *RKL*; elle partagera l'aire *EGDO*, qui repréſente l'arc total, en deux aires *GEKL* & *LKOD*, en même raiſon que le poinct de la plus grande vîteſſe partage l'arc total.

XXI. *Coroll. 1.* On voit de-là tout d'un coup, ſans aucun calcul, pourquoi, lorſque $n = \infty$, b devient $= a$, c'eſt-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne réſiſteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total deſcendu. Car n ou *AO* étant infini, l'arc hyperbolique *GDH* peut paſſer pour une droite parallele à l'aſymptote *AB*, & l'aire *ODHF* $=$ *EGDO*, c'eſt-à-dire, $b = a$. L'on voit auſſi que la tangente *AR*, tirée d'une diſtance infinie, peut paſſer pour parallele au diametre du cercle *EF*, & que partant *RL* paſſera par le centre *O*, & ſe confondra avec *OD*. D'où l'on voit que dans ce cas le lieu de la plus grande vîteſſe eſt le poinct le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui eſt la Tautochrone dans le vuide.

XXII. *Coroll. 2.* Puiſque nous avons trouvé ci-deſſus *(§. 15.)* que l'arc deſcendu, pris depuis le commencement juſqu'au poinct de la plus grande vîteſſe, eſt égal à l'arc total remonté ; il ſuit de-là que l'aire *EGLK* eſt égale à l'aire *DOFH*, & qu'ainſi *AE . AK* :: *AO . AF*. Ce qu'on voit d'ailleurs, puiſque la tangente *AR* eſt moyenne proportionnelle tant entre *AE* & *AF*, qu'entre *AK* & *AO*, comme il eſt clair par la nature du cercle.

XXIII. *Scholie.* Voici quelque choſe d'utile & de digne de remarque ſur nôtre Courbe tautochrone ; c'eſt de déterminer juſqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être le plus grand arc total deſcendu ; car il eſt certain que

cette Courbe, à prendre ſon commencement au poinct le plus bas, loin de s'élever à une diſtance infinie, doit au contraire ſe terminer, & redeſcendre enſuite par une eſpece de pointe ou poinct de rebrouſſement, comme on ſçait qu'il arrive à la Cycloïde elle-même, qui eſt la Tautochrone dans le cas d'une réſiſtance nulle ou infiniment petite. En effet ſi quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit aſſés que le temps de la deſcente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypotheſe; car une vîteſſe toûjours finie dans un temps fini ne ſçauroit faire parcourir un eſpace infini. Afin donc que nous trouvions juſqu'où nôtre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le poinct où commence le plus grand arc poſſible de deſcente, ou le poinct de rebrouſſement, voici comme je raiſonne: Puiſque l'on a trouvé ci-deſſus (§. 9.) $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})} : mm$, l'on voit d'abord qu'au poinct le plus bas, lorſque $r = 0$, $dy = dr$; ce qui fait voir que l'axe eſt perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne ſeroit pas le poinct le plus bas: mais enſuite en s'éloignant de ce poinct, la raiſon de dy à dr décroît juſqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorſque la Courbe eſt perpendiculaire à l'appliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au de-là de ce poinct, & qu'ainſi c'eſt le poinct le plus élevé; car ſi la Courbe s'élevoit davantage, $4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$ ſeroit plus grand que m^4, & partant dy ou $dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})}$ ſeroit imaginaire ou impoſſible; donc afin que dy ſoit $= 0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 ſoit $= 4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$, ou extrayant la racine, il faut que mm ſoit $= 2nc^{\frac{r}{n}} - 2n$; d'où l'on tire $\frac{mm + 2n}{2n} = c^{\frac{r}{n}}$; & prenant les logarithmes,

$l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \frac{r}{n}$, c'eſt-à-dire, $r = n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ au plus grand arc poſſible de deſcente qui termine la Courbe.

XXIV. *Coroll. 1.* Nous avons trouvé en général *(§. 6.)* pour la deſcente $mmxdr + 2nrdr = mmndx$; donc pour le plus grand arc total, lorſque $dy = 0$, & qu'ainſi $dx = dr$, l'on aura $mmx + 2nr = mmn$, d'où l'on tire $x = \frac{mmn - 2nr}{mm}$ $=$ (ſubſtituant pour r ſa valeur) $n - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ la plus grande abſciſſe poſſible.

XXV. *Coroll. 2.* Si $m = \infty$, mais que n ſoit fini, l'on aura r ou $n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \infty$; mais $\frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = 0$; donc x ou la plus grande abſciſſe $= n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI. *Coroll. 3.* Si au contraire m eſt fini, mais n infini, ce qui eſt le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide, l'on aura $r = \infty\,l\,1 = \infty \times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé; il faut donc encore ſe ſervir ici de la regle de l'Anal. des Infin. petits, art. 163. En conſidérant $n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ ſous la forme de cette fraction $\frac{l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$, dont la différentielle du numérateur, diviſée par la différentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $\frac{mmn}{mm+2n} =$ (lorſque $n = \infty$) $\frac{1}{2}mm$.

XXVII. *Coroll. 4.* Dans ce même cas la plus grande abſciſſe $n - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ devient $\infty - \frac{2\infty^2}{mm}\,l\,1 = \infty - \frac{2\infty^2}{mm} \times 0$, ce qui encore ne détermine rien; il faut donc, afin d'y pouvoir appliquer la regle dont on s'eſt déja ſervi, l'exprimer ſous la forme de cette fraction $\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{nn}}$, & l'on trouve, en opérant bien, $x = \frac{1}{4}mm$; enſorte que le plus grand arc eſt double de la plus grande abſciſſe, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le

poinct le plus bas, eſt double du diametre du Cercle générateur. Ce qui confirme merveilleuſement nôtre méthode.

PROBLEME IV.

XXVIII. *La longueur d'un Arc total remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total deſcendu qui l'a précédé.*

SOLUTION.

On peut ſe ſervir ici de la méthode que nous avons employée dans la Solut. du Probl. 2. *(§. 11.)* En prenant les ſignes inférieurs dans l'expreſſion du quarré de la vîteſſe vv, & opérant enſuite, comme l'on a fait, avec les changements néceſſaires. Mais on parviendra plus facilement au but, ſi l'on fait à l'Equation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté *(§. 11.)* $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, les changements néceſſaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b; ce que je fais ainſi : Puiſque $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, l'on aura $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ ou $\frac{a+b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, & paſſant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{\frac{a+b}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$; diviſant maintenant par $c^{\frac{a}{n}}$, il vient $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}}$, & repaſſant aux logarith. l'on aura $\frac{b}{n} = l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-\frac{a}{n}})$; & ainſi l'on trouve b autrement & plus ſimplement que l'on n'a fait *(§. 11.)*. Mais comme c'eſt ici a que l'on cherche, je tranſpoſe $c^{\frac{b}{n}}$ & $c^{-\frac{a}{n}}$ en changeant les ſignes, & j'aurai $c^{-\frac{a}{n}} = 2 - c^{\frac{b}{n}}$, & prenant les logarith. $-\frac{a}{n} = l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, d'où l'on tire

$a = -n\,l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, ou, ce qui revient au même, $a = n\,l(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$.

XXIX. Puisque $a = n\,l(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$ & $b = n\,l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, l'on aura $a + b = n\,l\left(\frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}\right)$; mais par §. 11, l'on a aussi $a + b = n\,l(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, donc $2c^{\frac{a}{n}} - 1 = \frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}$; & l'on a, en réduisant, $4c^{\frac{a}{n}} - 2c^{\frac{a+b}{n}} + c^{\frac{b}{n}} + c^{-\frac{a}{n}} = 4$. L'on peut donc trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée, *a* par *b*, & réciproquement *b* par *a*, ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver *a priori*.

XXX. *Scholie*. Par ce que nous avons démontré *(§. 23.)* l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'Equation trouvée *(§. 11.)* $b = n\,l(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, ou de cette autre équivalente dont nous venons de parler, $b = n\,l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, substituant dans l'une ou l'autre pour *a* ce qu'on a trouvé ci-dessus *(§. 23.)* $n\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ pour le plus grand arc descendu; car l'on aura *b* ou le plus grand arc remonté (en se servant de la derniére formule) $= n\,l\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right)$: mais cette expression étant embarrassée & peu élégante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique; voici une maniére particuliére de la réduire à une expression logarithmique simple & ordinaire : je fais

$2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = z$, partant $c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = l(2-z)$; d'où repaſſant aux nombres, à la maniére ordinaire, l'on aura $\frac{2n}{mm+2n} = 2 - z$; donc $z = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $nl\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right) = nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) =$ au plus grand arc total remonté.

XXXI. *Coroll.* L'on peut par-là trouver la plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'eſt-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oſcillation entiére, en deſcendant & remontant enſuite. Car le plus grand arc total deſcendu étant $= nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement après, étant $= nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, leur ſomme $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) + nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, qui étant réduite, donne $nl\left(\frac{mm+n}{n}\right)$, ſera $=$ à la plus grande longueur de la Tautochrone qui puiſſe être parcourüe par le mobile en deſcendant & remontant conſécutivement.

XXXII. Quant à la plus grande abſciſſe x, qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'eſt plus permis de ſuppoſer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la deſcente *(§. 24.)* car le plus grand arc remonté n'eſt point abſolument le plus grand, mais ſeulement relativement au plus grand arc deſcendu, par lequel le mobile parvenant au poinct le plus bas, remonte enſuite auſſi haut que le lui permet la vîteſſe qu'il avoit acquiſe au poinct le plus bas; mais ce n'eſt pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chûte, imprimant au mobile une plus grande vîteſſe que celle qu'il acquiert en deſcendant librement par le plus grand arc de deſcente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc diſtinguer le cas où le

mobile remonte librement par la ſeule force qu'il a acquiſe en deſcendant, & celui où le mobile remonte, pouſſé par quelque force étrangere qui agiroit ſur lui au poinct le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne ſeroit point deſcendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abſciſſe x, ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puiſſe s'élever, après être deſcendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée (§. 6.) avec les ſignes inférieurs, $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{n}}$, dans laquelle, à la place de r, j'écris le plus grand arc total remonté librement, qui (§. 30.) eſt $= nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$; & j'aurai $mmx = -2nn + 2nn\,l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) + 2nnc^{-l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)} =$ (parce que comme nous avons vû (§. 30.) $c^{-l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)} = \frac{mm+2n}{2mm+2n}$) $-2nn + 2nn\,l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) + \frac{mmnn+2n^3}{mm+n} =$ (après la réduction) $2nn\,l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) - \frac{mmnn}{mm+n}$; donc $x = \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) - \frac{nn}{mm+n}$.

XXXIII. Puiſque pour la deſcente, la plus grande abſciſſe (§. 24.) $= n - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$; ſi l'on en retranche la plus grande abſciſſe pour l'aſcenſion libre, le reſte ſera la quantité, dont la hauteur de laquelle eſt deſcendu le corps, ſurpaſſe la hauteur à laquelle il eſt remonté, & cette différence ſera $= \frac{mmn+2nn}{mm+n} - \frac{2nn}{mm}\,l\left(\frac{mm+n}{n}\right)$; qui s'évanoüit, lorſque $n = \infty$, comme on le trouve par la regle tirée de l'Anal. des Infin. petits; & cela doit être ainſi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile deſcend & remonte à la même hauteur.

XXXIV. Il nous reſte à déterminer auſſi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au poinct le plus bas, c'eſt-à-dire, juſqu'où la Tautochrone s'étend du côté

de l'arc remonté, avant que de parvenir au poinct de rebroussement, si elle en a un, où la Courbe se termine & change sa courbure, comme font les Courbes rebrouſſantes. Pour cela il nous faut recourir à l'Equation *(§. 9.)* pour l'arc remonté, qui est celle-ci, $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{-\frac{r}{n}} - 4nnc^{-\frac{2r}{n}})} : mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangere, il faut faire $dy = 0$, & par conséquent $m^4 = 4nn - 8nnc^{-\frac{r}{n}} + 4nnc^{-\frac{2r}{n}} = (2n - 2nc^{-\frac{r}{n}})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc^{-\frac{r}{n}}$, d'où l'on tire $c^{-\frac{r}{n}} = \frac{2n - mm}{2n}$, & prenant les logarithmes $-\frac{r}{n} = l(\frac{2n - mm}{2n})$, ce qui donne $r = -nl(\frac{2n - mm}{2n})$, ou, ce qui est la même chose, $r = nl(\frac{2n}{2n - mm})$ = au plus grand arc total remonté par une force étrangere au de-là duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV. *Coroll. 1.* Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl(\frac{2n}{0}) = \infty$; dans ce cas donc l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones se varient selon la valeur du nombre arbitraire mm.

XXXVI. *Coroll. 2.* Le plus grand arc remonté par une force étrangere, est toûjours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quelque soit le nombre mm, ce que je démontre ainsi: $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$, donc $\frac{2n}{2n - mm} > \frac{2mm + 2n}{mm + 2n}$, & partant aussi $nl(\frac{2n}{2n - mm})$ ou le plus grand arc remonté par une force étrangere, est plus grand que $nl(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n})$, c'est-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. *(§. 30.)*

XXXVII. Enfin il faut trouver la plus grande abscisse

pour l'arc remonté par une force étrangere, c'eſt-à-dire, celle qui répond au poinct de rebrouſſement de l'arc remonté. Pour cela je me ſers de l'Equation (§. 6.) dont je me ſuis déja ſervi (§. 32.) pour trouver le plus grand arc remonté librement, ſçavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-\frac{r}{x}}$; & maintenant j'y ſubſtitüe pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangere, qui eſt (§. 33.) $= nl(\frac{2n}{2n-mm})$; ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) + 2nnc^{-l(\frac{2n}{2n-mm})} = (c^{-l(\frac{2n}{2n-mm})}$ étant $= \frac{2n-mm}{2n}) - 2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) + 2nn - mmn = 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) - mmn$; d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm}l(\frac{2n}{2n-mm}) - n =$ à la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangere.

XXXVIII. Si $mm = 2n$, l'on aura $x = nl(\frac{2n}{0}) - n = \infty$; d'où il ſuit que le poinct de rebrouſſement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, eſt infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le poinct le plus bas, c'eſt-à-dire, que l'abſciſſe devient infiniment longue. Et afin que le mobile puiſſe remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au poinct le plus bas une vîteſſe initiale infinie, c'eſt-à-dire, plus grande qu'aucune vîteſſe donnée.



DE L'IMPORTANCE DE L'ANALOGIE, & des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réüſſite & la durée des Greffes.

Par M. DU HAMEL.

19 Avril 1730. J'EUS occaſion l'année derniére, dans un Mémoire qui avoit pour titre, *Recherche ſur les Cauſes de la Multiplication des Eſpeces de Fruits, &c.* d'examiner en paſſant l'anatomie de la Greffe, ou l'arrangement organique des fibres de pluſieurs eſpeces d'Arbres dans l'endroit de l'application de cette Greffe, & j'y reconnus un changement de direction dans les fibres & un entortillement de vaiſſeaux, qui imitant fort la méchanique de certaines glandes, ou formant un viſcere nouveau, peuvent bien être capables de donner quelques perfections aux Fruits, mais nullement de produire ces changements prompts & eſſentiels que lui attribüent la plûpart des Auteurs d'Agriculture.

Cet examen des parties de la Greffe ne m'ayant pas paru ſuffiſant pour détruire un ſentiment ſi généralement adopté, à moins que ces obſervations anatomiques ne fuſſent ſoûtenües par des expériences exactes & pluſieurs fois réïtérées; je rapportai pluſieurs Greffes que l'on pratique tous les jours ſur différents ſujets, ſans qu'il en arrive de changement dans les eſpeces; comme d'une méme eſpece de Pêche ſur Amandier, ſur différentes eſpeces de Pruniers & ſur Abricotiers; d'une même eſpece de Poires ſur Pommier, ſur Coignaſſier, ſur Sauvageon-Poirier, ou ſur l'Epine blanche; d'une même eſpece de Prune ſur diverſes eſpeces de Pruniers, & ſur Pêcher de Noyau, même ſur Abricotier & ſur Amandier; car quoique ces deux derniéres Greffes ne m'ayent point donné de fruit, leurs bois & leurs feüilles m'ont fait ſuffiſamment connoître que les eſpeces n'étoient pas changées.

Je promis outre cela de rendre compte à l'Académie du ſuccès d'un nombre d'autres Greffes & d'Ecuſſons que j'avois fait executer conformément aux différents procédés qui ſe trouvent dans preſque tous les Traités d'Agriculture, tels que de greffer le Poirier ſur le Chêne, ſur le Charme, ſur l'Orme, ſur l'Erable, ſur le Prunier, &c. le Meurier ſur l'Orme, ſur le Figuier & ſur le Coignaſſier, le Ceriſier ſur le Laurier-Ceriſe, le Pêcher ſur le Noyer, la Vigne ſur le Ceriſier & ſur le Noyer, & une infinité d'autres Greffes & Ecuſſons de cette nature.

Le peu de ſuccès de ces Greffes n'a pas ſeulement ſervi à me perſuader que ces Auteurs avoient avancé ces expériences ſans les avoir faites, & ſeulement ſur des vrai-ſemblances; mais outre cela m'a fait faire des réfléxions ſur un certain rapport & un accord néceſſaire qui doivent être entre la Greffe & le ſujet, ſans lequel, ou elle ne prend point du tout, ou ſi elle prend, elle ne durera pas long-temps ; je crois cependant devoir remarquer que quoique les Greffes que je viens de nommer, ne m'ayent pas réüſſi trois années de ſuite que je les ai fait executer ſucceſſivement en fente, en écuſſon, à œil pouſſant, à œil dormant & par approche; cependant la plûpart ne me ſerviront pas d'exemple dans ce Mémoire, parce que j'entrevois encore quelques eſpérances de réüſſite dans des Expériences que je me propoſe d'executer l'année prochaine, je m'attacherai ſeulement à quelques-unes de ces Greffes que j'ai eu lieu d'examiner de plus près, & d'une maniére plus circonſtanciée, parce qu'elles m'ont donné occaſion de faire pluſieurs Remarques & Obſervations ſinguliéres, dont la Phyſique & l'Agriculture pourront, je crois, tirer quelque avantage.

Les voici en peu de mots, ſéparées des Expériences qui y ont donné naiſſance. Je réſerve pour un autre lieu le détail de ces Expériences.

Il n'eſt pas beſoin de remarquer qu'il y a des Greffes qui reprennent avec une facilité ſurprenante, c'eſt une choſe trop connüe.

Mais quelques-unes des Greffes que j'ai appliquées, ont péri ſur le champ, & n'ont pas donné la moindre eſpérance de repriſe.

Les autres, après s'être entretenües long-temps vertes, ont par la ſuite également péri; pluſieurs ont pouſſé à la première ſéve, & n'ont pû ſubſiſter juſqu'à la ſeconde.

Quelques-unes ſe ſont ſoûtenües les deux ſéves, & n'ont pû paſſer l'Automne. Il y en a eu qui ont fort bien pouſſé deux ou trois ans, & ont dans la ſuite ſubi le même ſort que les précédentes.

Mais ce qui eſt important à obſerver, eſt que quelques-unes ont péri ſans que le ſujet en ſouffrit, & que d'autres n'ont paru périr que par la mort du ſujet.

Ce qu'il y a encore de ſingulier, c'eſt que la plûpart des Arbres greffés ne durent pas ſi long-temps que s'ils ne l'étoient pas, je dis la plûpart, car j'en ai remarqué quelques-uns qui m'ont paru ſubſiſter plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Mais ce ſecours étant indépendant de l'analogie, comme on le verra dans le détail de cette expérience, il n'en réſulte aucune exception à la regle générale.

Quelquefois même une Greffe appliquée ſur un ſujet qui ne dure que peu d'années de ſa nature, ſubſiſtera plus long-temps que l'étant ſur un autre que l'on regarde comme plus robuſte, & qui eſt d'un naturel à vivre davantage.

Quand on ne feroit aucune attention aux utilités de la Greffe, ces obſervations ne découvrent-elles pas une bizarrerie, ſouvent même une oppoſition d'événements aſſés ſinguliers pour exciter la curioſité d'un Phyſicien, & pour être ſurpris qu'une pratique, d'ailleurs ſi belle, ſi utile & ſi néceſſaire, n'ait été étudiée, & ne le ſoit encore que de très-peu de perſonnes.

C'eſt ce qui m'a fait ſouhaiter depuis long-temps de connoître la Greffe, mais ce n'eſt que depuis quelques années que je me ſuis apperçû de la difficulté qu'il y avoit à y parvenir. Elle peut être pratiquée ſur tous les Arbres; ainſi pour la connoître parfaitement, il faudroit avoir la connoiſſance

non

non ſeulement de tous les Arbres, mais encore de la nature & de l'organiſation des parties dont ils ſont composés pour établir les rapports & les contrariétés d'où naiſſent les ſuccès différents que nous remarquons dans les Greffes.

Nos connoiſſances ſont ſi bornées ſur ce point, qu'il eſt preſque impoſſible d'en établir des regles certaines.

Auſſi mes vûës ne ſont-elles point d'indiquer par l'anatomie des Arbres les Greffes qui pourroient réüſſir, mais ſeulement d'expliquer par le peu de connoiſſance que nous avons de cette anatomie, les obſervations qui réſultent d'un nombre d'expériences que j'ai faites à ce ſujet, c'eſt ce qui m'oblige de faire quelques réfléxions ſur l'anatomie des Arbres & de la Greffe avant de paſſer à l'explication de chaque obſervation, à laquelle je joindrai le détail des expériences qui y ont donné lieu.

Une regle générale pour qu'une Greffe réüſſiſſe parfaitement, eſt qu'il faut qu'elle ſe joigne ſi intimement avec le ſujet ſur lequel on l'applique, qu'elle ne faſſe qu'un corps avec lui, & qu'elle devienne comme une de ſes branches.

Si les Arbres ſe reſſembloient tous, que leurs liqueurs fuſſent de même qualité, que la configuration de leurs parties ſolides & de leurs vaiſſeaux fût la même, que leurs diametres fuſſent égaux, leur élaſticité ſemblable, la quantité de leurs trachées pareille, & ces trachées également remplies d'air, la réüſſite des Greffes ſeroit probablement certaine, & la même dans tous les Arbres. Mais cette conformité & ces rapports ſe trouvent-ils entr'eux ? c'eſt ce qu'il faut examiner.

L'on ſçait, & il eſt inutile de s'en ſouvenir, que les Arbres ſont composés d'une multitude de fibres creuſes ; & depuis les obſervations de M.rs Malpighi & Grew, l'on ne doute plus que chaque Arbre n'ait ſes fibres de diametres inégaux & de figures différentes. Ainſi (comme je l'ai remarqué dans celui de mes Mémoires que j'ai cité) lorſqu'on applique une Greffe, il ſe doit faire tant aux orifices des fibres de la Greffe que de celles du ſujet, des ſections plus ou moins conſidérables ſuivant la différence des diametres & la diſproportion de figure

qui ſe rencontre entre les fibres de l'un & de l'autre, & cette diſproportion, lorſqu'elle eſt conſidérable, eſt probablement un obſtacle à la réüſſite des Greffes.

Si nous entrevoyons quelques différences entre les parties ſolides des Plantes, nous n'en découvrons pas de moins marquées entre les fluides. Les unes ont leur ſéve blanche comme du lait, d'autres l'ont rouſſe, d'autres l'ont claire & limpide, les unes l'ont coulante, les autres l'ont viſqueuſe. Leurs différences ſe manifeſtent encore plus par le goût & à l'odorat, puiſqu'il y en a de douces, de ſuaves, d'agréables, d'aigres, d'ameres, d'âcres, de cauſtiques, de même que quelques-unes ſont aromatiques, au lieu que d'autres ſont fétides & puantes.

Ces différences s'étendent preſqu'à l'infini, & ſuivant qu'elles ſont plus ou moins conſidérables, elles deviennent des cauſes de la variété du ſuccès des Greffes.

Suivant ce que je viens d'établir, la différente qualité des ſéves produit une grande différence entre les Arbres; mais ſi nous faiſons attention à la quantité de cette ſéve, elle nous donnera une nouvelle cauſe de différences qui ne ſera pas moins eſſentielle, puiſqu'il y a des Arbres, tels que le Saule, qui dans une année font des pouſſées ſi conſidérables, que d'autres, comme les Buis, pourroient à peine les égaler dans l'eſpace de douze ou quinze années.

Examinons maintenant, pour ne pas s'arrêter à des particularités inutiles, une autre différence plus ſenſible, & peut-être plus conſidérable que les précédentes, qui ſe rencontre cependant entre pluſieurs Arbres, c'eſt celle de leur printemps, ou plûtôt du temps de leur pouſſe en cette ſaiſon: car l'Amandier eſt en fleur avant que les autres Arbres ayent ouvert leurs boutons; quand les autres Arbres ſont en fleurs, il eſt garni de feüilles, & ſon fruit eſt noüé avant que le Meurier ait commencé à pouſſer.

Que de différences entre les Arbres, me dira-t-on? & comment ſe peut-il faire que malgré ces oppoſitions, quantité de Greffes reprennent, qu'un Arbre adopte une branche qui lui eſt ſi étrangere, pour la nourrir comme la ſienne

propre, & que cette branche qui change ſubitement de nourriture, s'en accommode & profite aſſés ſouvent mieux que ſur ſon propre tronc?

La queſtion eſt embarraſſante, & j'avoüerai qu'il eſt plus aiſé de comprendre comment certains Arbres refuſent de s'allier par la Greffe, que d'expliquer la facilité avec laquelle d'autres reprennent. L'expérience eſt conſtante cependant; & ſi l'on greffe en œil pouſſant un Poirier, par exemple, ſur un autre, ou un Ceriſier ſur le Mériſier, on ſera ſurpris de le voir pouſſer quelques jours après, & acquérir plus de demi-pied de longueur en quinze jours de temps. Je ne chercherai point d'autre explication de cette expérience qu'un grand rapport entre les deux Arbres à tous égards, de même qu'une contrariété manifeſte entre le Prunier & l'Orme que je donne pour exemple des Greffes qui ne donnent aucune marque de repriſe, parce que les ayant greffés pluſieurs fois l'un ſur l'autre, la Greffe a toûjours péri ſur le champ.

Dans le nombre d'expériences que j'ai faites, j'ai remarqué une grande quantité de Greffes qui ſemblent tenir le milieu entre les deux exemples que je viens de donner, en ce qu'elles ne périſſoient pas ſi promptement, car celles qui étoient faites avant l'Automne s'entretenoient vertes tout l'Hiver, comme celles qui ont repris & celles que j'avois fait faire au Printemps s'entretenoient vertes un mois & même plus ſans aucune apparence de pouſſer; il y en a même eu entre les unes & les autres qui ont pouſſé la premiére ſéve, même quelquefois la ſeconde, & qui n'ont pas laiſſé pour cela de périr. La Greffe du Poirier ſur l'Orme, le Charme, l'Erable, celle du Meurier ſur l'Orme, le Figuier, & un grand nombre d'autres, peuvent être donnés pour exemple.

Si l'on recherche les raiſons de ces faits dans l'anatomie de ces Greffes, on trouvera par l'examen particulier des ſujets, qu'ils n'ont eu avec elles qu'une légere communication par le moyen de quelques fibres qui leur ont fourni aſſés de nourriture pour les entretenir dans leur verdeur, même pour, dans le temps de la grande ſéve, leur faire produire quelques

bourgeons ; le reste des fibres, & qui assés souvent sont en plus grand nombre sera noir, dessêché, ou plûtôt abreuvé, tantôt de gomme, & tantôt d'une séve corrompüe, qui est presque comme de la boüe, ce qui n'arrive que par la disproportion des vaisseaux, ou par la différente qualité des liqueurs ; obstacles évidents à l'union parfaite de toutes les fibres & à l'introduction de la séve, qui n'ayant pû enfiler les vaisseaux de la Greffe, a dû nécessairement séjourner & se corrompre dans l'endroit de l'application.

J'ai dit, dans le détail de mes observations, qu'il y avoit des Greffes qui poussoient à merveille la premiére année, & donnoient de grandes espérances de réüssite, que cependant la seconde ou la troisiéme année elles ne manquoient pas de périr.

La Greffe de l'Amandier sur le Prunier, & celle du Prunier sur l'Amandier, m'en ont fourni deux beaux exemples qui méritent bien d'être examinés chacun en particulier.

J'avois fait écussonner à la séve d'Août des Amandiers sur des Pruniers de petit Damas noir sur la foi de plusieurs Auteurs, qui assûrent que par ce moyen on retarde la séve de l'Amandier, ce qui fait qu'il n'est pas tant exposé aux gelées du Printemps, les écussons se collerent à merveille à leurs sujets, conserverent leur verdure pendant tout l'Hiver, pousserent avec force au Printemps & l'Eté, ensorte qu'en Automne ces Amandiers étoient garnis de feüilles, lorsque les autres en étoient tout dépoüillés ; on ne peut guere une plus belle espérance. J'en fis lever quelques-uns de la Pépiniére pour mettre en place, mais ceux que j'avois ainsi transplanté, moururent au Printemps, & les autres qui étoient restés dans la Pépiniére, continüerent encore à pousser passablement le reste de l'année, & au Printemps de l'année suivante la plûpart éprouverent le sort des premiers. Je dis la plûpart, car j'en ai encore deux qui ne sont pas entiérement péris, mais à peine les Greffes ont-elles assés de force pour se garnir de feüilles, & les sujets diminüent tous les jours de grosseur, ce qui annonce une mort prochaine.

Des circonſtances eſſentielles à remarquer, c'eſt que le Prunier, dans l'endroit de la Greffe, paroiſſoit appauvri & comme diminué de groſſeur, & que l'Amandier y formoit un gros bourlet, effet de la vivacité avec laquelle il avoit pouſſé.

On ne peut attribuer ce défaut de réüſſite, ni à la diſproportion des fibres de ces deux Arbres, ni à la qualité différente de leur ſéve ; la facilité que cette Greffe a eûë à reprendre, & la vivacité avec laquelle elle a pouſſé, établiſſent au contraire l'analogie des ſujets; de plus on greffe tous les jours, & avec un égal ſuccès, le Pêcher ſur le Prunier & ſur l'Amandier, ce qui ne pourroit pas être, ſi ces deux Arbres étoient d'une nature bien différente.

Pourquoi le Prunier a-t-il donc paru appauvrir, eſt-ce qu'il n'a pas aſſés de ſéve pour nourrir l'Amandier ? Il fait cependant dans nos Jardins un Arbre preſqu'auſſi grand, cela eſt vrai, mais il ne le fait pas en auſſi peu de temps ; les fibres de l'Amandier plus ſouples que celles du Prunier, peut être entrelaſſées d'un plus grand nombre de trachées, remplies d'une ſéve plus éthérée, plus élaſtique, ſont plus ſenſibles aux changements de l'Atmoſphere, entrent plus aiſément en jeu, & par cette raiſon pouſſent de meilleure heure au Printemps. En un mot l'Amandier croît plus vîte que le Prunier.

Si les branches dépenſent donc plus de ſéve que le tronc n'en peut fournir, elles le ſuccent néceſſairement, elles l'affament, & l'empêche par-là de prendre de la groſſeur.

Il n'eſt pas ſurprenant que la Greffe ait ſi bien pouſſé la premiére année, c'eſt que le Prunier étoit en état de ſuffire à la nourriture d'une jeune branche, mais ſi-tôt qu'elle aura pris une certaine groſſeur, il faut néceſſairement que le ſujet périſſe.

Nous avons remarqué que ces Arbres périſſoient plûtôt au Printemps qu'en toute autre ſaiſon, ce qui eſt une ſuite néceſſaire de ce que nous venons de dire, car l'Amandier prenant ſon jeu de reſſort au Printemps plûtôt que le Prunier,

il le ſucce, pour ainſi dire, dans le temps que déja exténué & encore en repos, il n'étoit pas en état de lui fournir de la ſéve, ce qui acheve de le faire périr.

Cette cauſe, qui eſt plus conſidérable au Printemps qu'en toute autre ſaiſon, ſubſiſtera cependant toute l'année, ſi (comme je l'ai prouvé dans un Mémoire que j'ai lû l'année derniére à l'Académie) la condenſation & la rarefaction ſucceſſive de l'air ſont les premiers principes du mouvement de la ſéve.

J'ai remarqué encore que les Arbres que j'avois fait lever pour mettre en place, étoient morts avant ceux qu'on avoit laiſſés dans la Pépiniére, ce qui vient ſans doute de ce qu'un Arbre tranſplanté n'eſt jamais ſi abondant en ſéve que celui dont les racines n'ont point changé de ſituation.

Avant de quitter cette Greffe, il eſt bon d'obſerver que j'ai fait cette experience ſur des Pruniers en plein vent & dans une terre plus ſéche qu'humide, car ſi l'on n'avoit pas égard à ces circonſtances, il pourroit bien arriver de la différence dans la réüſſite.

Si les Greffes des Amandiers ſur Pruniers ont péri, nous allons voir que le Prunier ſur l'Amandier a eu le même ſort. Une conformité ſi exacte d'effets engage à admettre auſſi de la conformité dans les cauſes, auſſi s'y rencontre-t-elle, & quoique l'une de ces Greffes ſoit périe d'inanition, & l'autre d'une ſurabondance de ſubſtance, elles ſe réüniſſent comme nous allons le voir, en ce que la diſproportion d'élaſticité, de ſoupleſſe, de reſſort dans les fibres, ou dans les liqueurs, a produit deux effets ſi contraires.

Le Frere Philippe, habile dans l'art du Jardinage, & qui a la direction des Pépiniéres des RR. PP. Chartreux, fit greffer en couronne le Prunier ſur l'Amandier, les Greffes pouſſérent d'abord à merveille, mais enſuite la gomme s'étant miſe au lieu de l'inſertion, elle les fit périr.

Cette ſeule obſervation découvre la cauſe de la perte de ces Greffes : l'Amandier qui pouſſe plus vîte que le Prunier, & qui entre plus aiſément en jeu, charie à la greffe, qui eſt

encore presque sans action, une grande quantité de séve, & beaucoup plus que la Greffe n'en peut dépenser, ce qui occasionne un dépôt de séve dans l'endroit de l'insertion, l'humidité s'en évapore, cette séve s'y épaissit, & forme la gomme qui successivement obstrüe les vaisseaux, ferme les passages aux liqueurs, d'où s'ensuit la sécheresse & la perte de la Greffe.

Ainsi après avoir vû, dans la premiére expérience, l'Amandier, qui demande à son sujet plus de séve qu'il ne lui en peut fournir, périr d'inanition, nous voyons dans cette expérience le Prunier, qui ne dépense pas tant de séve que lui en fournit l'Amandier, périr, pour ainsi dire, de réplétion & d'engorgement.

C'est ici le lieu de rendre raison d'une autre singularité que j'ai remarquée dans le travail que j'ai fait sur la Greffe, puisque sans sortir de ces principes, & par cette même disproportion de séve entre la Greffe & le sujet, on découvre comment certaines Greffes périssent sans que le sujet en patisse, pendant que d'autres semblent ne périr que par la mort du sujet.

Dans le premier cas il ne paroît pas surprenant qu'une Greffe, qui ne trouve point dans un sujet la quantité ou la qualité de séve qui lui convient, périsse, rien n'est plus naturel : l'Arbre sur lequel elle est appliquée, la regarde comme une branche inutile, il ne lui envoye plus de substance, mais il se forme de nouveaux jets auxquels il fournit de la séve en abondance.

Le contraire arrive cependant, & l'on voit des sujets périr en même temps, souvent même avant leurs Greffes, parce qu'ils ne leur fournissoient pas assés de séve, & quelquefois parce qu'ils lui en fournissoient trop.

Les Greffes de l'Amandier sur le Prunier, & du Prunier sur l'Amandier, que je viens de donner pour exemples, paroissent seules servir à établir ces deux observations, j'y ajoûterai cependant, pour me servir d'exemples connus de tout le monde, ceux de la Greffe du Poirier sur le Coignassier, &

du Pommier ſur le Paradis, pratiquées dans une terre ſéche & légere ; car quoique dans ces ſortes de terres ces derniéres Greffes durent quelque temps, & ne périſſent pas ſi promptement que celles de l'Amandier ſur le Prunier, cependant les ſujets ne prennent preſque point de corps, ne pouſſent que peu en racines, la Greffe jaunit, & j'ai preſque toûjours remarqué que ſa mort eſt bientôt ſuivie de celle du ſujet.

Nous ne pouvons pas, à la vérité, ſoupçonner, comme nous avons fait à l'égard de l'Amandier & du Prunier, une grande différence entre l'élaſticité des fibres & des liqueurs de ces Arbres, puiſqu'ils pouſſent à peu-près d'auſſi bonne heure au Printemps, mais nous reconnoiſſons bien clairement que le Poirier dépenſe plus de ſéve que le Coignaſſier ne lui en peut fournir, ce qui arrive auſſi aux différentes eſpeces de Pommiers, à l'égard de celui de Paradis, puiſque les Greffes formoient un gros bourlet à l'endroit de l'inſertion, tandis que les ſujets ne prenoient preſque point de corps, & que les jeunes branches & les feüilles jauniſſoient pendant que les racines ne faiſoient aucun progrès.

Mais ce qu'il eſt bon d'obſerver encore, eſt que ces Arbres réüſſiſſent fort bien, & durent aſſés long-temps dans les terres graſſes, parce que les ſujets ſont plus en état de fournir à la Greffe le ſuc qu'elle demande.

Il eſt donc conſtant, par les expériences que je viens de rapporter, que les ſujets qui ne ſont pas en état de fournir à la Greffe la ſéve qu'elle leur demande, périſſent faute de ſubſtance.

Mais il peut auſſi ſe faire, & il eſt même probable que cela eſt, qu'il y aura des ſujets qui périront par une abondance de ſéve peu proportionnée à la capacité des branches, car alors il eſt néceſſaire que la ſéve ſurabondante ſoit, ou reportée aux racines ſelon le ſyſtême de la circulation, ou que dans le ſyſtême oppoſé elle reſte dans les vaiſſeaux ſans mouvement ; or dans l'un & dans l'autre cas il eſt néceſſaire que la Greffe en patiſſe, plus à la vérité dans celui-ci, parce que cette ſtaſe, ce repos, emporte néceſſairement la corruption.

Mais

Mais dans le ſyſtême de la circulation, le reflux vers les racines étant conſidérablement augmenté, on conçoit, ſans qu'il ſoit néceſſaire que je l'explique, que l'Arbre en doit beaucoup ſouffrir ; de-là peut-être ces galles, ces gourmes, ces chancres & ces écoulements de ſubſtance qui arrivent quelquefois aux Arbres greffés, mais preſque toûjours aux Arbres qu'on étête, comme les Ormes, les Peupliers & les Saules, qui ne manquent gueres au bout d'un temps de tomber en pourriture.

Que d'accord, que de convenance il faudroit entre la Greffe & le ſujet pour qu'elle réüſsît parfaitement. Qu'il eſt rare de le trouver, cet accord ! Je ne ſçai même ſi en le cherchant avec beaucoup de peine, nous pouvons eſperer de le trouver, auſſi ne faut-il pas s'étonner s'il y a ſi peu de Greffes qui réüſſiſſent dans cette perfection. Il y en a qui refuſent entiérement de reprendre, d'autres périſſent peu de temps après, mais généralement tous les Arbres greffés ne durent pas, à beaucoup près, ſi long-temps que s'ils ne l'étoient pas.

On ne voit gueres périr de vieilleſſe un Coignaſſier, même dans les terres aſſés ſéches : cependant dans ces ſortes de terres, lorſqu'on greffe deſſus un Poirier, il ne dure pas long-temps. Je pourrois dire la même choſe du Prunier, lorſqu'on le greffe deſſus un Pêcher, ou lorſqu'on le laiſſe ſans être greffé : il n'y a que le Poirier greffé ſur ſon Sauvageon, l'Orme femelle ſur l'Orme mâle, & d'autres Greffes pareilles qui durent ordinairement très-long-temps. Mais malgré cette raiſon de convenance entre ces ſortes de Greffes & leurs ſujets, la durée de celles-là n'égalera jamais celle du Sauvageon-Poirier, ou de l'Orme mâle, lorſqu'ils ne ſont point greffés ; cependant j'ai dit qu'il y avoit quelques Arbres qui m'avoient paru durer plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Lorſque j'aurai rapporté l'expérience qui a donné lieu à cette obſervation, on ſera en état de juger ſi ces Greffes ont quelque choſe de ſingulier qui mérite faire une exception de la regle générale.

Il y a bien dix-huit ans que nous avons fait greffer dans une terre grasse & auprès de terre des Pruniers de la Reine Claude sur des Pêchers de Noyau : ces Greffes n'ont pas beaucoup poussé en bois, mais elles ont donné de bon fruit, & subsistent encore assés bien à leur maniére, c'est-à-dire, dans leur état languissant, pour esperer qu'elles dureront encore du temps ; cependant c'est un fait que le Pêcher de Noyau ne dure pas si long-temps, & je crois qu'ils seroient péris, s'ils n'avoient pas été greffés.

Pour comprendre le secours que le Pêcher a pû recevoir du Prunier, il faut sçavoir que le Pêcher est fort délicat, qu'il pousse avec une vivacité extrême, qu'il produit beaucoup plus de branches qu'il n'en peut nourrir, ce qui fait qu'il est presque toûjours plein de bois mort, qu'il perd souvent quelques-unes de ses grosses branches, quelquefois même le tronc meurt, & il repousse quelques foibles jets du pied, ce qui oblige presque toûjours à l'arracher, parce que ces sortes de rejets ne sont pas bons à grande chose, aussi le plante-t-on en espalier à cause de la délicatesse de son bois, qui veut être mis à couvert des injures du temps ; c'est aussi dans cette même vûë qu'on lui retranche beaucoup de bois par les différentes tailles qu'on lui fait, afin de le mettre plus en état de nourrir les branches qu'on lui laisse.

Ce sont à peu-près les mêmes avantages qu'il retire de la Greffe du Prunier : à ses branches délicates on en substitüe de robustes, & on n'a pas besoin de lui retrancher de son bois, puisque le Prunier ne pousse qu'autant qu'il en peut nourrir ; mais le Prunier fait un plus grand Arbre que le Pêcher, c'est aussi pour cela que nos Greffes ont donné si peu de bois, & elles seroient, je crois, péries, si les sujets n'avoient pas été dans une terre très-grasse & fertile ; de plus les fibres du Pêcher sont un peu plus souples que celles du Prunier, la séve de celui-là est plus éthérée, plus élastique, & c'est peut-être pour cette raison que nos Arbres sont jaunes & languissants.

Malgré ce que je viens de dire de la Greffe du Prunier

ſur le Pêcher, je crois qu'on doit regarder comme une regle générale, que les Arbres greffés ne durent pas ſi long-temps que ceux qui ne le ſont pas, & que le plus ou le moins de durée qu'on peut remarquer entre les Arbres greffés dépend du plus ou moins de rapport qui ſe rencontre entre la Greffe & le ſujet.

Enfin j'ai dit avoir remarqué certains Arbres qui duroient plus long-temps greffés ſur des ſujets, qui de leur nature ne durent que peu d'années, que l'étant ſur d'autres qui ſont plus robuſtes, & durent plus long-temps. La Greffe du Pêcher nain ſur le Pêcher de Noyau, ou ſur Prunier, m'a donné occaſion de faire cette obſervation ; car quoique le Prunier vive plus long-temps que le Pêcher de Noyau, cependant le Pêcher nain dure plus long-temps ſur le Pêcher de Noyau que ſur le Prunier, ce qui eſt encore un effet bien ſenſible de l'analogie dont dépend la réüſſite des Greffes.

Mais voici encore une expérience qui découvre bien l'effet de ces rapports, nous la devons au Frere Philippe, Chartreux, & elle ſubſiſte encore à Moulinot, Maiſon de Campagne de ſon Ordre.

On y voit un Poirier, ſur lequel on a appliqué une Greffe de Poirier & une de Pommier. Toutes deux portent du fruit, mais la Greffe de Pommier eſt chétive & petite, au lieu que celle de Poirier, qui ſe trouve ſur ſon ſujet, eſt forte & vigoureuſe. On voit au contraire dans le même endroit un Poirier greffé ſur Pommier. Ce Poirier donne du fruit, & eſt aſſés beau, quoiqu'il ne ſoit pas ſi vigoureux que ſur ſon Sauvageon. J'ai fait executer l'une & l'autre Greffe dans mon Jardin, mais ce ſont de jeunes Greffes, les Arbres ſont petits, & ainſi ne peuvent pas encore nous ſervir à porter un jugement auſſi aſſûré que ceux de Moulinot, qui ſont en plein rapport.

Si cette recherche eſt utile à la Phyſique, par le détail où l'on eſt entré des effets que produiſent l'analogie & les rapports qui ſe trouvent entre les Arbres & les explications que l'on a données de quantité de phénoménes qui appartiennent

P ij

à la Greffe, l'Agriculture en peut auſſi tirer de grands avantages, puiſqu'elle peut ſervir à détromper de quantité de faits rapportés dans les ouvrages d'Agriculture, & qu'on reconnoîtra que la plûpart des Greffes qu'on nous y propoſe ne peuvent réüſſir, & que celles qui reprennent, ne produiſent point les effets qu'on nous en fait eſperer, puiſque, comme nous l'avons vû, les eſpeces ſe conſervent, quoique greffées, ſur des ſujets de nature bien différente, comme le Poirier ſur l'Epine, & le Prunier ſur le Pêcher.

Pour faire encore plus d'uſage de cette théorie, pour l'avantage de la pratique, nous pourrions faire ſentir, par exemple, qu'il eſt quelquefois utile que l'analogie ne ſe trouve pas dans toute ſa perfection. Mais cette réfléxion & bien d'autres nous meneroient trop loin, pour peu qu'on voulût entrer dans le détail à proportion de leur utilité, ainſi je les réſerve pour un autre Mémoire.



SECONDE PARTIE DE L'EXAMEN DE LA POUSSÉE DES VOÛTES.

Par M. COUPLET.

J'AI donné à l'Académie en 1729 la premiére Partie de l'Examen de la Pouſſée des Voûtes, dans laquelle, en conſidérant les Vouſſoirs comme polis, je déterminois la forme & la pouſſée des Voûtes, avec l'épaiſſeur de leurs pied-droits, & la charge que les Cintres de Charpente ſouffrent dans la conſtruction des Voûtes uniformes. 15 Mars 1730.

Dans cette hypotheſe des Vouſſoirs polis, on eſt obligé de donner aux Voûtes beaucoup d'épaiſſeur dans leurs reins, pour qu'elles en ayent une ſuffiſante au ſommet, & qu'elles ayent la forme qui leur eſt néceſſaire pour que leurs Vouſſoirs faſſent équilibre entr'eux, ce qui fait que les pied-droits doivent avoir une épaiſſeur conſidérable.

Comme dans le Coroll. 3. du Théor. 2. de la premiére Partie, j'ai remarqué que les Voûtes ſe ſoûtiennent ſans qu'on leur donne la forme néceſſaire à l'équilibre de leurs Vouſſoirs, conſidérés comme polis, j'ai promis de donner une ſeconde Partie de l'examen des Voûtes, dans laquelle je conſidérerois les Vouſſoirs comme grenus, & aſſés liés enſemble, ou aſſés adhérents, pour ne point gliſſer les uns contre les autres.

Deux raiſons m'ont engagé à conſidérer dans la premiére Partie les Vouſſoirs comme polis; la premiére, parce que tous ceux qui ont traité de la pouſſée des Voûtes, les ont regardé comme tels, & la ſeconde, pour faire voir la différence qu'il y a entre la pouſſée des Voûtes dont on regarde les Vouſſoirs

comme polis, & la pouſſée de celles dont on regarde les Vouſſoirs comme grenus, & aſſés adhérents, ou liés enſemble, pour ne pouvoir point gliſſer les uns ſur les autres.

Quand je dis que je conſidere les Vouſſoirs comme aſſés liés pour ne pouvoir point gliſſer l'un ſur l'autre, je ne prétends pas pour cela les conſidérer dans la Voûte comme ne faiſant tous enſemble qu'une ſeule piéce, ou un ſeul corps, j'entends ſeulement, par cette liaiſon, que les faces des Vouſſoirs qui ſe toucheront, ſeront aſſés embarraſſées par l'engrénement de leurs parties, pour ne point gliſſer les unes contre les autres, & que cette liaiſon ne s'oppoſera point à l'écartement des Vouſſoirs dans la rupture de la Voûte, enſorte que ces Vouſſoirs pourront être écartés l'un de l'autre par toutes forces où il n'y aura point de frottement de leurs faces l'une contre l'autre.

C'eſt ſuivant cette nouvelle hypotheſe que j'ai réſolu les Problemes qui compoſent cette ſuite, ou ſeconde Partie de la Pouſſée des Voûtes.

Dans le premier Probleme & ſes Corollaires, je détermine la moindre épaiſſeur uniforme que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire de 180°.

Dans le ſecond Probleme je détermine la plus petite épaiſſeur uniforme d'une Voûte circulaire de 120°.

Dans le troiſiéme Probleme je détermine la pouſſée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados ſont circulaires.

Dans le quatriéme Probleme je détermine la baſe du pied-droit, telle que l'effort compoſé de la peſanteur de la Voûte, de ſa pouſſée horizontale & de la peſanteur dudit pied-droit ſoit dirigé vers un point donné quelconque de ladite baſe.

Enfin les formules que j'ai déduites dans la Solution de ces Problemes, & les moyens dont je me ſuis ſervi pour les réſoudre, pourront facilement être employés pour déterminer les moindres épaiſſeurs que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire & uniforme pour un Arc circulaire quelconque;

comme auſſi pour déterminer les épaiſſeurs néceſſaires aux pied-droits, ſuivant leur hauteur quelconque, pour réſiſter à la pouſſée des Voûtes dont ils ſeroient chargés.

THEOREME.

Si l'on ſuppoſe que les Vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer les uns contre les autres, la Voûte ne caſſera point, ſi la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle ſe trouve dans l'épaiſſeur de la Voûte.

DÉMONSTRATION.

Soit une Voûte *BMANC*, ſi la corde *AB* de ſa moitié *BMA* ne coupe point l'intrados *IKL*; je dis que la Voûte ne caſſera point, car quelle que ſoit la charge du ſommet *A* de cette Voûte, elle ſe communiquera directement & ſans interruption au Couſſinet *B*, ſuivant la ligne droite *AFB* qui ſe trouve dans l'épaiſſeur de la Voûte. Figure 1.

Car pour que la Voûte s'écrasât, il faudroit que l'angle *BAC* s'ouvrît, & par conſéquent que les Couſſinets *B* & *C* s'écartaſſent, ce qui ne peut point être, puiſque nous les regardons comme des obſtacles invincibles.

Donc la Voûte ne caſſera point, ſi la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados.

Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Si la corde *AB* de la demi-Voûte coupoit l'intrados *ODEP*, il arriveroit que ſi le ſommet *A* étoit trop chargé, l'angle *DAE* pourroit s'ouvrir, & par conſéquent les angles *ADB*, *AEC*, pourroient ſe fermer, ſi les parties *BMDO*, *CNEP*, de la Voûte n'étoient pas ſuffiſantes pour réſiſter à l'ouverture qu'elles ſeroient forcées de faire.

Mais ſi l'on remplit de Maçonnerie la partie *AMBQ*, ſuivant la ligne horizontale *AQ*, cette charge, toute grande qu'elle eſt, qui fait perdre entiérement l'équilibre qui étoit

obſervé précédemment dans tous les Vouſſoirs, n'occaſionnera cependant point la rupture de la Voûte, puiſque nous avons ſuppoſé que la Clef *A* ne peut point gliſſer, & auſſi ces conſtructions ſe pratiquent-elles dans les Salons voûtés, ou Berceaux de Terraſſes, avec tout le ſuccès que l'on peut deſirer.

Lorſqu'on ne remplit point les reins de la Voûte, ce qui arrive dans les Édifices publiques très-exhauſſés, comme les Égliſes, où l'on craint que la pouſſée ne ſoit trop grande contre les pied-droits, la partie ſupérieure de la Voûte tend toûjours à baiſſer plûtôt que les parties les plus proches des Couſſinets, ce qui fait ſouvent rompre la Voûte.

Or l'on voit que ces Voûtes rompües, dont on n'a que trop d'exemples, manquent toûjours à peu-près à diſtances égales du Couſſinet & du ſommet ; d'où l'on peut conclurre que cet endroit eſt le plus foible de la Voûte.

Il faut donc, ſuivant cette remarque, donner à la Voûte une épaiſſeur telle que cet endroit par lequel la Voûte manque preſque toûjours, ait une force ſuffiſante pour ſe ſoûtenir, & empêcher la Voûte de changer de courbure, c'eſt pourquoi nous allons chercher dans le Probleme ſuivant quelle eſt l'épaiſſeur qu'il faut donner à cet endroit le plus foible, je veux dire à l'endroit également diſtant du Couſſinet & du ſommet, pour que la Voûte ſe ſoûtienne dans ſa premiére courbure, autant qu'il eſt poſſible qu'elle s'y ſoûtienne ; je dis autant qu'il eſt poſſible, car il eſt conſtant que quand on décintre une Voûte ou une Plate-bande, elle ſe ſurbaiſſe de pluſieurs pouces, ſans que pour cela les Vouſſoirs ou Clavaux gliſſent les uns ſur les autres, parce que pour lors ils ne ſont que ſe ſerrer plus étroitement ſur leurs joints.

PROBLEME

PROBLEME I.

Trouver la moindre épaiſſeur que l'on puiſſe donner à une Voûte circulaire de 180°, c'eſt-à-dire, d'un demi-Cercle entier, dont on ſuppoſe l'épaiſſeur uniforme.

SOLUTION.

Soit une Voûte circulaire *RAF*, dont l'intrados *SBE* & l'extrados *RAF* ſoient des demi-Cercles concentriques, il s'agit de déterminer la moindre épaiſſeur *AB* qu'on lui puiſſe donner. Figure 2.

Pour cela je ſuppoſe que la Voûte eſt compoſée de quatre Vouſſoirs égaux, attachés enſemble, comme par des charniéres, aux points *A, T, K,* & aux Couſſinets par les charniéres *F, R.*

Cela poſé, il eſt évident que les Vouſſoirs *AK, AT,* feront effort par leur peſanteur pour s'ouvrir ſur la charniére *A,* & pour ſe fermer ſur les charniéres *K, T,* & par conſéquent pour écarter les Vouſſoirs *KF, TR*, en les faiſant tourner ſur les charniéres *F, R,* par leſquelles ils tiennent aux Couſſinets; & que les Vouſſoirs *KF, TR,* feront par leur poids effort pour tourner à contre-ſens ſur les mêmes charniéres *F, R,* & par conſéquent pour réſiſter aux Vouſſoirs *AK, AT,* qui font effort pour les renverſer. Voyons maintenant quels ſont ces efforts.

Le Vouſſoir *AK,* dont la peſanteur eſt réünie à ſon centre de gravité *H,* laquelle j'exprime par la diagonale *GI,* du parallelogramme *OK,* fera en même temps deux efforts; l'un exprimé par *GO,* pour réſiſter à la pouſſée du Vouſſoir *AT,* qui fait un effort ſemblable, & l'autre exprimé par *GK,* pour pouſſer contre le Vouſſoir *KF.* Mais cet effort *GK* ſe décompoſe auſſi en deux autres efforts, dont l'un eſt horizontal, exprimé par *IK,* & l'autre vertical, exprimé par *XK,* enſorte que ces deux efforts font des effets oppoſés, puiſque l'effort horizontal *IK* tend à renverſer le Vouſſoir *KF,* en le faiſant tourner ſur la charniére *F,* & que l'effort vertical *XK* tend

à affermir ce même Vouſſoir KF, en le faiſant tourner à contre-ſens ſur la même charniére F, ainſi l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK, ſur l'énergie de l'effort vertical XK, ſera l'énergie qui reſte au Vouſſoir AK, pour renverſer le Vouſſoir KF ſur la charniére F.

Il faut donc faire l'épaiſſeur de la Voûte telle que cet excès ſoit égal à l'énergie que le Vouſſoir KF a pour tourner du côté du centre de la Voûte, puiſqu'il faut que le Vouſſoir KF réſiſte à la pouſſée du Vouſſoir AK.

Pour cela ſoit l'épaiſſeur AB de la Voûte..... $= x$.
Le rayon BC de l'intrados $= KC = CE$..... $= r$.
Le rayon AC de l'extrados ſera............... $= r + x$.
Soit l'arc BK, ou ſon égal KE............. $= a$.
Soit BZ, ou ſon égal LE..................... $= d$.
L'on aura CZ ou ſon égal $CL = ZK$......... $= r - d$.

Du centre de gravité H du Vouſſoir AK, ſoit tiré HD perpendiculairement ſur AC, & du centre de gravité P de l'autre Vouſſoir FK ſoit tiré PQ, perpendiculaire ſur CF, pour lors, puiſque les Vouſſoirs ſont égaux,

L'on aura $CD = CQ$, & par la propriété des centres de gravité, l'on aura HD, ou ſon égal $ZI = \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais pour faciliter le calcul, ſoit fait HD, ou $ZI = z$, puiſque $CZ = ZK$, & que le triangle CZK eſt rectangle.

L'on aura CZ, ou $ZK = \sqrt{\frac{\overline{CK}^2}{2}} = \sqrt{\frac{rr}{2}}$; ou plûtôt comme nous avons fait $BZ = d$, nous aurons CZ, ou ſon égal $ZK = r - d$.

Et par conſéquent $IK = ZK - ZI = r - d - z$.
Et l'on aura GI, ou $XK = AZ = x + d$.

Mais l'effort horizontal $IK = r - d - z$ du Vouſſoir AK eſt appliqué au bras de levier $MF = CZ = r - d$, ainſi l'énergie de cet effort horizontal IK, pour faire tourner le Vouſſoir KF ſur la charniére F, eſt $= rr - 2rd + dd + dz - rz$.

Et en la place de $rr - 2rd + dd$, qui eſt le quarré

de $r - d = ZK$, si l'on met $\frac{rr}{2}$, qui est aussi le quarré de ZK, puisque nous avons trouvé ci-dessus $ZK = \sqrt{\frac{rr}{2}}$, l'on aura l'énergie de la force horizontale $IK = \frac{rr}{2} + dz - rz$.

Et la force verticale $XK = d + x$ est appliquée au bras de levier $LF = d + x$, ainsi son énergie, pour affermir le Voussoir KF, est $= dd + 2dx + xx$.

Et si l'on retranche, comme nous avons dit ci-devant, l'énergie verticale $dd + 2dx + xx$ du Voussoir AK, de son énergie horizontale $\frac{rr}{2} + dz - rz$, le reste $\frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$ sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF autour de la charniére F.

Voyons maintenant quelle est l'énergie du Voussoir KF pour résister.

Puisque le Voussoir KF est égal au Voussoir AK, sa pesanteur sera comme celle du Voussoir $AK = d + x$.

Mais cette pesanteur $d + x$ étant réünie au centre de gravité P, est appliquée au bras de levier $QF = AD$, ainsi son énergie sera $= d + x \times AD$.

Maintenant pour trouver le levier $QF = AD$, il faut considérer que CH divisant l'angle ACK ou ZCK en deux parties égales, l'on aura... $CK : CZ :: KV : VZ$.

Et *componendo*..... $CK + CZ : CZ :: KV + VZ : VZ$.

C'est-à-dire.......... $2r - d : r - d :: r - d : VZ$.

$$\text{Donc } VZ = \frac{\overline{r-d} \times \overline{r-d}}{2r-d}.$$

$$\text{Mais } VZ : CZ :: HD : CD.$$

C'est-à-dire, $\frac{\overline{r-d} \times \overline{r-d}}{2r-d} : r - d :: z : CD = \frac{2rz - dz}{r-d}$.

Mais AD ou le levier $QF = AC - CD = r + x - \frac{2rz + dz}{r-d}$.

Donc l'énergie $d + x \times AD$, que nous avons trouvée

Q ij

pour le Vouſſoir KF, eſt $\overline{d+x} \times \overline{r+x} + \overline{d+x} \times -\frac{2rz+dz}{r-d}$, c'eſt-à-dire, $dr+dx+xr+xx-\frac{2drz+ddz-2rzx+dzx}{r-d}$, laquelle énergie du Vouſſoir KF doit être égale à l'énergie $\frac{rr}{2}+dz-rz-dd-2dx-xx$ qui reſte au Vouſſoir AK pour le renverſer ſur la charniére F, ce qui donne cette Equation,

$$dr+dx+xr+xx-\frac{2drz+ddz-2rzx+dzx}{r-d}=\frac{rr}{2}+dz-rz-dd-2dx-xx \quad (A).$$

Comme nous avons trouvé $\frac{rr}{2}=rr-2dr+dd$.

L'on aura $\frac{r}{\sqrt{2}}=r-d$.

Et par conſéquent l'on aura $d=r-\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Mettant $\frac{6drr+6drx+2dxx}{6ar+3ax}$ en la place de z.

Et $r-\frac{r}{\sqrt{2}}$ en la place de d dans l'Equation (A).

Elle ſe changera en cette Equation ordonnée

$$\frac{x^3+x^2\times\left\{\begin{array}{l}-3rr\\-\frac{9}{2}ar\\+12ra\sqrt{2}\end{array}\right\}+x\times\left\{\begin{array}{l}-3r^3\\-\frac{27}{2}arr\\+15arr\sqrt{2}\end{array}\right\}\begin{array}{l}-9ar^3\\ \\+6ar^3\sqrt{2}\end{array}}{3a\sqrt{2}-r}=0.$$

Maintenant ſi l'on fait le rayon BC ou r de la Voûte .... $=14$.

Et que l'on multiplie ce rayon par $3\frac{1}{7}$, qui eſt à peu-près le nombre de fois que la circonférence contient ſon diametre, l'on aura la demi-circonfér... $=44$.

Et l'arc BK ou a, qui eſt $\frac{1}{4}$ de la demi-circ. ſera $=11$.

Et $\sqrt{2}$ étant $=1\frac{41421}{100000}$, l'Equation ſe changera en celle-ci,

$$x^3+40.787xx+257.05x-475.587\ldots=0.$$

Mettant $y-\frac{40.787}{3}$ en la place de x, l'on aura cette Equation, qui n'aura point de ſecond terme,

$$y^3.*-297.473y+1043.38618=0.$$

Or comme $\overline{\frac{297 \cdot 473}{27}}^{3} > \overline{\frac{1043 \cdot 3618}{4}}^{2}$, & que le troiſiéme terme eſt négatif, il s'en ſuit que cette Équation eſt irréductible, & l'on trouvera par approximation la valeur poſitive de x, qui eſt celle que nous cherchons entre 1.4866 & 1.4865, qui eſt la plus petite épaiſſeur d'une Voûte uniforme en plein Cintre, c'eſt-à-dire, en demi-cercle, dont le diametre porteroit ſur les Couſſinets, & ſeroit, comme nous l'avons ſuppoſé, de 28 pieds dans l'intrados.

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que l'effort GK du Vouſſoir AK fut dirigé vers la charniére F ſur le Couſſinet, pour lors la peſanteur du Vouſſoir AK ne pourroit jamais renverſer le Vouſſoir KF, parce que ce Vouſſoir KF trouveroit ſur la charniére F un obſtacle invincible. Figure 2.

Et dans ce cas l'épaiſſeur de la Voûte ſeroit telle, que l'on auroit cette proportion $GI : IK :: KL : LF$, puiſque l'on ſuppoſe que la direction GK paſſe par le point F, & que les triangles GIK, KLF, ſont ſemblables.

Mais dans le Probleme précédent nous avons trouvé $GI = d + x$ auſſi-bien que LF, & nous avons trouvé $IK = r - d - z$ & $KL = r - d$.

L'on aura donc cette proportion $d + x : r - d - z :: r - d : d + x$. Donc $dd + 2dx + xx = rr - 2dr + dd - rz + dz$.

Mettant en la place de z ſa valeur, que nous avons trouvée, Probleme précédent, $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, & mettant auſſi en la place de d ſa valeur, que nous avons auſſi trouvée dans le même Probleme $= r - \frac{r}{\sqrt{2}}$, l'on aura, en ordonnant l'Équation,

$$x^3 + \frac{xx \times \left\{\begin{matrix} 12ar \\ -rr \\ -3ar\sqrt{2} \\ +rr\sqrt{2} \end{matrix}\right\} + x \times \left\{\begin{matrix} 15arr \\ -3r^3 \\ -9arr\sqrt{2} \\ +3r^3\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -3r^4 \\ +6ar^3 \\ -6ar^3\sqrt{2} \\ +3r^4\sqrt{2} \end{matrix}}{3a} = 0.$$

Mettant, comme dans le Probleme précédent, 11, 14, $1.\frac{41421}{100000}$ en la place de $a, r, \sqrt{2}$, l'on aura $x^3 + xx \times 38.661 + x \times 251.771 - 826.6125 = 0$.

Et l'on trouvera, par approximation, la valeur positive de x entre 2.3678 & 2.3688 pour la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à la Voûte de 28 pieds de diametre, afin que l'effort *GK* de la moitié *AK* de la demi-Voûte soit dirigé vers la charniére *F* du Coussinet.

PROBLEME II.

Déterminer la plus petite épaisseur uniforme AB *d'une Voûte* RAF *de 120°.*

SOLUTION.

Figure 3. Soit, comme dans le Probleme précédent, la Voûte *RAF*, divisée en quatre Voussoirs égaux attachés ensemble par trois charniéres *T, A, K,* & aux Coussinets par deux charniéres *R, F.*

Cela posé, soient les arcs de l'intrados

BK, KE, &c. .... $= a$.

Soit le rayon *BC* de l'intrados....... $= r$.

L'épaisseur *AB* de la Voûte......... $= x$.

L'on aura le rayon *AC* de l'extrados... $= r + x$.

L'on aura *ZK*, ou son égal *EV*, qui est le sinus de 30°...................... $= \frac{r}{2}$.

L'on aura *ZC*...................... $= \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Et l'on aura *BZ*.................... $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Ou, si l'on veut, soit, comme dans le Probleme précédent, *BZ*.............. $= d$.

L'on aura $AZ = d + x = BZ + AB = r - \sqrt{\frac{3rr}{4}} + x$.

Soit *H* le centre de gravité du Voussoir *AK*, l'on aura par la propriété des centres de gravité, *HD*, ou *AG*, ou *ZI* $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, comme dans le Probleme précédent.

Et par conséquent $IK = ZK - ZI = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais la pesanteur du Voussoir AK, étant réünie à son centre de gravité H, & agissant verticalement suivant la diagonale GI du parallelogramme YK, se décompose en deux autres forces, dont l'une agit suivant le côté GY du parallelogramme YK, & l'autre suivant le côté GK du même parallelogr. ensorte que si l'on exprime la pesanteur du Voussoir AK par la diagonale $GI = d + x$, l'effort que ce Voussoir sera suivant GK contre le Voussoir KF, sera exprimé par GK.

Mais cet effort exprimé par GK, que le Voussoir AK fait contre le Voussoir KF, se décompose en deux forces suivant l'horizontale IK, exprimé par $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$, & l'autre suivant la verticale XK, exprimé par XK, ou par la pesanteur GI du Voussoir $= x + d$.

Ainsi le Voussoir AK fait contre le Voussoir KF deux efforts contraires, c'est-à-dire, l'un horizontal IK, pour le renverser sur la charniére F, & l'autre XK, pour l'affermir.

Donc l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK sur l'énergie de l'effort vertical XK, sera l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF, en le faisant tourner sur la charniére F.

Ainsi il faut faire l'épaisseur x de la Voûte telle que cet excès d'énergie soit égale à l'énergie que le Voussoir KF a pour tourner vers le centre de la Voûte, ou pour résister au Voussoir AK.

Si l'on multiplie l'effort horizontal $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$ par son bras de levier $MF = MN - FN = \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r - x}{2}$ (parce que FN étant le sinus de 30°, vaut la moitié du rayon $FC = r + x$).

Le produit $\frac{rr}{4}\sqrt{3} - \frac{3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3}}{6ar + 3ax} - \frac{rr}{4} + \frac{3dr^3 + 3drrx + drxx}{6ar + 3ax} - \frac{rx}{4} + \frac{3drrx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie horizontale du Voussoir AK.

Maintenant ſi l'on multiplie l'effort vertical $XK = x + d$ par ſon bras de levier $LF = \rho F - \rho L$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical.

Mais $F\rho$ étant le ſinus de $60°$, eſt égal $\sqrt{\frac{3}{4}CF^2}$, c'eſt-à-dire, $\frac{CF}{2}\sqrt{3} = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$, & nous avons trouvé $\rho L = ZK = \frac{r}{2}$. Donc le levier $LF = F\rho - \rho L = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2}$.

Multipliant, comme nous avons dit, ce levier par l'effort vertical $XK = x + d$, le produit $\frac{rx\sqrt{3}}{2} + \frac{xx\sqrt{3}}{2} + \frac{dr\sqrt{3}}{2} + \frac{dx\sqrt{3}}{2} - \frac{rx}{2} - \frac{dr}{2}$ ſera l'énergie de l'effort vertical.

Et ſi l'on retranche cette énergie verticale de l'énergie horizontale que nous avons trouvée, le reſte

$$- \frac{3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 3drrx + drxx}{6ar + 3ax}$$
$$+ \frac{3drrx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax} + \frac{rr\sqrt{3} - rr - rx}{4}$$
$$- \frac{rx\sqrt{3} - xx\sqrt{3} - dr\sqrt{3} - dx\sqrt{3} + rx + dr}{2}$$

ſera l'énergie qui reſte au Vouſſoir AK, pour renverſer le Vouſſoir KF ſur la charniére F de ſon Couſſinet, lequel reſte étant abrégé, devient

$$= \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drrx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$
$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}.$$

Lequel reſte doit être égal à l'énergie du Vouſſoir KF, que nous allons chercher.

Comme le Vouſſoir KF eſt égal au Vouſſoir AK, ſa peſanteur ſera comme celle du Vouſſoir $AK = d + x$.

Mais cette peſanteur étant réünie au centre de gravité P du Vouſſoir KF, eſt appliquée au bras de levier OF, qu'il faut trouver.

Nous avons. . . . . $OF = F\rho - O\rho$.

Mais nous avons trouvé. . . . . $F\rho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3}$.

Il ne s'agit donc plus que de trouver. . . . $O\rho$.

Pour

Pour cela il faut considérer que KS est la différence du sinus de 60° au sinus de 30°, puisque $KS = ZC - EV$, c'est-à-dire, $= \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$.

Mais pour abréger, soit fait $KS = b$, l'on aura, par la propriété du centre de gravité, $P\pi$, ou son égal $O\rho = \frac{6brr + 6brx + 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Donc le levier $OF = F\rho - O\rho = \frac{r+x}{2}\sqrt{3} - \frac{6brr - 6brx - 2bxx}{6ar + 3ax}$.

Et multipliant ce levier par la pesanteur $d + x$ du Voussoir KF, le produit $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2} - \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brxx - 6brrx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie du Voussoir KF, laquelle énergie doit être égale à l'énergie qui reste au Voussoir AK, pour renverser le Voussoir KF, ce qui donne cette Equation $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2}$

$$- \frac{6bdrr - 6bdrx - 2bdxx - 6brrx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$$

$$= \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drrx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$

$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}.$$

Mettant $r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ en la place de d, & $\sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$ en la place de b. Et ordonnant l'Equation, l'on aura

$$\frac{x^3 + xx \times \left\{\begin{array}{l} 24ar\sqrt{3} \\ -3rr\sqrt{3} \\ -\frac{21}{2}ar \end{array}\right\} + x \times \left\{\begin{array}{l} 30arr\sqrt{3} \\ -3r^3\sqrt{3} \\ -\frac{63}{2}arr \end{array}\right\} \begin{array}{l} +12ar^3\sqrt{3} \\ -21ar^3 \end{array}}{6a\sqrt{3} - r\sqrt{3}} = 0.$$

Maintenant si l'on fait $r = 14$; a étant un arc de 30° sera $= 7\frac{1}{3}$, & substituant 14 & $7\frac{1}{3}$ en la place de r & a, dans cette Equation l'on aura

$$x^3 + 40.227xx + 291.5959x - 83.416 = 0.$$

D'où l'on tirera par approximation la valeur positive de x

entre 0.276 & 0.275, qui eſt la moindre épaiſſeur uniforme que l'on puiſſe donner à une Voûte de 120 degrés. Ce qui donne x approché à $\frac{1}{1000}$ près.

REMARQUE.

Nous avons trouvé dans le Probleme 1er, qu'une Voûte en plein Cintre, d'une épaiſſeur uniforme de 14 pieds de rayon, ou de 28 pieds de diametre, devoit avoir ſon épaiſſeur entre 1.4866 & 1.4865 pour être en équilibre & conſerver ſa figure.

Nous avons auſſi trouvé dans le Probleme 2, qu'une Voûte circulaire de 120°, d'une épaiſſeur uniforme, & de 14 pieds de rayon, devoit avoir une épaiſſeur entre 0.276 & 0.275 pour ſe ſoûtenir en équilibre & ne point changer de figure.

Si l'on veut comparer l'épaiſſeur de la Voûte en plein Cintre avec la Voûte de 120°, il faut réduire ces Voûtes à une même largeur, comme, pour exemple, à une même largeur de 28 pieds.

La Voûte en plein Cintre ayant, dans l'hypotheſe du Probleme 1er, 28 pieds de diametre, a auſſi 28 pieds de largeur.

La Voûte de 120°, ayant dans l'hypotheſe du Probl. 2, 14 pieds de rayon, a pour ſa largeur $14\sqrt{3}$, & nous avons trouvé que cette Voûte devoit avoir ſon épaiſſeur entre 0.276 & 0.275.

Si l'on prend 0.276 pour l'épaiſſeur de cette Voûte, l'on aura l'épaiſſeur d'une Voûte ſemblable de 120° ſur 28 pieds de largeur par cette analogie $14\sqrt{3} : 28 :: \text{ou } \sqrt{3} : 2 :: 0.276$ eſt à l'épaiſſeur de la Voûte de 120° de 28 pieds de large, laquelle épaiſſeur eſt égale $\frac{0.552}{\sqrt{3}} = 0.184\sqrt{3} = 0.3187$.

Mais nous avons trouvé 1.4866 pour l'épaiſſeur uniforme d'une Voûte en plein Cintre & de 28 pieds de diametre; d'où l'on voit que l'épaiſſeur d'une Voûte de 120° doit être près de cinq fois plus petite que l'épaiſſeur d'une Voûte en plein Cintre de pareille largeur de 28 pieds.

Si l'on veut réduire en lignes l'épaiſſeur 1.4866 de la

Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre, l'on fera cette analogie 10000 : 14866 :: 144 lignes : 214 lignes environ $\frac{1}{14}$, dont le quatriéme terme 214 lignes $\frac{1}{14}$ ou 1 pied 5 pouces 10 lignes $\frac{1}{14}$ est l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre.

L'on aura, par une analogie semblable, l'épaisseur de la Voûte de 120° de 14 pieds de rayon 1000 : 276 :: 144 lignes : 39 $\frac{744}{1000}$, ou 3 pouces 3 lignes environ $\frac{3}{4}$.

L'on aura pareillement l'épaisseur d'une Voûte de 120°, de 28 pieds de largeur par cette analogie 10000 : 3187 :: 144 lignes : 45 lign. $\frac{8928}{10000}$, ou 3 pouces & près de 10 lignes.

Comme toutes les épaisseurs que nous venons de trouver sont très-petites, il n'est pas étonnant que l'on trouve aujourd'hui des Voûtes très-minces qui subsistent depuis plus de cinq cents ans.

Cependant il faut bien se garder de donner à une Voûte de 120° & de 28 pieds de corde une épaisseur qui soit, comme nous la venons de trouver, seulement de 46 lignes; car les charniéres ou points d'appuis des Voussoirs se trouveroient dans les surfaces de la Voûte, ensorte que ces Voussoirs qui porteroient sur leurs arrêtes, écraseroient bien-tôt ces Arrêtes, & par conséquent la Voûte périroit, ou changeroit de figure, c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne, & pour lors les points d'appuis des Voussoirs seront de la quatriéme partie de l'épaisseur totale, car pour lors l'épaisseur de la Voûte que la formule donne se trouvera au milieu de l'épaisseur totale, & comme elle en occupera la moitié, il y aura un quart de l'épaisseur totale au dessus de l'extrados que donne la formule, & un quart au dessous de l'intrados de la formule, & par conséquent les charniéres qui se trouvent dans l'intrados & l'extrados de la formule, se trouveront au quart de l'épaisseur totale, & dans ce cas la corde appartiendra à un arc pris au quart de l'épaisseur de la Voûte du côté de l'intrados. Il faut remarquer que ceci n'est qu'à peu-près, & n'est pas exactement

vrai dans la rigueur géométrique, parce que les centres de gravité des Voussoirs changent en augmentant leur épaisseur.

L'épaisseur de la Voûte étant ainsi doublée, les charniéres ou points d'appuis seront en état de résister, ensorte que cette Voûte de 28 pieds de corde auroit 92 lignes, ou 7 pouces 8 lignes, & les points d'appuis des Voussoirs en auroient le quart, c'est-à-dire, auroient 1 pouce 11 lignes, ce qui n'est encore qu'une trop foible épaisseur, si la Voûte doit souffrir quelque charge. En un mot il faut augmenter l'épaisseur trouvée par la formule de la quantité nécessaire à deux appuis, & cette nécessité doit se régler sur la bonté des matiéres dont on doit construire la Voûte.

Ainsi pour que l'épaisseur résultante de nôtre formule, qui est de près de 3 pouces 10 lignes, soit au milieu de l'épaisseur, il faudroit tripler cette épaisseur résultante 3 pouc. 10 lignes, ce qui donneroit 11 pouc. 6 lign. pour l'épaisseur que l'on doit donner à la Voûte demandée de 14 pieds de rayon, & formée sur un arc de 120 degrés.

PROBLEME III.

Déterminer la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires, en supposant que les Voussoirs ne sont point polis, & ne peuvent pas par conséquent glisser les uns sur les autres.

SOLUTION.

Figure 4. Soit le rayon MC de l'intrados.......... $= r$.
L'épaisseur AM de la Voûte................ $= m$.
L'on aura le rayon AC de l'extrados........ $= r + m$.

Soit en P le centre de gravité de la demi-Voûte ANM.
Et soit l'arc MN de l'intrados.............. $= a$.
La hauteur MO de l'intrados................ $= d$.

L'on aura, par la propriété des centres de gravité, la distance Pp du centre de gravité P de ladite Voûte AN à la fléche MO de la Voûte $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$.

Maintenant puisque la pesanteur de la demi-Voûte est réünie à son centre de gravité P; si par ce centre de gravité P, l'on tire la verticale LR, & que par le point S, milieu de AM, l'on tire l'horizontale SL, & que du point L, où elle rencontre la verticale LR, l'on tire LX au milieu du Coussinet, & que du point X, l'on tire XR parallele à LT, & que l'on fasse RT parallele à LX, l'on aura un parallelogramme TX, dont la diagonale LR exprimant la pesanteur de la demi-Voûte AN, la ligne LT exprimera l'effort que cette demi-Voûte AN fait horizontalement pour résister à l'effort semblable de l'autre demi-Voûte, & la ligne LX exprimera l'effort que cette même demi-Voûte AN fait suivant cette direction LX contre le Coussinet.

Mais l'effort LX n'étant point perpendiculaire sur le rayon BC, ou, ce qui est le même, sur le joint BN, & faisant un angle obtus LXB, glisseroit sur ce joint BN du côté de B, si le joint étoit parfaitement poli; mais si le joint BN n'est point poli, la force LX y trouvera un appui solide, malgré son obliquité, attendu l'engrénage des parties.

Il faut donc nécessairement supposer que les joints d'une Voûte circulaire sont graveleux, ensorte que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns sur les autres.

Cela posé, il faut chercher quel est l'effort LX que le Voussoir AN fait contre le Coussinet BN.

Mais cette force LX se décomposant en deux forces ZX, RX, dont la verticale ZX exprime la pesanteur du Voussoir, & l'horizontale RX exprime l'effort horizontal qui se fait contre le pied-droit, il vaut mieux chercher quelle est cette force verticale ZX, & cette force horizontale RX, comme ci-après.

Comme le secteur XCS est semblable au secteur NCM.

L'on aura .... $CM : CS :: MO : SQ$.

C'est-à-dire .... $r : r + \frac{m}{2} :: d : SQ = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$.

Mais $SQ = LR$. Donc $LR = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r} = \frac{2dr + dm}{2r}$.

L'on aura auſſi.......... $CN : CX :: NO : XQ$.

C'eſt-à-dire............... $r : r + \frac{m}{2} :: NO : XQ$.

Mais.................... $NO^2 = CN^2 - CO^2$.

Et... $CO^2 = rr - 2dr + dd$, parce que $CO = r - d$.

Et... $CN^2 = rr$. Donc $NO^2 = CN^2 - CO^2 = 2dr - dd$.

Donc $r : r + \frac{m}{2} :: \sqrt{2dr - dd} : XQ = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$.

Maintenant ſi de XQ, que nous venons de trouver $= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$, l'on retranche RQ, ou ſon égal Pp, que nous avons trouvé $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$, le reſte $\frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$ ſera la valeur de XR, qui exprime l'effort horizontal que la Voûte fait contre le pied-droit ou pilier butant.

Maintenant ſi l'on exprime la peſanteur de la demi-Voûte par ſa ſurface ANM, au lieu de l'exprimer par LR, comme nous l'avons fait ci-devant, l'on aura cette ſurface ANM de la maniére ſuivante.

Puiſque l'arc MN de l'intrados $= a$, l'on aura l'arc $A\varepsilon$ de l'extrados par cette analogie,

$$CM : CA :: MN : A\varepsilon.$$

C'eſt-à-dire........ $r : r + m :: a : A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$.

Et ſi l'on multiplie ces deux arcs $MN = a$ & $A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$ par la moitié de leur diſtance AM, c'eſt-à-dire, par $\frac{m}{2}$, le produit $\frac{ma}{2} + \frac{amr + amm}{2r} = \frac{2amr + amm}{2r}$ ſera la ſurface de la demi-Voûte $A\varepsilon NM$, c'eſt-à-dire, ſera la peſanteur de cette demi-Voûte.

Mais la peſanteur de cette demi-Voûte eſt à l'effort horizontal RX comme LR eſt à RX; l'on aura donc l'effort horizontal qui ſe fait ſuivant RX par cette analogie LR, que nous avons trouvée $= \frac{2dr + dm}{2r}$

eſt à $RX = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$

comme la peſanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la demi-Voûte eſt à l'effort horizontal de la Voûte ſuivant RX, que l'on trouvera

$$= \frac{2amr + amm}{2dr + dm} \times \overline{\frac{r + \frac{m}{2} \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}}$$

$$= \frac{am}{d} \times \overline{\frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}}$$

$$= \frac{2arm + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6rmm - 2m^3}{6r + 3m}$$ qui eſt la pouſſée horizontale qu'il falloit trouver.

PROBLEME IV.

Lorſque les Vouſſoirs ne ſçauroient gliſſer les uns ſur les autres, trouver la baſe EF *du pied-droit, telle que l'effort composé de la peſanteur de la Voûte, de ſa pouſſée horizontale, & de la peſanteur dudit pied-droit, ſoit dirigé vers un point donné quelconque* H *de ladite baſe* EF. Figure 44

SOLUTION.

Pour abréger le calcul, ſoit regardé le trapeze $BIFN$ comme un parallelogramme, dont la hauteur ſoit GV, moyenne entre BI & NF.

Quoique dans ce changement, où les ſurfaces ſont égales, le centre de gravité D du trapeze ſe trouve tranſporté au centre de gravité K du parallelogramme, & que l'on donne par conſéquent à la ſurface $BIFN$, regardée comme un parallelogramme, plus d'énergie qu'elle n'en auroit en la regardant comme un trapeze, ce changement eſt ſi léger, qu'on le peut regarder comme zero, puiſque l'on eſt obligé de faire aux pied-droits des changements beaucoup plus conſidérables, comme d'y percer des Fenêtres & des Portes, auxquelles cependant on ne fait aucune attention.

Soit donc la hauteur moyenne VG du pied-droit $= p$.

La baſe IF du trapeze regardé comme parallelogramme.................................... $= q$.

Puiſque $BIFN$ eſt regardé comme un parallegramme, nous aurons ſa ſurface............... $= pq$.

Soit la baſe entiére EF du pied-droit....... $= x$.

La baſe EI de ſon fruit ſera................ $= x - q$.

Si l'on fait la hauteur $BI = VG = p$, l'on aura la ſurface du talus $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Comme nous exprimons la peſanteur de la Maçonnerie par ſon profil ou ſurface de ſa coupe, nous aurons la peſanteur de la partie $BIFN = pq$, & nous aurons la peſanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Maintenant ſoit le point d'appui H, placé de maniére que l'on ait.................. $EF : EH :: f : g$.

C'eſt-à-dire, que l'on ait... $x : EH :: f : g$.

L'on aura... $EH = \frac{gx}{f}$.

Comme la peſanteur du parallelogramme $BIFN$ eſt réünie à ſon centre de gravité, ou ſon milieu K, elle eſt appliquée au bras de levier HG.

Mais $HG = EF - GF - EH = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$.

Ainſi en multipliant la peſanteur pq par ce bras de levier $HG = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$, le produit $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$ ſera l'énergie de la partie $BIFN$ du pied-droit.

De même ſi l'on multiplie la peſanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$ par ſon bras de levier HZ, le produit ſera ſon énergie, mais $HZ = EZ - EH = \frac{2x - 2q}{3} - \frac{gx}{f}$. Donc l'énergie de la partie BIE du pied-droit ſera $= \frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$.

Et ſi l'on ajoûte enſemble l'énergie de la partie $BIFN$ & celle de la partie BIE, leur ſomme $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$

+

$+ \frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$ ſera l'énergie du pied-droit entier ſur le point d'appui H.

Laquelle énergie étant abrégée, devient $\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pgxx}{2f}$.

Voyons maintenant l'énergie de la Voûte qui doit faire équilibre avec le pied-droit ſur le point d'appui H.

Nous avons trouvé, dans le Probleme précédent, que l'effort de la Voûte, ſuivant LX, ſe décompoſoit en deux autres, l'un ſuivant ZX, égal à la peſanteur de la Voûte, & l'autre ſuivant RX.

Mais dans le même Probleme précédent nous avons trouvé la peſanteur de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2r}$, & l'effort horizontal ſuivant $RX = \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$.

Ainſi en multipliant la peſanteur ou l'effort vertical ſuivant ZX par ſon bras de levier $HY = HF - YF$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, laquelle énergie ſert à affermir le pied-droit.

Mais $HF = EF - EH = x - \frac{gx}{f}$.

Et l'on peut, pour abréger, faire YF égale à la moitié de l'épaiſſeur de la Voûte, c'eſt-à-dire, $= \frac{m}{2}$.

Donc le levier $HY = x - \frac{gx}{f} - \frac{m}{2}$, lequel levier étant multiplié par la peſanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la Voûte, le produit $\frac{2amrx + ammx}{2r} - \frac{2amrgx - ammgx}{2fr} - \frac{2ammr - am^3}{4r}$ ſera l'énergie de l'effort vertical que la Voûte fait pour affermir le pied-droit.

Et ſi l'on multiplie l'effort horizontal RX de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$ par ſon bras de levier $\pi H = VG = p$, le produit

$$\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$

ſera l'énergie de l'effort horizontal que la Voûte fait pour renverſer le pied-droit.

Comme l'effort vertical que la Voûte fait, ſert à affermir le pied-droit, & que l'effort horizontal tend à le renverſer, ſi l'on retranche l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, de l'énergie de ſon effort horizontal, le reſte ſera la véritable énergie que la Voûte employe pour renverſer le pied-droit ſur le point d'appui *H*, & ce reſte ſera

$$\frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

Maintenant puiſque, ſuivant l'hypotheſe, l'effort compoſé de la peſanteur de la Voûte, de ſon effort horizontal, & de la peſanteur du pied-droit doivent être dirigés vers le point d'appui *H*, il faut que l'énergie du pied-droit & l'énergie de la Voûte ſoient en équilibre, c'eſt-à-dire, égales ſur ce point d'appui *H*, ce qui donne cette Équation

$$\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pgxx}{2f} = \frac{2ampr + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$ D'où l'on tire

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \frac{qqf}{2f - 3g} + \frac{6amfr - 3ammf}{2fdr - 3gdr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ - \frac{12mrrf - 12mmrf - 4m^3f}{4rf + 2mf - 6rg - 3gm} + \frac{6ammrf + 3am^3f}{4prf - 6pgr} \\ + \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amrf + 3ammf - 6amrg - 3ammg}{4pfr - 6pgr} \right\}^2 \end{array} \right\}} - \frac{q}{2} - \frac{6amrf - 3ammf + 6amrg + 3ammg}{4pfr - 6pgr}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que le point d'appui *H*, vers lequel eſt

dirigé l'effort composé de la Voûte & du pied-droit fut dans la surface extérieur du pied-droit, il faudroit faire $EH = o$; & comme nous avons fait $EF : EH :: f : g$, l'on aura $EF : o :: f : g$, & par conséquent l'on aura $g = o$.

Substituant donc o en la place de g dans la formule du Probleme, l'on aura une autre Equation qui nous donnera la base x du pied-droit, telle que l'effort composé de la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit sera dirigé vers l'extrémité extérieure de la base, & cette formule sera

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \frac{qq}{2} + \frac{6amr - 3amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{2r + m} + \frac{6ammr + 3am^3}{4pr} \\ + \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amr + 3amm}{4pr} \right\}^2 \end{array} \right\}} - \frac{q}{2} - \frac{6amr - 3amm}{4pr}.$$

Application du Probleme précédent à une Voûte, dont les dimensions & la hauteur du Pied-droit soient données, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF *du Pied-droit.*

Soit une Voute, dont l'intrados soit un arc de 120°, & dont la corde soit de 28 pieds, la moitié de cette corde sera le sinus de 60°, ainsi l'on aura le rayon r de la Voûte par cette analogie, Figure 4.

Le sinus de 6°, qui est de........ 86602.

Est au rayon ou sinus total........... 100000.

Comme la moitié de la corde de Voûte, c'est-à-dire 14, Est au rayon de ladite Voûte, lequel rayon se trouve par l'opération de $16\frac{17}{100}$.

Soit l'épaisseur de la Voûte $= \frac{2}{3}$,

Puisque l'arc MN est de 60 degrés, l'on aura MO, c'est-à-dire, la hauteur de la fléche de l'intrados au-dessus du pied-droit égale à la moitié du rayon, c'est-à-dire, égale 8.085.

Mais nous avons fait $MO = d$, donc l'on aura $d = 8.085$

Puiſque le rayon de la Voute.....	=	16. 17.
Son diametre ſera..............		32. 34.
Multipliant ce diametre par.....		3. $\frac{1}{7}$.
		97. 02.
		4. 62.

Le produit.................. 101. 64. donnera la circonférence, dont la ſixiéme partie 16. 94 ſera la valeur de l'arc de 60 degrés, c'eſt-à-dire, ſera la valeur de la moitié de l'intrados, laquelle moitié nous avons appellée a.

Maintenant ſoit la hauteur p du pied-droit $= 20$
la baſe q de la partie parallelipipedale du pied-droit.......................... = $\frac{2}{3}$ de même que l'épaiſſeur de la Voute.

Enfin le point H, où l'on veut que ſoit dirigé l'effort composé de tous les efforts, ſoit éloigné de la face extérieure dudit pied-droit de la valeur de $\frac{1}{3}$ de ſa baſe, c'eſt-à-dire, de maniére que l'on ait $EF : EH :: 3 : 1$.

Mais nous avons dans le Probleme précédent $EF : EH :: f : g$, donc nous avons $f = 3$, & $g = 1$.

Et ſi l'on ſubſtituë dans l'Equation qui donne la valeur de x

ces grandeurs	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	1
en la place de	r	d	a	p	q	m	f	g

L'on trouvera $x = 5$ pieds $\frac{1}{2}$ pour la baſe du pied-droit cherchée, ſur laquelle baſe $x = EF$, le point d'appui H eſt au tiers de ladite baſe, enſorte que HF ſera de 3 pieds $\frac{2}{3}$.

Application du Corollaire du Probleme précédent à une Voûte, dont les dimenſions ſont comme celles du Probleme, & dans laquelle il s'agit de trouver la baſe EF, *telle que la pouſſée de la Voûte & de la peſanteur du pied-droit ſoient dirigées vers l'extrémité extérieure* E *de ladite baſe.*

Comme les dimenſions de la Voûte ſont toûjours les

mêmes, l'on aura, comme dans l'application du Probleme,

	16. 17	8. 085	16. 94	20	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
pour	r	d	a	p	q	m

Substituant ces grandeurs déterminées en la place des lettres dans l'Equation du Corollaire, l'on aura la base $x = 3.\frac{66}{100}$, c'est-à-dire $= 3$ pieds $\frac{2}{3}$.

Comme le pied-droit ou son profil est composé de deux parties, dont l'une est parallelogrammique, & que l'épaisseur ou base de la partie parallelogrammique est égale à l'épaisseur de la Voûte qui est de $\frac{2}{3}$, il restera 3 pieds pour le fruit ou base de l'autre partie qui est triangulaire, & si l'on ajoûte $\frac{1}{3}$ à ces 3 pieds pour prévenir l'écrasement des parties, la base totale du pied-droit sera de 4 pieds, & comme la hauteur du pied-droit est de 20 pieds, cette base totale de 4 pieds sera égale à la cinquiéme partie de sa hauteur.

Si l'on faisoit l'épaisseur de la muraille au pied-droit de 2 pieds par en haut, c'est-à-dire, au Coussinet, pour lors l'on trouvera la base entiére $EF = x = 3.597$, c'est-à-dire $= 3$ pieds 7 pouc. 2 lignes, en dirigeant l'effort composé à l'extrémité extérieure E de la base EF. On pourra faire de semblables applications pour toutes sortes de Voûtes circulaires, dont l'épaisseur & la grandeur seront données avec la hauteur du pied-droit.



SUITE DES OBSERVATIONS SUR L'AIMANT.

Par M. DU FAY.

19 Avril 1730.

DANS le Mémoire que je lûs en 1728, je rapportai plusieurs expériences qui tendoient à prouver que si l'on veut aimanter un morceau de Fer, ensorte que sa direction soit déterminée, il ne faut que le rompre, le frapper, le frotter, enfin donner par quelque moyen que ce soit un ébranlement à ses parties, tel que les petites branches, pointes ou poils, que j'ai supposés, après Descartes & la plûpart des Physiciens, remplir les pores du Fer, puissent être abbattus ou renversés vers celle des extrémités qu'on veut faire diriger vers le Nord. J'ai varié ces expériences d'un grand nombre de façons, & il me paroît qu'il peut demeurer pour constant qu'un Fer n'est aimanté que lorsque tous ses poils, ou du moins la plus grande partie, sont couchés en un même sens.

Je ne dois pas obmettre une objection qui m'a été faite sur l'extrême mobilité que je suppose dans ces petites branches ou poils; ils doivent être si déliés que leur pesanteur sera, dit-on, regardée comme nulle, & qu'il est impossible qu'ils tombent par leur seul poids, suivant les différentes situations ou les ébranlements qu'on peut donner à la barre de Fer. Quoique cette objection semble forte, il est très facile d'y répondre. On sçait que les corps n'ont de pesanteur que relativement au milieu dans lequel ils se trouvent, & qu'une plume mise dans un tuyau vuide d'air, y tombe avec la même vîtesse, c'est-à-dire, y a la même pesanteur qu'un morceau de bois : or, il est certain que les pores du Fer ne sont pas remplis d'air; par conséquent, quelques déliés que soient ces petits poils, ils ont une pesanteur relative au milieu dans lequel ils se trouvent, une pesanteur réelle qui fait qu'ils se

renverſent d'un côté ou de l'autre, ſuivant les mouvements qu'on donne à la barre.

Si l'on a frotté un morceau de Fer ſur une Pierre d'Aimant, & que le tenant dans une ſituation perpendiculaire, on frappe ſur l'extrémité qui ſe dirige au Sud, on ne fera qu'augmenter ſa vertu, parce qu'on ne fait qu'abbattre un plus grand nombre de poils vers le côté où ils doivent être, mais ſi on frappe ſur l'autre bout, les poils ſe redreſſent, le paſſage ſe ferme à la matiére magnétique, la vertu du Fer diminuë, & ſi l'on continuë de frapper, elle ſe perd entiérement, paſſe à l'autre bout du Fer, & lui donne une direction contraire à celle qu'il avoit auparavant.

Ces faits qui ſont fondés ſur l'expérience, étant une fois bien établis, il ſuit aſſés naturellement qu'il n'y a qu'un ſeul courant de la matiére magnétique, & qu'elle entre dans le Fer aimanté par le côté qui ſe dirige vers le Sud, puiſque les poils qui ſont couchés vers l'autre extrémité la laiſſent entrer & ſortir ſans peine lorſqu'elle va dans ce ſens, mais qu'ils s'oppoſeroient à ſon entrée en lui preſentant leurs pointes, ſi elle alloit dans le ſens oppoſé. Cette hypotheſe, & celle du renverſement des poils, étant admiſes, tous les phénomenes de l'Aimant s'expliquent avec une facilité infinie. J'ai donné dans mon premier Mémoire l'explication de ceux qui ſont le plus connus, mais ſi l'on veut ſe donner la peine d'en faire l'application à tous les autres, en y joignant l'unité du courant, j'oſe aſſûrer que l'on en trouvera l'explication plus facile que dans aucun autre ſyſtême.

Je dois avertir ici que pour éviter l'obſcurité ou l'équivoque, je ne déſignerai point les poles de l'Aimant par les noms de Boreal & d'Auſtral, parce que, quoiqu'il ſoit reçû que le pole qui ſe dirige vers le Sud ſoit le Boreal, il m'a paru que cette définition ne ſe preſentoit pas toûjours bien nettement à l'eſprit, & j'ai crû qu'il valloit mieux les déſigner par celui qui ſe dirige au Nord, & celui qui ſe dirige au Sud.

Une particularité très-connuë de l'Aimant & du Fer aimanté, eſt que le pole qui ſe dirige vers le Nord, leve plus

de Fer que l'autre ; Descartes & presque tous les Physiciens qui l'ont suivi, ont supposé, premierement que cela n'arrivoit que dans les Pays septentrionaux, sans se fonder sur aucune expérience, que je sçache, & ils ont expliqué ce fait, en disant que le pole boréal de la Terre, considéré comme un grand Aimant, fortifioit le pole Austral des Pierres d'Aimant, ou du Fer aimanté, de même qu'il arrive à deux Aimants qu'on approche l'un de l'autre par les poles de différent nom.

Il y a plusieurs choses à considérer dans cette explication, 1.° Quoiqu'il soit certain que dans ce Pays-ci le pole de l'Aimant qui se dirige vers le Nord leve plus de Fer que l'autre, & qu'il n'y ait qu'à plonger une Pierre d'Aimant dans la limaille pour en être convaincu, il est néantmoins très-douteux que cela n'arrive pas de même dans les Pays méridionaux, & il sera du moins permis d'en douter jusqu'à ce qu'on en ait fait quelques expériences. 2.° L'expérience qui est apportée en comparaison n'est vraye que dans un cas qui n'est assûrement pas celui de la Terre à l'égard d'un Aimant, & il est très aisé de s'en éclaircir de la maniére la plus convaincante, il ne faut qu'approcher l'un de l'autre deux Aimants à peu-près d'égale force, par les poles de différent nom, sans qu'ils se touchent cependant, parce qu'alors ils ne feroient plus l'effet que d'un seul Aimant; on plongera ensuite dans la limaille le pole de l'un des Aimants qui se dirige vers le Nord, ensorte qu'il se charge de tout ce qu'il en pourra porter. S'il étoit vrai que la proximité du pole de l'autre Aimant augmentât sa force, il n'est pas douteux que lorsqu'on viendra à éloigner le second, une partie de la limaille ne dût se détacher, il doit même en tomber encore davantage si on le retourne, & que l'on presente le pole du Nord à la place de celui du Sud, car si l'un augmentoit la force du pole du premier Aimant, l'autre doit certainement la diminuër; il n'arrive cependant rien de tout cela, & il ne tombe point de limaille du premier, soit que l'on en éloigne l'autre, ou qu'on l'en approche par l'un ou l'autre de ses poles.

J'ai

J'ai obſervé de prendre deux Aimants à peu près d'égale force, parce que ſi l'un des deux eſt de beaucoup plus fort que l'autre, comme il eſt environné d'un tourbillon de matiére très-étendu, il fortifie neceſſairement le tourbillon de l'Aimant foible, de même qu'un Fer reçoit en preſence de l'Aimant une vertu magnétique qu'il perd lorſqu'on l'en éloigne ; c'eſt auſſi l'explication que donna M. de Reaumur en 1723, de ce qu'un outil foiblement aimanté enlevoit pluſieurs clous poſés ſur une groſſe enclume, tandis qu'il en enlevoit un avec peine lorſqu'on les mettoit ſur une table : mais ſi la force des deux Aimants dans nôtre expérience n'eſt pas bien différente, leur vertu n'eſt point du tout augmentée par l'approche des poles de différent nom.

C'eſt cependant ſur cette ſuppoſition qu'eſt fondée l'explication de Deſcartes, mais on peut aller plus loin, & dire que quand l'expérience ſeroit vraïe dans le cas de deux Aimants d'une force à peu près égale, cela ne ſuffiroit pas pour en conclurre qu'il arrive la même choſe à l'égard de la Terre, car le peu d'effet que pourroit faire la proximité du pole boréal de la Terre, ne peut être comparé à celui de deux Aimants que l'on met l'un auprès de l'autre, & l'on ne peut pas raiſonnablement regarder l'un comme une conſéquence de l'autre : l'explication donnée juſqu'à preſent ne peut donc pas ſe ſoûtenir, & il faut neceſſairement en chercher une autre ; elle ſe trouve naturellement dans le ſyſtême d'un ſeul courant.

Preſque tous les Phyſiciens ont ſuppoſé que la matiére magnétique ſe meut avec plus de facilité dans l'Aimant & dans le Fer aimanté que dans l'air. M. de Reaumur a cependant fait contre ce principe quelques difficultés, qui lui ſemblent prouver que la matiére magnétique trouve peut-être plus de difficulté à ſe mouvoir dans le Fer que dans les autres corps, & qu'on pourroit expliquer par-là tous les phénoménes de l'Aimant. Cette idée eſt très-ingénieuſe, & mérite fort d'être approfondie, j'eſpere même que M. de Reaumur voudra bien nous la donner quelque jour plus en détail : mais comme l'opinion contraire eſt aujourd'hui preſque univerſellement

reçûë, je crois devoir en faire la baſe de mon ſyſtême, d'autant plus même que l'opinion de M. de Reaumur étant préciſément l'inverſe de celle que j'admets, mon explication s'accordera également avec la ſienne, en changeant ſeulement l'application.

M'en tenant donc à l'ancienne opinion, & ſuppoſant l'hypotheſe d'un ſeul courant ſuivant laquelle la matiére n'entre que par un des poles, & ne ſort que par l'autre, on verra qu'elle
Figure 1. doit non-ſeulement entrer par l'extrémité *S* dont j'ai ſuppoſé les poils couchés de façon à lui donner un paſſage libre, mais auſſi par tous les points voiſins de ce pole, comme *B, C, D, E;* mais la matiére étant une fois dans le Fer, elle y reſte le plus long-temps qu'il lui eſt poſſible par la difficulté qu'elle trouve à pénétrer les parties de l'air, & par conſéquent la plus grande partie n'en ſort que par l'extrémité *N* qui eſt la plus éloignée. C'eſt donc vers ce ſeul point que ſe trouvent réünis tous les torrents de matiére qui ſont entrés par divers points du pole oppoſé. Ce pole ſe trouvera donc avoir plus de vertu que l'autre par la réünion & l'abondance de la matiére. Voilà où nous mene le raiſonnement, & l'expérience nous prouve en effet que c'eſt ce pole qui enleve le plus de Fer.

Il faut encore quelque choſe cependant pour que l'eſprit ſoit entiérement ſatisfait; il faut voir, & toucher, pour ainſi dire, cette différence entre la denſité du torrent de matiére à l'entrée & à la ſortie de la Pierre; il ne faut pour cela qu'examiner avec attention la plus commune de toutes les expériences de l'Aimant, qui eſt de poſer ſur une table une Pierre d'Aimant, ou une lame d'Acier aimantée, de mettre une feüille de papier par deſſus, & de jetter avec un poudrier de la limaille de Fer ſur le papier. On ſçait qu'elle s'arrange en tourbillon, & trace exactement la route de la matiére magnétique autour de la Pierre; mais ſi l'on y prend bien garde, on verra que les filets de limaille ſont toûjours un peu plus reſſerrés, & plus proche les uns des autres autour du pole *N*, qui ſe dirige vers le Nord, qu'autour de l'autre, comme on le

voit dans les Fig. 1 & 2. Si l'on n'a pas fait cette attention jusqu'à present, c'est qu'il n'est pas facile de trouver un Aimant, ni même une lame d'Acier, dont les deux poles soient d'égale bonté; le mêlange de parties hétérogénes dans l'Aimant, & la façon de toucher les lames, peuvent causer de si grandes variétés, qu'il n'est pas étonnant qu'on ne se soit point apperçû jusqu'à present de cette disposition du tourbillon, qui n'est pas infiniment remarquable, mais que l'on trouvera toûjours constante, si l'on se sert d'une lame touchée bien également, avec les précautions que je rapporterai à la fin de ce Mémoire, & que l'on ait soin de répandre la limaille le plus également qu'il sera possible.

Il me semble que cette observation est une nouvelle preuve de l'unité du courant, & de la direction de son mouvement. J'en ajoûterai encore une qui mérite quelque attention, quoiqu'à dire le vrai, elle doive être regardée comme une convenance avec le systême plûtôt que comme une preuve. M. Halley & plusieurs autres Physiciens depuis lui ont dit que la matiére magnétique pouvoit avoir quelque part aux Lumiéres boréales. Sans entrer dans le détail de leurs opinions particuliéres, je dirai simplement qu'on pourroit les expliquer en cette sorte. Les exhalaisons inflammables, ou même dont quelques-unes sont déja enflammées, étant répandües dans l'air, si leur degré de densité ou de pesanteur les amene à la distance de la Terre où la matiére magnétique circule en plus grande abondance, ce torrent qui coule vers le Nord, rassemble ces exhalaisons éparses dans toute l'Athmosphere, & les réünit vers le pole; celles qui sont déja enflammées embrasent les autres, ou la seule collision les allume, & le courant de matiére les dispose en forme de rayons, tels que nous les voyons. On peut encore ajoûter, que suivant les observations les plus exactes, le centre auquel aboutissent ces rayons, décline presque toûjours vers l'Oüest de 14 ou 15 degrés, ce qui est à peu-près la quantité dont l'Aiguille décline présentement. Si ce centre des rayons des Aurores boréales venoit à suivre à l'avenir les variations de l'Aimant,

cela pourroit nous mener à quelque chose de plus positif, mais je ne pousserai pas maintenant plus loin cette explication, qui n'est qu'une conjecture, quoiqu'elle ne soit pas absolument sans vrai-semblance, & qu'elle puisse devenir beaucoup plus forte, si jamais nous sommes assûrés par de bonnes observations, qu'on ne voit pas de pareilles lumiéres vers le pole méridional.

Ce n'est pas assés d'avoir tâché d'établir le systême d'un seul courant par les diverses preuves que j'ai pû en trouver, il faut à présent répondre aux objections qu'on peut y faire. Celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est que s'il n'y avoit qu'un seul courant de matiére magnétique, une Aiguille aimantée étant posée librement sur la surface de l'eau, seroit portée par le mouvement de la matiére vers l'un des poles, & que pour que cela n'arrive point, il faut qu'elle soit poussée par deux courants d'égale force, dont l'un fasse équilibre à l'autre, & qui ne lui permettent que de tourner sur elle-même pour se diriger vers les poles, sans la pousser plûtôt vers l'un que vers l'autre.

Avant que de répondre à cette objection, on peut dire qu'elle seroit presque aussi forte contre le systême des deux courants; car comme le pole qui se dirige vers le Nord est plus fort que l'autre, il s'ensuivroit que le courant du Sud au Nord auroit plus de force, & que par conséquent l'Aiguille devroit être emportée vers le Nord; ainsi l'objection est à peu-près la même dans tous les systêmes, mais elle n'en est pas plus solide, & il est facile d'y répondre; il ne faut pour cela que se souvenir du principe reçû dans presque toutes les hypotheses, qui est que la matiére se meut avec plus de facilité dans l'Aimant, ou dans le Fer aimanté que dans l'air. Ce principe établi, l'Aiguille posée sur l'eau ne doit point avoir de mouvement processif vers le Nord, car pour qu'elle fût entraînée par le courant de la matiére, il faudroit que la matiére trouvât plus de résistance à pénétrer les pores de l'Aiguille, que l'Aiguille même n'en trouve à vaincre le frottement des parties de l'eau; mais comme la matiére passe

très-librement dans les pores de l'Aiguille ſuivant ſa longueur, il n'y a aucune partie de ſa force employée à porter l'Aiguille vers le Nord, & cette force ne doit tendre qu'à la faire tourner, enſorte que ſes pores ſe préſentent le plus avantageuſement qu'il eſt poſſible au courant de la matiére, ainſi l'Aiguille ne peut avoir que le mouvement de direction.

La ſeconde objection eſt priſe d'un Mémoire préſenté à l'Académie par M. de Créquy, dont l'objet étoit de prouver qu'il y a deux courants de matiére dont les directions ſont oppoſées. Il employe d'abord l'objection à laquelle nous venons de répondre, & qui a été faite plus d'une fois, & il ſe ſert enſuite de l'expérience ſuivante. Il a fait faire une Aiguille dont l'un des bouts depuis la chape eſt de Cuivre, & l'autre eſt d'Acier; cette Aiguille eſt par rapport au torrent de matiére magnétique, dans le même cas que ſi la moitié du Cuivre n'y étoit point, & en effet elle ne ſert qu'à faire équilibre à l'autre. M. de Créquy prétend que ſi l'on touche une pareille Aiguille, enſorte que le bout d'Acier ſe doive diriger vers le Sud, il eſt impoſſible qu'elle s'y dirige en cas que la matiére vienne du Sud, de même qu'une giroüette ou une banniére ne dirigera jamais ſa pointe vers le côté d'où vient le vent; il dit la même choſe à l'égard du Nord, d'où il conclut qu'il y a néceſſairement deux courants, dont l'un chaſſe l'Aiguille vers le Nord, & l'autre vers le Sud. Voilà les raiſons & l'exemple ſur lequel il ſe fonde; mais pour peu qu'on y faſſe d'attention, on verra que rien n'eſt ſi différent que le cas de la giroüette & celui de l'Aiguille. Dans le premier, l'effort du vent eſt continuellement appliqué ſur les parties extérieures de la giroüette, & la doit pouſſer par conſéquent juſqu'à ce qu'il l'ait placée dans la direction de ſon courant. Mais il n'en eſt pas de même de l'Aiguille, le courant qui l'entraîne, n'agit en aucune façon ſur ſes parties extérieures; au contraire, la matiére pénétre l'intérieur de l'Aiguille, & ce n'eſt que ſuivant la direction des parties internes du Fer que le courant doit agir. Nous avons ſuffiſamment établi dans le premier Mémoire, qu'il ne falloit

qu'abbattre les pointes que l'on ſuppoſe dans les pores du Fer, vers celle des extrémites que l'on veut faire diriger vers le Nord. Si l'on tourne l'Aiguille, enſorte que les pointes ſe préſentent au courant, il eſt certain que la matiere qui n'agit que ſur elles, puiſque ce ſont ces pointes ſeules qui réſiſtent à ſon paſſage, les heurtera toutes, enſorte qu'elle ſera tourner l'Aiguille juſqu'à ce qu'elle lui préſente le pole oppoſé par lequel elle doit entrer. La figure extérieure de l'Aiguille n'y fait rien, & il ſuffit qu'elle ſoit mobile; car quand on toucheroit l'Aiguille d'un ſens contraire, ce qui renverſeroit les pointes vers la chape, il arriveroit encore la même choſe, l'Aiguille ſera toûjours portée par le courant dans le ſens que ſes pointes ſeront tournées, & ſans que ſa figure extérieure y entre pour rien, puiſque dans aucun cas la force du courant de la matiére ne peut y être appliquée, ainſi on voit qu'il n'y a nulle parité entre l'exemple de la giroüette & celui de l'Aiguille qui n'a qu'une moitié d'Acier, & que par conſéquent l'objection tombe d'elle-même.

On peut ajoûter que quand on voudroit ſuppoſer qu'une pareille Aiguille fut abſolument dans le cas de la giroüette, il ſeroit impoſſible d'expliquer ſa direction par le moyen de deux courants; car ſi une giroüette étoit expoſée à deux vents, dont les directions fuſſent précisément oppoſées, la force de l'un des deux vents ſeroit ſupérieure à l'autre, ou elles ſeroient égales. Dans le premier cas, la giroüette ſeroit certainement entraînée par celui dont la force eſt la plus grande, & elle ſera comme ſi elle n'étoit expoſée qu'à un ſeul vent, dont la force ſera exprimée par l'excès de l'un ſur l'autre. Dans le ſecond cas, les deux forces ſe feront équilibre, & laiſſeront la giroüette indifféremment dans toutes les ſituations où elle ſe trouvera; ainſi le ſyſtême des deux courants eſt encore moins favorable que l'autre à l'explication de la direction de l'Aiguille qui n'a qu'un des bouts d'Acier, & nous venons de voir qu'il n'y a nulle difficulté en ſuppoſant un ſeul courant, puiſque la matiére n'agit que ſuivant l'inclinaiſon des parties intérieures de l'Aiguille auſquelles

ſeules elle eſt applicable, & nullement ſuivant ſa forme extérieure.

Je ne crois pas qu'il y ait d'autre objection contre l'unité du courant qui mérite attention. Je ne parle point ici de la déclinaiſon qui n'a rien de plus difficile dans ce ſyſtême que dans tous les autres, & qui n'a aucun rapport avec les propriétés de l'Aimant, dont j'ai entrepris de parler dans ces deux Mémoires. Pour ne me pas borner dans celui-ci à l'établiſſement d'un ſyſtême qui n'eſt qu'une recherche purement ſpéculative, je vais ajoûter quelques remarques ſur la maniére d'aimanter les Aiguilles & les lames de Fer ou d'Acier, & d'armer les Pierres d'Aimant pour produire l'effet le plus avantageux. Ces obſervations tendent toutes à confirmer l'unité du courant, ou du moins elles s'accordent mieux avec ce ſyſtême qu'avec tout autre.

On peut réduire à deux les différentes maniéres de toucher les Aiguilles ſur la Pierre d'Aimant. L'une eſt de les paſſer ſur une des armures de la Pierre, & l'autre de les paſſer ſur toutes deux. Il eſt certain que la maniére la moins avantageuſe eſt de ne les paſſer que ſur une; car premiérement pour toucher en cette ſorte, il faut que l'Aiguille faſſe avec la direction du courant de la matiére un angle aſſés grand, ce qui fait que les poils ne peuvent pas être couchés bien exactement dans le ſens de la longueur de l'Aiguille. En ſecond lieu, le torrent de matiére ſe trouve néceſſairement partagé, parce qu'il y en a une partie qui tend à couler dans l'Aiguille, & le reſte à paſſer dans l'autre pole de l'Aimant. Enfin l'Aiguille touchée de cette maniére ſur le pole de la Pierre qui ſe dirige au Sud, ſera encore moins aimantée que ſi on la touche ſur l'autre, parce que la matiére ſortant par ce dernier, eſt plus réünie, & a plus de force, comme nous l'avons prouvé au commencement de ce Mémoire. Ces conjectures ſont confirmées par l'expérience, & il eſt aiſé à chacun de les vérifier.

L'autre maniére de toucher, eſt de gliſſer l'Aiguille ſur les deux armures, la tenant parallele à l'axe de la Pierre, ce

qui ſe peut encore faire en deux façons, car on verra que rien n'eſt à négliger dans une matiére auſſi ſuſceptible des plus petites délicateſſes. On peut retirer l'Aiguille de deſſus les armures, en continuant de la gliſſer d'un bout à l'autre, enſorte que la partie qui a d'abord touché un des poles de l'Aimant, vienne enſuite à toucher l'autre. Pour peu qu'on réfléchiſſe, on verra bien que cette maniére n'eſt pas la meilleure, puiſque le même bout de l'Aiguille qui avoit poſé d'abord ſur le pole par lequel la matiére ſort de la Pierre, & dont les parties ſeront par conſéquent diſpoſées de façon à l'y laiſſer entrer, venant à paſſer enſuite ſur le pole oppoſé, la matiére qui entre dans la Pierre par ce pole doit néceſſairement détruire une partie de l'arrangement qui s'étoit fait lorſque ce même bout étoit ſur l'autre pole de la Pierre.

Il réſulte donc de-là que la meilleure maniére de toucher une Aiguille, eſt de la poſer ſur la tête des armures d'un Aimant, & ſi l'Aiguille eſt plus longue que l'axe de l'Aimant, on la gliſſera un peu, enſorte que chaque partie de l'Aiguille touche les armures, mais en la retirant, on la détachera parallelement à l'axe, ſans la gliſſer toute entiére ſur les deux poles, parce que, comme nous venons de l'obſerver, ſa vertu diminuëroit, ſi le bout qui a été d'abord ſur un des poles venoit à paſſer ſur l'autre. L'expérience confirme parfaitement cette théorie, & l'Acier touché en cette ſorte a beaucoup plus de vertu magnétique que des deux premiéres maniéres, qui ſont cependant preſque les ſeules qui ſoient en uſage.

Je rapporterai à cette occaſion une expérience qui ne ſe trouve dans aucun des Auteurs qui ſont venus à ma connoiſſance; c'eſt que ſi l'on gliſſe une Aiguille à la diſtance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, ſans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la gliſſe du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un inſtant à quelque diſtance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction ſemblable à celle qu'elle auroit, ſi on la poſoit ſimplement ſur les armures de la Pierre, & qu'on la retirât enſuite parallelement à l'axe,

&

& toute opposée à celle qu'elle auroit contractée, si on l'avoit glissée d'un bout à l'autre sur les deux armures de la Pierre.

Il ne faut que jetter les yeux sur la Figure 3.e pour voir que tout cela doit arriver ainsi, sur-tout dans le systême d'un seul courant ; car, supposé qu'il suive la direction désignée par les petites fléches, on voit que si l'on glisse l'Aiguille, ou qu'on la tienne seulement dans l'étenduë du tourbillon *OP*, les petits poils doivent se coucher du sens que vont les fléches, c'est-à-dire, que la matiére sortira par le bout *P*, qui par conséquent se dirigera vers le Nord. Il arrivera encore la même chose, si on pose l'Aiguille sur les armures, parce que le cours du tourbillon ne fera que se rapprocher de la Pierre, & la matiére passera toûjours par l'Aiguille en sortant d'un pole & rentrant dans l'autre; mais si l'on vient à glisser l'Aiguille sur les armures, il est nécessaire qu'elle prenne une direction opposée, puisque le bout de l'Aiguille qui étoit d'abord sur le pole *N*, vient ensuite sur le pole *M*, & que ce n'est pas de celui qu'il a touché le premier, mais du dernier, qu'il contracte la vertu qu'il conserve dans la suite. Figure 3.

J'ai voulu essayer s'il ne seroit pas possible de déterminer à peu près la vîtesse du courant de la matiére magnétique, mais quoique j'aye fixé un degré de vîtesse qu'elle excede de beaucoup, il s'en faut bien encore que je n'aye pû la déterminer au juste ; voici quelle étoit mon idée.

Supposant toûjours un seul courant qui circule dans la Pierre, & qui en sortant, va de *N* en *M;* si je parviens à faire passer une Aiguille en ce sens dans le tourbillon avec autant ou plus de vîtesse que n'en a le courant, elle ne doit point s'aimanter, parce qu'alors la matiére ayant une vîtesse égale, est comme en repos à l'égard de l'Aiguille, & par conséquent ne peut pas agir sur ses poils, ni les coucher en aucun sens. Pour tâcher d'y parvenir, j'ai ajusté une Aiguille à angles droits à l'extrémité d'une Tringle de bois de deux pieds, attachée par son autre bout à une goupille, ensorte que l'extrémité à laquelle étoit l'Aiguille, pût décrire un arc de cercle; j'ai lié vers ce bout une corde qui faisoit plusieurs

tours ſur un tambour de Montre. Ayant diſpoſé le tout ſur une planche, lorſque j'amenois vers moi la petite tringle, je bandois le reſſort du tambour ; venant enſuite à la lâcher ſubitement, la tringle partoit avec beaucoup de vîteſſe, & emportoit l'Aiguille, qui par ce moyen traverſoit très-rapidement le tourbillon d'un Aimant que j'avois diſpoſé à cet effet ſur la planche. J'ai recommencé cette expérience un grand nombre de fois, tantôt faiſant aller l'Aiguille dans le ſens du courant, tantôt dans le ſens oppoſé, & quoique j'aye crû remarquer qu'elle étoit plus vivement aimantée, lorſqu'elle alloit à contre-ſens du courant, la différence étoit néantmoins ſi peu conſidérable, qu'il en réſulte toûjours que le mouvement de la matiére magnétique eſt infiniment plus rapide que celui qui peut être cauſé par le débandement d'un reſſort.

Pour aimanter une lame d'Acier, on doit obſerver les mêmes choſes que nous avons dites à l'égard des Aiguilles ; on la paſſera ſur les deux armures d'un Aimant, & lorſque le bout par lequel on veut finir ſera proche de l'armure, on détachera la lame parallelement à l'axe de la Pierre ; on la frottera cinq ou ſix fois de la même maniére, & elle ſera auſſi-bien aimantée qu'elle peut l'être. Si l'on veut compoſer un Aimant artificiel avec pluſieurs de ces lames, il y a quelques précautions à prendre. A meſure qu'on les aura aimantées, il faut les poſer contre une muraille, le bout qui ſe doit diriger au Nord en embas, & les éloigner les unes des autres aſſés pour que les poles de même nom ne puiſſent pas ſe nuire mutuellement. Lorſqu'elles ſeront toutes aimantées, on les raſſemblera le plus ſubitement qu'il ſera poſſible, mettant enſemble les poles de même nom, & on les ſerrera bien avec les anneaux qui doivent avoir été préparés auparavant. Voilà la maniére qui m'a paru la meilleure pour faire un Aimant artificiel auſſi fort & auſſi bon qu'il le peut être.

Il y a encore quelque choſe à obſerver ſur le choix de la matiére qui ſe peut le mieux aimanter, & je fis quelques remarques à ce ſujet, lorſque je travaillois à mon premier

Mémoire ; car les expériences qui y ſont rapportées, ne réüſſiſſent pas à beaucoup près ſi parfaitement avec une lame d'Acier, & moins encore avec l'Acier trempé. Dans ces deux derniéres, les petits poils ne ſont pas ſi fléxibles, ni ſi faciles à renverſer que dans le Fer ordinaire, ainſi le ſeul renverſement de la lame, ou des coups légerement donnés ſur une de ſes extrémités, ne peuvent en abbattre qu'un très-petit nombre, mais il doit réſulter de cette difficulté, que lorſque les petits poils ſont une fois couchés en un même ſens, c'eſt-à-dire, lorſque l'Acier eſt aimanté, il doit perdre ſa vertu plus difficilement, c'eſt auſſi ce que l'expérience nous montre.

Comme les Auteurs varient extrêmement ſur ce qui s'aimante le mieux du Fer, de l'Acier, ou de l'Acier trempé, j'ai voulu m'en aſſûrer par des expériences exactes, & ayant fait faire quatre lames égales, l'une de Fer, l'autre d'Acier, la troiſiéme d'Acier trempé & la quatriéme de Fer fondu, toutes polies, je les ai toutes aimantées de la même maniére. On ſent, en les frottant, que celle de Fer s'attache à l'Aimant plus fortement que toutes, celle d'Acier plus que celle d'Acier trempé, & celle de Fer fondu moins que les trois autres. Les préſentant à une Aiguille aimantée, la lame d'Acier l'attiroit de bien plus loin que les autres, celle d'Acier trempé l'attiroit de plus loin que celle de Fer fondu, & celle de Fer avoit beaucoup moins de vertu magnétique que toutes les autres ; celle d'Acier en avoit le plus, & leur enlevoit l'Aiguille, quoiqu'elle en fût plus éloignée. Ces expériences ne varient point, & l'explication en eſt facile.

Le Fer s'aimante aiſément par la grande ſoupleſſe de ſes poils, leur mobilité, & la facilité qu'ils ont à être couchés en tout ſens ; ces propriétés lui font auſſi perdre la vertu magnétique avec preſque autant de facilité qu'il l'a acquiſe, c'eſt ce que nous voyons par le changement de ſes poles, lorſqu'on renverſe la barre, qu'on la chauffe, qu'on la frappe, &c. c'eſt ce qui fait auſſi qu'ayant été aimanté, ſes parties conſervent moins l'arrangement qu'elles ont reçû par la préſence de l'Aimant. L'Acier dont les poils ſont moins fléxibles,

s'aimante plus difficilement par le renverſement, par les coups; mais lorſqu'en le paſſant ſur un Aimant, ils ont été une fois inclinés & forcés à donner paſſage à la matiére magnétique, ils demeurent bien plus conſtamment dans cet état, & la même réſiſtance que leur manque de ſoupleſſe apportoit à l'arrangement néceſſaire pour être aimantés, s'oppoſe auſſi à leur dérangement.

Si par quelque moyen on pouvoit renverſer de la même maniére les poils qui ſont dans l'Acier trempé, ou dans le Fer fondu, ils conſerveroient certainement encore plus de vertu que l'Acier ordinaire, mais leurs parties ſont trop infléxibles, & cédent trop difficilement au torrent de matiére magnétique, ils ne s'aimantent donc pas ſi-bien, & acquiérent moins de vertu que l'Acier ordinaire.

Enfin je conclüerai de toutes ces conſidérations & ces expériences, que les armures & le portant d'un Aimant doivent être de Fer, parce qu'étant toûjours proches de l'Aimant, ſes poils ſont facilement retenus dans la même ſituation, & que ſe prêtant à toutes les diſpoſitions, il n'y a aucune partie de la force de l'Aimant employée à les y contraindre; l'Acier dont les parties ſont plus de réſiſtance, ſera moins bon, & l'Acier trempé ſera encore plus mauvais. Comme c'eſt à l'expérience à achever de convaincre dans les choſes qui en ſont ſuſceptibles, je me ſuis aſſûré par des épreuves exactes que le raiſonnement ne m'avoit point trompé, & ayant fait faire à la même Pierre des armures de Fer, d'Acier & d'Acier trempé, les plus égales qu'il a été poſſible, j'ai éprouvé que celles de Fer pur & doux étoient les meilleures, & que les moins bonnes étoient celles d'Acier trempé, la même Pierre ayant conſidérablement moins de force avec ces derniéres qu'avec les premiéres.

Au reſte, s'il y a dans cette opinion quelque hypotheſe qui paroiſſe difficile à admettre, c'eſt l'exiſtence des branches ou poils repandus dans les pores du Fer, mais cela n'eſt point particulier à mon ſyſtême; Deſcartes, & preſque tous les Phyſiciens après lui les ont admis; il eſt vrai que ce n'eſt

qu'une petite portion du ſyſtême de Deſcartes, mais c'eſt la plus ſimple, & celle qui a été le moins combattuë. Ce n'eſt certainement pas rendre cette hypotheſe plus compoſée, ni moins vrai-ſemblable, que de ſuppoſer ces poils aſſés mobiles pour que leur propre poids, ou des ſecouſſes rëitérées les abbattent vers un des bouts du Fer. C'eſt cependant la ſeule ſuppoſition dont j'ai beſoin pour expliquer un grand nombre d'expériences tant anciennes que nouvelles, qui ne l'avoient point été, ou du moins qui l'avoient été très-imparfaitement. Je vais plus loin dans ce ſecond Mémoire, & je déduis de ces expériences, & de mes explications, l'unité du courant de la matiére magnétique; mais ce n'eſt point encore là une ſuppoſition trop hardie, ni même une opinion nouvelle, pluſieurs Phyſiciens l'ont admiſe, à la vérité plûtôt par l'embarras qu'ils trouvoient dans le ſyſtême oppoſé, que par les preuves qu'ils en ont apportées, car je ne crois pas même qu'aucun ait entrepris de déterminer de quel côté alloit le courant; je donne donc ici un nouveau jour à cette hypotheſe, je la fortifie de nouvelles preuves, je réponds aux objections qu'on y a faites, & je détermine que le courant unique de la matiére magnétique doit aller du Sud au Nord. On voit que ce n'eſt point un ſyſtême nouveau que je haſarde, c'eſt celui de tous qui eſt le plus univerſellement reçû que je ne fais que débarraſſer de ce qu'il avoit de plus impliqué, & qui, par l'extrême ſimplicité à laquelle je le réduis, acquiert un nouveau degré de vrai-ſemblance, & je dirois même quelque choſe de plus, s'il étoit permis de ſe ſervir en Phyſique du terme de Démonſtration.



EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIE'ME ORDRE OU COURBES DU TROISIE'ME GENRE.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON ne ſçauroit diſconvenir que la connoiſſance des Lignes courbes ne ſoit un des objets des plus utiles de la Géométrie. Les progrès que les Anciens firent dans les Mathématiques, après avoir reconnu les propriétés des quatre Sections coniques, en ſont des preuves convaincantes. Si ces grands Hommes n'ont pas pouſſé leurs recherches plus loin, s'ils ſe ſont bornés à quatre ou cinq autres Courbes d'un genre plus élevé que les Sections coniques, ce n'eſt pas une preuve qu'ils ayent crû la connoiſſance des Courbes plus compoſées, inutile & infructueuſe : il paroît au contraire, qu'ils en ont ſenti tout le mérite, & qu'ils ont même fait de temps en temps de grands efforts pour y parvenir ; mais ils manquoient de ſecours, je veux dire d'une Méthode qui, portant la lumiére dans les routes obſcures & inconnües qu'il falloit parcourir, conduisît l'eſprit humain ſans lui laiſſer la moindre appréhenſion de s'égarer.

L'application de l'Algébre à la Géométrie, dont on eſt redevable au grand génie de M. Deſcartes ; le Calcul de l'Infini, & toutes les nouvelles découvertes qui y ont rapport, dont les illuſtres Auteurs ont été preſque tous Membres de cette Académie, en faiſant changer de face au Monde géometre, lui ont fourni ſucceſſivement des ſecours qu'il attendoit depuis ſi long-temps ; enfin un des plus illuſtres Membres de cette Compagnie * vient de dévoiler ce qui pouvoit reſter encore d'inconnu ou de myſtérieux dans la théorie des nouvelles Méthodes : en faiſant connoître l'Infini dès

* M. de Fontenelle.

ſon origine, en le ſuivant dans ſes différentes modifications, en l'obligeant, pour ainſi dire, de manifeſter ſes effets les plus cachés, il a non ſeulement affermi les ſecours que la Géométrie avoit déja reçûs, mais il lui en a encore procuré de nouveaux.

Entreprendre un détail de tous les avantages que la Géométrie a reçû depuis près d'un Siécle, ce ſeroit m'écarter de mon ſujet : ainſi, en me renfermant dans les bornes que je me ſuis preſcrites, je me contenterai de rappeller dans la mémoire des Perſonnes qui me font l'honneur de m'entendre, que dès que la Géométrie de M. Deſcartes eût paru, comme elle apprenoit l'art de renfermer dans une ſeule Equation les principales propriétés d'une ou de pluſieurs Courbes, on s'accoûtuma aiſément, avec ce grand homme, à diſtinguer les Courbes en Géométriques, qu'on a nommées depuis *Courbes algébriques* ou *rationnelles*, & en Méchaniques, qu'on a nommées enſuite *Courbes tranſcendantes* ou *algébriquement irrationnelles.*

Les premiéres furent dès-lors diſtinguées en différents ordres, ſelon le degré d'élévation auquel leur Equation ſe trouve élevée. Cette diſtinction eſt connüe de tout le monde, elle a été adoptée par tous les Géometres, & perſonne n'ignore aujourd'hui que la Ligne droite eſt la ſeule Ligne du premier ordre, parce qu'elle eſt la ſeule dont l'Equation ne monte qu'au premier degré ; que les quatre Sections coniques ſont les ſeules Lignes du ſecond ordre, parce qu'elles ſont les ſeules dont les Equations ne montent qu'au ſecond degré.

Il y a cinquante ans qu'on ne connoiſſoit qu'un très-petit nombre de Lignes du troiſiéme ordre ; les deux Paraboles cubiques, la Ciſſoïde de Dioclès, le *Folium* de M. Deſcartes, la Paraboloïde du même M. Deſcartes, & une ſixiéme Courbe, qu'on peut nommer le *ſecond Hyperboliſme parabolique,* étoient, je crois, les ſeules Lignes du troiſiéme ordre dont on eût quelque connoiſſance, lorſque M. le Chevalier Newton publia ſon *Enumération des Lignes du troiſiéme ordre*, l'un des plus beaux & des plus grands ſpectacles que la Géométrie eût

produit depuis long-temps, dans lequel on vit paroître ſur la ſcene ſoixante & douze Courbes juſqu'à lors inconnües aux Sçavants, à l'exception des ſix dont on vient de parler.

Le célébre Géometre Anglois ayant ſupprimé l'Analyſe qui lui avoit ouvert le chemin de cette belle découverte, M. Stirling, autre Géometre de la même Nation, entreprit treize ans après de développer cette Analyſe; il en donna les Principes fondamentaux dans un Ouvrage, intitulé *Illuſtratio Tractatus D. Newtonii de Enumeratione Linearum tertii ordinis,* imprimé à Oxfort en 1717, dans lequel l'Auteur, en faiſant paroître une grande connoiſſance de la Géométrie la plus profonde, & une vaſte étendüe de génie, découvre pluſieurs choſes curieuſes & utiles qui peuvent contribuer infiniment à la théorie des Courbes d'un genre plus élevé.

Enfin M. Nicole a commencé de lire à l'Académie un Traité de ces mêmes Courbes du ſecond genre, ou Lignes du troiſiéme ordre, dans lequel il répand un nouveau jour ſur ce qui fait l'objet de ſon ouvrage, & le traite avec cette dextérité avec laquelle il manie les matiéres les plus épineuſes de la Géométrie.

Je ne ferai pas difficulté d'avoüer ici que j'ai travaillé quelque temps ſur le même ſujet, que mon deſſein étoit de donner un Traité complet des Lignes du troiſiéme ordre, en ſuivant le plan de celui des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & d'y ajoûter une énumération des Lignes du quatriéme ordre. Mais ce Traité ne devant plus avoir les agréments de la nouveauté, après les ouvrages des trois grands Géometres que je viens de nommer, j'ai crû que le ſeul examen des Lignes du quatriéme ordre, ou Courbes du troiſiéme genre, étant une matiére toute nouvelle, pourroit être agréable à l'Académie, & de quelque utilité au Public. Je me ſuis déterminé d'autant plus volontiers à le donner, qu'il m'a paru que pour entendre ce que j'ai à dire ſur les figures, les contours, les différents points, les différentes branches, & les autres propriétés des Lignes du quatriéme ordre, il n'eſt pas abſolument néceſſaire d'avoir une connoiſſance parfaite
de

de celles du troiſiéme, mais qu'il ſuffit d'en connoître les plus ſimples, & de ſçavoir ſeulement l'application de l'Algebre à la Géométrie, & les premiers principes du Calcul différentiel.

Parmi les Courbes dont j'ai à parler dans ce Traité, il y en a quelques-unes, mais en très-petit nombre, qui ſont connües de tous les Géometres : telles ſont trois ou quatre Paraboles & autant d'Hyperboles du quatriéme ordre, dont il eſt parlé dans différents ouvrages des Géometres modernes : telle eſt la Conchoïde de Nicomede, qui eſt en uſage depuis pluſieurs Siécles : telle eſt la Lemniſcate de M.rs Bernoulli, ces deux illuſtres Freres, dont les noms ſemblent devoir ſubſiſter auſſi long-temps que la Géométrie : telle eſt enfin une eſpece d'Hyperbole du quatriéme ordre que M. Stirling a décrit dans l'ouvrage que j'ai déja cité.

On a encore quelque choſe de plus ſur cette matiére, je veux parler du ſçavant Traité de M. Mac-Laurin, Profeſſeur de Mathématique dans le nouveau College d'Abreden, & Membre de la Société Royale de Londres, auquel trois Théoremes, publiés par M. Newton à la fin de ſon Enumération des Lignes du troiſiéme ordre, ont donné naiſſance.

Cet illuſtre Géometre annonça au Public en 1704 une Méthode pour décrire par un mouvement continu, non ſeulement les quatre Sections coniques, mais encore toutes les Lignes algébriques qui ont ce qu'on appelle des *points doubles*, c'eſt-à-dire, des points par leſquels la Courbe paſſe deux fois : M. Newton nommoit particuliérement les Lignes du troiſiéme & du quatriéme ordre, qui ont des points doubles, mais il ſe contentoit d'annoncer cette belle Méthode ſans en donner la démonſtration ni par l'analyſe, ni par la ſyntheſe. Quelques perſonnes, pour leſquelles j'avois une extrême déférence, m'engagerent en 1708 à chercher ce que M. Newton avoit jugé à propos de cacher aux yeux du Public : j'eus le bonheur de réüſſir, & l'on fit imprimer mon Analyſe dans le Supplément du Journal des Sçavants du dernier Septembre 1708. Mais en donnant la démonſtration analytique de la Méthode de M. Newton, pour décrire par un

mouvement continu les Courbes algébriques qui ont des points doubles, je me contentai de faire voir que par le moyen des deux formules générales, auxquelles se réduisoit ma démonstration, on pouvoit trouver aisément les Equations des Lignes du troisiéme & du quatriéme ordre qui ont des points doubles, & je n'entrai dans aucun détail : les Etudes & les occupations auxquelles j'étois obligé de vaquer par rapport à mon état, ne m'ayant pas laissé le loisir de développer les conséquence de cette Analyse, qui m'auroient fourni la matiére d'un juste volume.

Ce que je n'avois pû exécuter en 1708, l'a été depuis, par M. Mac-Laurin, d'une maniére si avantageuse à la Géométrie, qu'on peut dire qu'elle y a gagné considérablement : car en travaillant sur cette matiére en 1708, je ne pensois qu'à la description des Courbes qui ont des points doubles ou triples, n'ayant alors d'autres vûës que de découvrir le secret de M. Newton, au lieu que M. Mac-Laurin, dans son Traité imprimé à Londres en 1720, sous le titre de *Geometria organica*, s'est attaché non-seulement à donner les démonstrations analytique des Théoremes de M. Newton, mais encore à imaginer une méthode de décrire par des mouvements continus les Lignes algébriques qui n'ont pas des points doubles, & principalement celles du troisiéme & du quatriéme ordre, ce que M. Newton avoit jugé très-difficile à exécuter commodément : *Nam Curvam aliquam*, disoit ce grand Géometre, *secundi vel tertii generis punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Ainsi on doit regarder M. Mac-Laurin comme le Géometre qui a le plus manié les Lignes du quatriéme ordre, sans cependant avoir eû le dessein de les faire connoître en détail, d'éxaminer leurs especes particuliéres, & de faire remarquer en quoi elles différent les unes des autres : il semble même avoir voulu prévenir sur cela les Lecteurs les moins attentifs ; car à la fin de la troisiéme Section de sa premiére Partie, après avoir dit que le nombre des Lignes du quatriéme ordre est très-considérable, & qu'il y a bien du travail à

essuyer pour les faire connoître, il ajoûte qu'il y a lieu néantmoins d'espérer qu'elles ne resteront pas inconnuës aussi longtemps que celles du troisiéme ordre, vû le grand nombre d'habiles gens qui s'appliquent aujourd'hui à la Géométrie: *Sed his sæculis, quibus felicissimo virorum doctorum studio artes ac disciplinæ omnes elegantiores ac præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti ordinis non tam diù latere posse, extra definitos Geometriæ limites, quam priùs latuerunt eæ ordinis proximè inferioris, non ita pridem ab ipso Geometrarum principe in lucem proditæ.*

J'ai donc crû pouvoir me flater que cet examen des Lignes du quatriéme ordre auroit au moins les agréments de la nouveauté, & cela avec d'autant plus de raison que ce Traité n'a nul rapport avec l'ouvrage de M. Mac-Laurin, ni avec l'Analyse que je donnai en 1708 des Théoremes de M. Newton. En effet il ne s'agit pas ici d'examiner les Lignes particuliéres du quatriéme ordre qui naissent de tel ou tel mouvement continu & organique, mais d'aller, pour ainsi dire, chercher les Lignes de cet ordre jusques dans leurs sources, d'en faire connoître les différentes classes & les différentes especes, & ensuite d'en déduire les principales propriétés par le moyen de l'Analyse ordinaire aidée de l'Analyse de l'Infini.

J'aurois souhaité pouvoir abréger cet examen, mais la crainte de devenir obscur, en voulant être court, m'a retenu: outre cela il auroit fallu supprimer quantité de Théoremes nouveaux, utiles & curieux. Ainsi mon ouvrage étant beaucoup plus long que ne sont ceux qu'on lit ordinairement dans les Assemblées de l'Académie, je me vois dans la nécessité de le diviser en plusieurs Sections, & les Sections en différents Mémoires propres à être lûs dans les Assemblées de l'Académie. La premiére, qui sera divisée en quatre ou cinq Mémoires, contiendra les Principes fondamentaux de tout l'ouvrage.

SECTION PREMIE'RE.

Principes fondamentaux de l'Examen des Lignes du quatriéme ordre.

PREMIER ME'MOIRE.

DÉFINITIONS ET EXPLICATIONS.

I.

I. Toutes les Courbes algébriques, de quelque genre qu'elles puissent être, rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini. Celles qui rentrent en elles-mêmes peuvent être appellées *Ovales*, d'un nom générique dont je demande la permission de me servir, quoique quelques-unes de ces Courbes ne ressemblent gueres à des Ovales ordinaires, mais c'est afin de pouvoir les distinguer par un seul mot de celles qui s'étendent à l'infini. Ces *Ovales* sont ou simples comme l'Ellipse ordinaire, qui est une Ovale du premier genre, ou composées comme sont presque toutes les Lignes du quatriéme ordre qui rentrent en elles-mêmes, & parmi ces Ovales composées il y en a qui se noüent en forme de ruban, & on les appelle des *Lemniscates*, nom qui leur a été imposé par les illustres Géometres de Bâle dont j'ai parlé ci-devant.

I I.

II. Les Courbes qui s'étendent à l'infini, peuvent être nommées par abréviation *Courbes* ou *Lignes infinies*, & parmi celles-ci il y en a que j'appelle *Courbes simples*, & d'autres *Courbes composées*. Les premiéres sont celles qui n'ont que des branches infinies en nombre pair : les *composées* sont celles qui outre leurs branches infinies, toûjours en nombre pair, ont encore des *Ovales* simples ou composées, ou des *Lemniscates*, qui font partie des mêmes Courbes, lesquelles quoique séparées, sur le plan, des branches infinies dont nous venons de parler, ne laissent pas de leur être unies par les liens secrets de l'Equation algébrique qui exprime la nature de la

totalité de la Courbe ; ces portions ainſi détachées, ſur le plan, des branches infinies de la Courbe à laquelle elles appartiennent, ſeront nommées ici *Ovales* ou *Lemniſcates conjuguées*. Il y a des cas où ces Ovales deviennent infiniment petites, & ſe réduiſent en un point, alors on le nomme par la même raiſon le *Point conjugué :* dans d'autres cas l'Ovale, au lieu d'être conjuguée, eſt unie avec deux des branches infinies de la Courbe, alors on la nomme le *Folium* de cette Courbe, & le point où ſe fait cette union eſt dit le *Nœud*, & ce Nœud eſt toûjours un *point double* de la Courbe.

III.

III. Les Courbes infinies, ſoit qu'elles ſoient ſimples, ſoit qu'elles ſoient compoſées, ſont ou *Paraboliques*, ou *Hyperboliques*, ou *Parabolo-hyperboliques :* les premiéres ſont celles dont toutes les branches infinies n'ont point d'*Aſymptotes rectilignes ;* les ſecondes, celles dont toutes les branches ont des Aſymptotes rectilignes, & les derniéres, celles dont certaines branches infinies, toûjours en nombre pair, n'ont pas d'Aſymptotes rectilignes, tandis que les autres branches infinies de la même Courbe, auſſi en nombre pair, ont des Aſymptotes rectilignes.

REMARQUE.

IV. Je me ſers ici du nom d'*Aſymptotes rectilignes* pour éviter un équivoque qui pourroit cauſer quelque obſcurité dans la ſuite, ſi je ne prenois la précaution d'en avertir. Toutes les Courbes qui s'étendent à l'infini, ont toûjours des Aſymptotes, mais ces Aſymptotes ſont ou des Lignes courbes ou des Lignes droites, & on en trouve la nature & la poſition, en réduiſant l'équation de la Courbe qu'on examine en une ou pluſieurs ſuites d'autant plus convergentes que l'Abſciſſe eſt grande ; & cette Méthode, qui eſt une des plus belles découvertes de ces derniers temps, eſt d'une très-grande utilité pour découvrir les différentes branches infinies des Courbes d'un genre élevé par le moyen des Courbes d'un genre moins élevé, ou au moins plus ſimple.

Les Branches infinies, dont les Aſymptotes ſont rectilignes, ſont donc nommées *Branches hyperboliques*, & celles qui ont des Aſymptotes curvilignes, ſont nommées *Branches paraboliques*. Un ſeul exemple éclaircira ceci : La Paraboloïde de M. Deſcartes, qui eſt une Ligne parabolo-hyperbolique du troiſiéme ordre, eſt compoſée, comme tout le monde ſçait, de quatre branches infinies, dont deux ſont hyperboliques, puiſqu'elles ont une Ligne droite pour Aſymptote, les deux autres ſont paraboliques, n'ayant pas d'Aſymptotes rectilignes ; mais ces deux branches paraboliques ont pour Aſymptote une *Parabole conique*, ou Parabole ordinaire, de laquelle elles s'approchent toûjours de plus en plus en allant à l'infini, de même que les branches hyperboliques s'approchent toûjours & à l'infini de la Ligne droite, qui eſt leur Aſymptote.

DÉFINITIONS.

IV.

* Figure 1. V. Si l'on tire une ligne AP *, parallele à la tangente NT d'une parabole ou d'une hyperbole conique quelconque $MNGm$, dont GH (par exemple) ſoit l'axe, la courbe $MNGm$, après s'être approchée de la ligne droite AP de M en N, s'éloigne pendant tout le reſte de ſon cours, qui eſt infini, de la ligne droite AP, en allant de N en G & en m : cela eſt démontré. Il n'en eſt pas de même des lignes d'un ordre ſupérieur, il y en a, qui après s'être approchée de la ligne droite AP * de M en N, s'éloignent de cette même droite, en allant de N en O, & enſuite s'en rapprochent une ſeconde fois, en allant de O en q, après quoi elles s'éloignent une ſeconde fois, en allant de q en V, puis s'en rapprochent une troiſiéme fois, & cela à pluſieurs repriſes, ſuivant le degré auquel elles ſont élevées : c'eſt ce que l'on voit arriver ſouvent aux lignes du quatriéme ordre ; ainſi pour exprimer par un ſeul mot ces différents contours, je les nomme des *ſinuoſités*, enſorte que MNO eſt une ſinuoſité, NOq eſt une ſeconde ſinuoſité, OqV une troiſiéme ſinuoſité, & ainſi des

* Fig. 2.

autres : d'où il suit que les points *N*, *O*, *q*, seront nommés les sommets des sinuosités, *N* le sommet de la premiére, *O* le sommet de la seconde, & *q* le sommet de la troisiéme.

V.

VI. Lorsqu'une ligne courbe *ZMN* * est en partie concave & en partie convexe vers une même ligne droite *AP*, le point *N* de cette courbe qui sépare la partie concave de la partie convexe est nommé, comme tout le monde sçait, le *point d'infléxion de la courbe*. * Fig. 3.

VI.

VII. Par les définitions donnés du *folium* & du *nœud*, il est évident que si le *folium* d'une courbe devient infiniment petit, le nœud de ce *folium* se change en un point que les Géometres modernes ont nommé *point de rebroussement*. En effet, soit *ZMmDMN* * une courbe foliée quelconque, dans laquelle la droite *MD* soit ce que je nomme la mesure du *folium*, & *M* le nœud : il est visible que ce nœud demeurant fixe en *M*, si la droite *MD* diminüe continuellement jusqu'à devenir infiniment petite, il est visible, dis-je, que le *folium* diminüe continuellement jusqu'à devenir infiniment petit, & enfin que tout le *folium* se confond avec le point *M*, & que la courbe *ZMmDMN* prend la figure de la courbe *ZMN* qui a un point de rebroussement en *M* *. D'où il suit que tout point de rebroussement peut être considéré comme le nœud d'un *folium* infiniment petit. * Fig. 4. * Fig. 5.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos d'avertir ici de deux choses. 1.° Que nous nommons point de rebroussement *ce que M. Newton & les autres Géometres Anglois ont nommé* cuspis : *que ces Géometres appellent* nodus *ce que nous nommons le* folium, *& qu'ils donnent le nom de* decussatio *au point que nous appellons le* nœud. *J'ai crû devoir retenir les dénominations qui étoient en usage parmi les Géometres François avant que M. Newton eût écrit sur cette matiére.*

2.° *Que quoique nous considérions ici le point de rebroussement*

comme le nœud d'un folium infiniment petit, nous ne prétendons pas dire qu'il ne puiſſe être conſidéré que de cette façon, car il eſt bien certain qu'on peut le regarder comme la réünion de deux
* Fig. 6. *points d'infléxion* N *&* M, *dont l'intervalle* N M * *eſt devenuë infiniment petite. En effet ſoit la parabole campaniforme de M. Newton* Z N D M X, *dont la nature eſt exprimée par l'équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$ *(dans laquelle* $DP = x$ *&* $PZ = y$) *il eſt conſtant que cette courbe a deux infléxions* N *&* M, *qui ſe font parallelement à l'ordonnée principale* D L; *ſi l'on prend ſur cette ordonnée principale la portion* $DR = a$ *& ſur l'axe* D P *de part & d'autre du point* D *les portions* D B, D b, *égales l'une & l'autre à* $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, *& que par les points* B *&* b *on mene les droites* B N, b M, *paralleles à* D L, *les points* N *&* M *où ces droites ſeront rencontrées par une autre droite* R N, *menée parallelement à l'axe par le point* R, *& de part & d'autre de ce point; ces points, dis-je,* N *&* M *ſeront les deux points d'infléxion de la courbe* Z N D M X; *mais ſi l'on ſuppoſe maintenant* $DR (a) = 0$, *il eſt viſible que cette courbe* Z N D M X
* Fig. 7. *ſe change en une ſeconde parabole cubique* Z N X *, *puiſque ſon équation* $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$, *par la ſuppoſition de* $a = 0$, *devient* $y^3 = bxx$, *qui eſt celle qui convient à la courbe qu'on nomme* ſeconde parabole cubique, *laquelle a un point de rebrouſſement à ſon ſommet* N.

REMARQUES.

* Fig. 2. VIII. Le rapport entre les abſciſſes *AC* & les ordonnées *EC* d'une ligne droite quelconque *SEMe*, dont *AP* eſt l'axe, étant donné en termes analytiques, il eſt conſtant 1.° que ſi cette droite coupe en *m* & en *M* & en tout autre point la courbe Z*MN*, dont *AP* ſoit l'axe, & dont les ordonnées *MP* ſoient paralleles aux ordonnées *EC* de la droite *SEMe*, il eſt conſtant, dis-je, que le point d'interſection *M* étant commun à la droite & à la courbe, l'abſciſſe *AB* qui lui correſpond eſt commune à la droite & à la courbe, à cauſe de l'axe commun *AP*. Il en eſt de même de tout autre

autre point d'interſection *M* de la droite *SMe* & de la courbe *ZMN*, l'abſciſſe *AP* qui lui correſpond eſt commune à la droite & à la courbe.

2.° Tous les Géometres conviennent que le ſimple point d'attouchement *M* * eſt équivalent à deux points d'interſection infiniment près l'un de l'autre; ainſi, la droite *SMe* étant ſuppoſée tangente en *M* de la courbe *ZMN*, il eſt clair que l'abſciſſe *AP* eſt deux fois commune à la droite *SMe* & à la courbe *ZMN*. * Fig. 3.

3.° Puiſqu'il eſt évident * qu'une tangente *SN* en un point d'infléxion *N* * touche & coupe la courbe *MN* en ce même point *N*, il eſt viſible qu'en abbaiſſant de ce point *N* ſur l'axe *AP* l'ordonnée *NB*, l'abſciſſe *AB* correſpondante au point d'infléxion, doit être trois fois commune à la droite *SNe* & à la courbe *MN*. * *Art. 8.* * Fig. 8.

4.° Soit ſuppoſée la droite *SNM*, tangente au point d'infléxion *N* d'une courbe *ZMNX* *, & en même temps ſécante de cette courbe en un autre point *M*, diſtant du point d'infléxion de la grandeur *NM*; ſi cette diſtance *NM* devient infiniment petite, la droite *SNM* redevient ſimple tangente de la courbe au point *N* *, mais ſon attouchement eſt équivalent à quatre points d'interſection, ou à deux points d'attouchement infiniment près l'un de l'autre, & l'infléxion ne paroît plus, quoiqu'elle exiſte réellement dans un eſpace infiniment petit, ce qui pourroit faire donner à ces ſortes de points le nom d'*infléxion inviſible*, ou celui d'*infléxion de la ſeconde eſpece*. * Fig. id. * Fig. 9.

5.° Soit ſuppoſée la droite *SN2Me*, tangente en une infléxion de la ſeconde eſpece *N* d'une courbe *Z2MNX*, & en même temps ſécante de cette courbe en un autre point *2M*, diſtant du point d'infléxion inviſible de la grandeur *2MN*; ſi cette diſtance *2MN* devient infiniment petite, il eſt évident que la droite *SN2M* *, de ſimple tangente qu'elle étoit, redevient tangente & ſécante de la courbe *ZNX* en un même point *N*, & par conſéquent qu'en ce point *N* il y a une infléxion inviſible & une infléxion viſible : * Fig. 10.

pour le diſtinguer des autres points d'infléxions dont on a parlé dans l'article 6, je le nommerai *infléxion de la troiſiéme eſpece.*

* Fig. 10. 6.° Si la droite $SN3M$* eſt ſuppoſée tangente de la courbe ZNX en une infléxion de la troiſiéme eſpece N, & ſécante de la même courbe en un autre point $3M$, diſtant de l'infléxion N de la grandeur $3MN$; il eſt clair, que cette diſtance $3MN$ devenant infiniment petite, la droite

* Fig. 11. $SN3M$ redevient ſimple tangente de la courbe au point N*, mais ſon attouchement eſt équivalent à ſix points d'interſection infiniment près les uns des autres, enſorte qu'en ce point N il y a conſécutivement deux infléxions inviſibles dans un eſpace infiniment petit : pour la diſtinguer de celle du nombre 4 de cet article, je la nomme *infléxion de la quatriéme eſpece.*

7.° On peut s'aſſûrer ainſi que les courbes ont des infléxions de la 5me, 6me, 7me & 8me eſpece, &c. qui ſont alternativement viſibles & inviſibles ; enſorte que toutes les fois qu'un attouchement eſt équivalent à un nombre d'interſections impair, cet attouchement ſe fait en une infléxion viſible : mais lorſque l'attouchement eſt équivalent à un nombre d'interſections pair, plus grand que deux, cet attouchement ſe fait en une infléxion inviſible.

COROLLAIRE I.

IX. Il ſuit des nombres 4, 5 & 6 de l'article précédent, qu'en abbaiſſant des points d'infléxion N* de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece ſur l'axe AP des ordonnées comme NB, il ſuit, dis-je, que l'abſciſſe AB qui en réſulte, eſt 1.° une abſciſſe quatre fois commune à la tangente SN & à la courbe $XN2MZ$, ſi le point N eſt une infléxion de la ſeconde eſpece. 2.° Que cette abſciſſe AB eſt cinq fois commune à la droite & à la courbe, ſi le point N eſt une infléxion de la troiſiéme eſpece. 3.° Que cette abſciſſe AB eſt ſix fois commune à la droite & à la courbe, ſi le point N eſt une infléxion de la quatriéme

* Fig. 9. 10. & 11.

eſpece, & ainſi des autres infléxions d'eſpeces ſupérieures.

COROLLAIRE II.

X. Si d'un point ſimple *N**, ou d'un point d'infléxion *N*** d'eſpece quelconque, on abbaiſſe ſur l'ordonnée principale *AL* une droite *NE* parallele à l'axe *AB*, qui ſoit ſécante de la courbe en *N*, il eſt viſible que l'abſciſſe *AE* n'eſt qu'une ſeule fois commune à la ſécante *BN* & à la courbe *XN2MZ*, & que l'abſciſſe *AB* n'eſt qu'une ſeule fois commune à la ſécante *EN* & à la courbe *XN2MZ*, ſoit que le point *N* ſoit une infléxion de la premiére, ſeconde, troiſiéme & quatriéme eſpece, ou d'une eſpece ſupérieure.

* Fig. 3.

** Fig. 9. 10. & 11.

DÉFINITIONS.

VII.

XI. Lorſqu'une courbe ne paſſe qu'une ſeule fois par un point quelconque *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point, en tant qu'il appartient à la courbe, n'eſt qu'un *point ſimple*. Ainſi toutes les infléxions viſibles & inviſibles, ſoit qu'elles ſoient de la premiére, ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece, &c. ne ſont jamais que des points ſimples.

VIII.

XII. Lorſqu'une courbe, ſoit qu'elle s'étende à l'infini, ſoit qu'elle rentre en elle-même, paſſe deux fois par le même point *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M*, en tant qu'il appartient à la courbe, eſt un *point double*. Ainſi, 1.° Tous les ſimples nœuds, ou points d'interſection de deux branches, ſont des points doubles. 2.° Puiſque le point de rebrouſſement* peut être pris pour le *nœud* d'un *folium* infiniment petit, il s'enſuit que le rebrouſſement d'une courbe eſt un point double. 3.° Le point conjugué n'étant autre choſe qu'une ovale infiniment petite, il s'enſuit que le point conjugué doit être mis au rang des points doubles.

* Fig. 4. & 5.

* *Art. 7.*

IX.

XIII. Lorſqu'une courbe paſſe trois fois par le même point *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M*,

* Fig. 12. & 13.

en tant qu'il appartient à la courbe, eſt un *point triple.* Ainſi, 1.° tous les nœuds d'une courbe par leſquels il paſſe une troiſiéme branche de la même courbe ſont des points triples. 2.° Le rebrouſſement d'une courbe étant le nœud d'un *folium* infiniment petit*, il eſt évident que le rebrouſſement d'une courbe quelconque devient un point triple, lorſqu'il paſſe par ce point de rebrouſſement une troiſiéme branche de la même courbe. 3.° L'ovale infiniment petite étant un point double, lorſqu'une ovale infiniment petite eſt adhérante à une branche de la courbe, il eſt évident qu'elle doit former un point triple dans l'endroit où elle eſt adhérante à la courbe. Cette derniére eſpece de point triple ſera nommé *point triple invisible,* parce que l'on ne voit point, lorſque la courbe eſt décrite ſur le plan, ce qui cauſe ſa *triplicité,* l'ovale infiniment petite étant, pour ainſi dire, inviſible.

* Art. 7.

X.

XIV. Lorſqu'une courbe paſſe quatre fois par le même point *M** du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M* eſt nommé *point quadruple.* Si elle paſſe cinq fois par le même point *M* du plan ſur lequel elle eſt décrite, ce point *M,* en tant qu'il appartient à la courbe, eſt nommé *point quintuple,* & ainſi des autres points multiples à l'infini.

* Fig. 16.

X I.

XV. S'il arrive qu'une des branches *DMN**, qui forment en *M* un point double, a une infléxion en ce même point *M,* ce point double eſt nommé *point double de la ſeconde eſpece.* Si les deux branches *DMN, DMZ**, qui forment le point double *M,* ont l'une & l'autre une infléxion au point *M,* ce point double eſt nommé *point double de la troiſiéme eſpece;* au lieu que le point double *M**, auquel les branches *DMN, DMZ,* n'ont aucune infléxion, eſt nommé *point double de la premiére eſpece.*

* Fig. 14.

* Fig. 15.

* Fig. 4.

X I I.

XVI. Lorſqu'une des trois branches, dont l'interſection forme le point triple, a une infléxion au point *M,* où ſe fait cette interſection, ce point triple eſt nommé *point triple de*

*la seconde espece**. Lorsque deux de ces branches ont chacune une infléxion en *M*, où se fait l'intersection des trois branches ce point triple est nommé *point triple de la troisiéme espece**. Enfin lorsque les trois branches, dont l'intersection commune forme le point triple, ont les unes & les autres un point d'infléxion en *M*, où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de la quatriéme espece**, au lieu que le point triple *M**, auquel les branches *DMN*, *DMm*, *ZMV*, n'ont aucune infléxion, est nommé *point triple de la premiére espece*.

* Fig. 17.
* Fig. 18.
* Fig. 19.
* Fig. 12.

SCHOLIE.

XVII. Il est aisé de conclurre des définitions précédentes, 1.° Que, parmi les points quadruples, il y a cinq especes d'intersections. *La premiére espece* est lorsque les quatre branches, qui se coupent en *M*, n'ont aucune infléxion en ce même point *M*. *La seconde espece* est celle où une seule des quatre branches a une infléxion au point *M* où se fait l'intersection. *La troisiéme espece* est celle où deux des quatre branches ont chacune une infléxion au point même de l'intersection. *La quatriéme espece* est celle où trois branches ont chacune une infléxion précisément au point où se fait l'intersection. Enfin les points quadruples *de la cinquiéme espece* sont ceux où les quatre branches, qui se coupent en *M*, ont les unes & les autres des infléxions en ce même point *M*.

2.° On peut connoître aussi facilement ce que c'est qu'un point quintuple, & voir en même temps qu'il y a *six especes* d'intersections parmi les points quintuples, les unes sans infléxion, les autres avec une seule infléxion, les *troisiémes* avec deux infléxions, les *quatriémes* avec trois infléxions, les *cinquiémes* avec quatre infléxions, & les *sixiémes* avec cinq infléxions.

COROLLAIRE I.

XVIII. Il suit des définitions données des points doubles, triples, quadruples, & des autres points multiples, qu'après avoir mené par un point multiple quelconque *M* deux secantes

Fig. 4. & 5.

12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. & 19. *MB, ME,* faiſant entr'elles un angle quelconque *BME,* & prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent en *B* & en *E* des droites, comme *AP* & *AL,* priſes la premiére pour l'axe, & la ſeconde pour l'ordonnée principale de la courbe à laquelle le point multiple *M* appartient ; il ſuit, dis-je, des définitions précédentes, 1.° Que l'abſciſſe *AB* eſt deux fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *ZMDMN,* & l'abſciſſe *AE* auſſi deux fois commune à la ſecante *BM* & à la même courbe *ZMDMN,* ſi le point *M* eſt un point double. 2.° Que *AB* eſt une abſciſſe trois fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *NMDMmZMV,* & *AE* une abſciſſe trois fois commune à la ſecante *BM* & à la même courbe *NMDMmZMV,* ſi le point multiple *M* eſt un point triple. 3.° Que *AB* eſt une abſciſſe quatre fois commune à la ſecante *EM* & à la courbe *VMDMNZM3VZM2V,* & *AE* une abſciſſe quatre fois commune à la ſécante *BM* & à la même courbe *VMDMNZM3VZM2V,* ſi le point multiple *M* eſt un point quadruple, & ainſi des autres points multiples ſupérieurs.

COROLLAIRE II.

XIX. Toutes choſes demeurant les mêmes comme dans l'article précédent, ſi par un point multiple quelconque *M,* on mene une tangente *MT,* il eſt viſible, 1.° Que l'abſciſſe *AB* ſera trois fois commune à la tangente *TM* & à la courbe *ZMDMN,* ſi le point *M* eſt un point double de la premiére eſpece*, ou un point double accompagné de rebrouſſement*. 2.° Que *AB* eſt une abſciſſe quatre fois commune à la tangente *TM* & à la courbe, ſi le point multiple *M* eſt un point triple de la premiére eſpece*, ou un point triple accompagné de rebrouſſement*, ou un point triple inviſible*, ou un point double de la ſeconde ou troiſiéme eſpece*. 3.° Que *AB* eſt une abſciſſe cinq fois commune à la tangente *TM* & à la courbe**, ſi le point multiple *M* eſt un point quadruple de la premiére eſpece, ou un point quadruple accompagné de rebrouſſement, ou un point triple de la

* Fig. 4.
* Fig. 5.
* Fig. 12.
* Fig. 13.
* Fig. 40.
* Fig. 14. & 15.
** Fig. 16.

ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece *, & ainſi des autres points multiples d'un ordre ſupérieur. * Fig. 17. 18. & 19.

COROLLAIRE III.

XX. Il n'eſt pas moins évident, 1.° Qu'en un point double *M*, formé par l'interſection de deux branches finies ou infinies d'une même courbe *, il doit y avoir deux tangentes *MT, Mt,* faiſant entr'elles un angle quelconque *TMt.* 2.° Qu'en un point double formé par le rebrouſſement *M* d'une courbe *ZMN* *, il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *MT.* En effet ſi la droite *TM* eſt tangente en *M* de la branche *ZM,* elle doit être tangente en ce même point *M* de la branche *NM,* quand *M* eſt un point de rebrouſſement : car les deux derniers éléments ou côtés infiniment petits des branches *ZM, NM,* ſont exactement poſés l'un ſur l'autre au point de rebrouſſement, ainſi que M. de Fontenelle l'a démontré, art. 835, 836 & ſuivants, *des Eléments de la Géométrie de l'Infini.* D'où il ſuit que la tangente de l'extrémité de la branche *ZM* ſe confond avec la tangente de l'extrémité de la branche *NM,* & par conſéquent qu'en un point double *M,* formé par le rebrouſſement d'une courbe *ZMN,* il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *TM.* 3.° Il ſuit encore des définitions & des corollaires précédents, qu'en un point double * formé par une ovale infiniment petite, il ne ſçauroit y avoir de tangente : car les tangentes n'étant que des prolongements de côtés infiniment petits du premier ordre d'une branche de courbe quelconque, ſi par le point double *M* d'une courbe *ZNCnZ* il ne paſſe aucune branche finie ou infinie de cette courbe *ZNCnZ*, mais ſeulement une ovale infiniment petite, il eſt clair qu'il ne ſçauroit y avoir en ce point *M* de prolongement d'un côté infiniment petit du premier ordre d'une branche quelconque finie ou infinie, & par conſéquent que l'expreſſion générale des ſoûtangentes de la courbe *ZNCnZ* ne doit fournir que des valeurs imaginaires au point double *M,* quand ce point double eſt une ovale infiniment petite.

* Fig. 4.

* Fig. 5.

* Fig. 20.

REMARQUES.

XXI. De-là naît la différence qui eſt entre les points doubles qui ſont formés par l'interſection de deux branches d'une même courbe *ZMDMN*, ceux qui ſont formés par le rebrouſſement *M* d'une courbe *ZMN*, & ceux qui ſont formés par une ovale infiniment petite, ou point conjugué

* Fig. 4. *M* d'une courbe *ZNCnZ*; les points d'interſection * ont toûjours deux tangentes *TM*, *tM*, faiſant entr'elles un angle

* Fig. 5. fini *TMt*: les points de rebrouſſement * n'en ont qu'une, &

* Fig. 20. les ovales infiniment petites * ou points conjugués *M* n'en

* *Art. préced.* ont que d'imaginaires *.

On peut voir encore la différence qui eſt entre les points doubles d'interſection de la premiére, ſeconde & troiſiéme

* Fig. 4. eſpece. Ceux de la premiére eſpece * ſont tels que l'abſciſſe *AB* n'eſt que trois fois commune à la courbe *ZMDMN* & à la tangente *TM*, auſſi-bien qu'à cette courbe & à la

* *Art. 19. n. 1.* tangente *tM* *. Ceux de la ſeconde eſpece ** ſont tels que

** Fig. 14. l'abſciſſe *AB* n'étant que trois fois commune à la courbe & à une des tangente comme *tM*, cette même abſciſſe eſt quatre fois commune à la même courbe & à l'autre tangente comme

* *Art. id. n. 2.* *TM* *. Les points d'interſection de la troiſiéme eſpece ** ſont

** Fig. 15. tels que l'abſciſſe *AB* eſt quatre fois commune à la courbe

* *Art. id. n. 2.* & aux deux tangentes *TM* & *tM* *.

COROLLAIRE IV.

* Fig. 12. XXII. Il eſt viſible, 1.° Qu'en un point triple *M* *, formé par l'interſection des trois branches de la courbe *NMDMmZMV*, il doit y avoir trois tangentes *TM*, *tM*, *θM*.

* Fig. 13. 2.° Qu'en un point triple *M* d'une courbe *NMmZMV* *, où il y a un point de rebrouſſement, il ne ſçauroit y avoir que deux tangentes *TM*, *tM*, puiſque les tangentes au point *M* des branches *NM*, *mM*, ſe confondent en une. 3.° Qu'en un point triple *M*, formé par l'adhéſion d'une

* Fig. 40. ovale infiniment petite ſur une branche *ZMA* * d'une courbe *VNAMZ*, il ne ſçauroit y avoir qu'une ſeule tangente *TM*,

les

les deux autres devenant imaginaires à cause de l'ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXIII. De-là naît la différence qui est entre un point triple formé par l'intersection de trois branches, le point triple accompagné de rebroussement, & le point triple formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite.

On voit aussi la différence qui est entre les points triples de la premiére, seconde, troisiéme & quatriéme espece. Dans les points triples de la premiére espece*, l'abscisse AB est quatre fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à chacune des tangentes TM, tM, θM, prises séparément*. * Fig. 12. * Art. 19. n. 2.

Dans les points triples de la seconde espece*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$*, & à une des trois tangentes comme TM, à cause du point d'infléxion M de la branche DMN, tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $DMNMmZMV$, & aux deux autres tangentes tM, θM, prises séparément. * Fig. 17. * Art. id. n. 3.

Dans les points triples de la troisiéme espece*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à deux des tangentes au point M comme TM & tM, à cause du point d'infléxion M de la branche DMN, & du point d'infléxion M de la branche DMm, tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à la troisiéme tangente θM*. * Fig. 18. * Art. id. n. id.

Dans les points triples de la quatriéme espece*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$ & aux trois tangentes TM, tM, θM, puisque chaque branche qui passe par le point triple M, a une infléxion en ce même point M*. * Fig. 19. * Art. id. n. id.

AVERTISSEMENT.

De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une Théorie générale pour les autres points multiples, tels que sont les

points quadruples, quintuples, sextuples, &c. Mais comme les lignes du quatriéme ordre dont j'ai à traiter ici, ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde, troisiéme & quatriéme espece, ni points quadruples, ni points quintuples ; en un mot, comme les lignes du quatriéme ordre ne peuvent avoir que des points simples, ou des points doubles de la premiére, seconde & troisiéme espece, ou au plus un seul point triple de la premiere espece, je m'abstiens de pousser cette recherche plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire toutes les conséquences qui suivent des principes que l'on vient d'établir ; il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire, pour en faire un détail exact.

DÉFINITIONS.

XIII.

XXIV. Si n est un nombre entier & positif, & qu'on éleve une quantité variable & inconnuë t d'abord à l'exposant n, ensuite à l'exposant $n-1$, puis à l'exposant $n-2$, & ainsi de suite jusqu'à l'exposant 0 ; si l'on unit ces différentes puissances de l'inconnuë t les unes aux autres par les signes $+$ ou $-$, en donnant à chaque terme un coëfficient constant, mais indéterminé, on formera ce que je nomme *grandeurs completes du degré* n. Par exemple, n étant $=2$, si l'on éleve la variable t d'abord à l'exposant 2, puis à l'exposant 1, ensuite à l'exposant 0, & qu'on unisse ces trois puissances t^2, t^1, t^0, par les signes $+$ ou $-$, en multipliant le premier terme par le coëfficient constant β, le second par le coëfficient constant γ, le troisiéme par le coëfficient constant δ, pour avoir $\beta t^2 \pm \gamma t \pm \delta$, cette formule sera une grandeur complete du second degré; de même la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu$ est une grandeur complete du troisiéme degré, & celle ci $\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varsigma t + \sigma$ est une grandeur complete du quatriéme degré, & ainsi de suite, ensorte que $At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} + Dt^{n-3} + Et^{n-4}$ $+$ &c. est une grandeur complete du degré n : par la même raison $qt + a$ est une grandeur complete du premier

degré, & $t^0 = 1$ est en ce sens une grandeur complete du degré o.

XIV.

XXV. Lorsqu'il manque quelques termes dans les formules précédentes, je les nomme *grandeurs incompletes de tel ou tel degré*, quand l'occasion se présente d'en parler ; ainsi la formule $\varepsilon t^3 + \mu$ & la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \mu$ sont des grandeurs incompletes du troisiéme degré, parce qu'il manque à la premiére les termes ηt^2 & λt, & à la seconde le terme λt.

LEMME I.

XXVI. *Les deux suites marquées ici par* (A) *& par* (B), *dont la premiére est celle des grandeurs completes de la variable* t, *qui sont depuis* o *jusqu'à* n, *& la seconde celle des puissances descendentes depuis* n *jusqu'à* o, *d'une autre variable* s ; *les deux suites, dis-je,* (A) *&* (B) *étant arrangées en ordre, comme on les voit ici,*

$$(A)\ldots\ 1,\ \overline{qt+\alpha},\ \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta},\ \overline{\varepsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu},$$
$$(B)\ldots\ s^n,\quad s^{n-1},\qquad s^{n-2},\qquad s^{n-3},$$
$$\overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\varphi t+\sigma},\ \&c.$$
$$s^{n-4},\ \&c.$$

Si l'on multiplie le premier terme de la suite (A) *par le premier terme de la suite* (B), *le second terme de la suite* (A) *par le second terme de la suite* (B), *le troisiéme terme de la suite* (A) *par le troisiéme terme de la suite* (B), *& ainsi des autres jusqu'à ce que tous les termes soient épuisés, & qu'on unisse tous les produits par les signes* + *ou* −, *en faisant la somme totale égale à zero : on aura l'Équation indéterminée marquée ici par* (D)

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt+\alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2+\gamma t+\delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3+\eta t^2+\lambda t+\mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4+\rho t^3+\pi t^2+\varphi t+\sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0,$$

dans laquelle il n'y a que deux variables s *&* t, *& dont les termes comprennent tous les produits, qui n'excédent pas le* n^e

degré, des puissances descendantes de la variable s *& des puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, *qui sont depuis* n *jusqu'à zero, ces produits multipliés par les coëfficients constants* 1, q, α, β, γ, δ, ε, *&c.*

Ce que je nomme *puissances descendantes de la variable* s, sont les puissances que l'on voit ici en *(R)*, & ce que je nomme *puissances réciproquement ascendantes de la variable* t, sont celles que l'on voit ici en *(P)*

$$(R)\ldots\ s^{n},\ s^{n-1},\ s^{n-2},\ s^{n-3},\ s^{n-4},\ s^{n-5},\ \&c.$$

$$(P)\ldots\ t^{0},\ t^{1},\ t^{2},\ t^{3},\ t^{4},\ t^{5},\ \&c.$$

Les produits de toutes ces puissances descendantes, depuis *n* jusqu'à o, & réciproquement ascendantes, sont compris dans le Quarré algébrique que l'on voit ici en *(N)*, dont le premier rang horizontal contient tous les produits de *R* par t^{0}; le

$$N\ldots\left\{\begin{array}{l} t^0s^n,\ t^0s^{n-1},\ t^0s^{n-2},\ t^0s^{n-3},\ t^0s^{n-4},\ \&c. \\ t^1s^n,\ t^1s^{n-1},\ t^1s^{n-2},\ t^1s^{n-3},\ t^1s^{n-4},\ \&c. \\ t^2s^n,\ t^2s^{n-1},\ t^2s^{n-2},\ t^2s^{n-3},\ t^2s^{n-4},\ \&c. \\ t^3s^n,\ t^3s^{n-1},\ t^3s^{n-2},\ t^3s^{n-3},\ t^3s^{n-4},\ \&c. \\ t^4s^n,\ t^4s^{n-1},\ t^4s^{n-2},\ t^4s^{n-3},\ t^4s^{n-4},\ \&c. \\ \&c.\quad \&c.\quad \&c.\quad \&c.\quad \&c. \end{array}\right.$$

$$M\ldots\left\{\begin{array}{r} t^0s^n,\ t^0s^{n-1},\ t^0s^{n-2},\ t^0s^{n-3},\ t^0s^{n-4},\ \&c. \\ t^1s^{n-1},\ t^1s^{n-2},\ t^1s^{n-3},\ t^1s^{n-4},\ \&c. \\ t^2s^{n-2},\ t^2s^{n-3},\ t^2s^{n-4},\ \&c. \\ t^3s^{n-3},\ t^3s^{n-4},\ \&c. \\ t^4s^{n-4},\ \&c. \\ \&c. \end{array}\right.$$

second rang horizontal, tous les produits de *R* par t^{1}; le troisiéme rang horizontal, tous les produits de *R* par t^{2}, & ainsi de suite. Or si l'on retranche de ce quarré, tous les produits qui sont au dessus de la puissance *n*, il est visible que ce seront, 1° le premier terme du second rang horizontal, 2° les deux premiers termes du troisiéme rang horizontal, 3° les trois premiers termes du quatriéme rang, 4° les quatre premiers termes du cinquiéme rang, & ainsi de suite de rang en rang qui seront retranchés, ensorte que le quarré algébrique *N* se trouvera réduit au triangle marqué par *(M)*; d'où il suit que ce triangle contiendra tous les produits des puissances descendantes de *s* par les puissances réciproquement ascendantes de *t*, qui n'excédent pas le n^{e} degré.

Mais il est évident que tous les produits qui composent le triangle algébrique *(M)*, se trouvent dans l'équation *(D)*

formée par la multiplication des termes des suites A & B qui se correspondent suivant l'exposé de ce Lemme.

$$(D)\ldots\ s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car 1.° Le produit, qui compose la premiére colomne perpendiculaire du triangle M, se trouve composer le premier terme de l'équation (D); 2.° Tous les produits de la seconde colomne perpendiculaire du triangle M, sont dans le second terme de l'équation (D); 3.° Tous les produits de la troisiéme colomne de M, sont dans le troisiéme terme de la même équation (D); 4.° Tous les produits de la quatriéme colomne sont dans son quatriéme terme, & ainsi de suite. Donc tous les produits des puissances descendantes de s, par les puissances ascendantes de t, qui n'excedent pas le n^e degré, se trouvent dans l'équation (D) multipliés successivement par les coëfficients constants $1, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda$, &c. *Ce qu'il falloit prouver.*

COROLLAIRE.

XXVII. Il suit de-là que l'équation marquée (D) est toûjours du n^e degré, & ne sçauroit être d'un degré supérieur ou inférieur ; car 1° les produits des variables s & t, dont elle est composée, ne sçauroient excéder le n^e degré (par l'article précédent), donc elle ne peut être d'un degré supérieur à n; 2° parmi les produits des mêmes variables s & t, il y en aura toûjours plusieurs qui seront du degré n; donc elle ne sçauroit être d'un degré inférieur à n, donc elle est toûjours de n^e degré. *C. Q. F. P.*

LEMME II.

XXVIII. *Si les coëfficients* q, α, β, γ, δ, ε, η, &c. *de l'équation marquée par* (D) *dans les deux articles précédents, portent avec eux leurs signes* + *ou* —, *& si on les regarde, quoique constants, comme des coëfficients indéterminés, c'est-à-dire,*

indifférents à être de telle ou telle grandeur conſtante; je dis que cette équation (D) *eſt de toutes les équations du* n^e *degré, qui n'enveloppent que deux inconnuës, celle qui eſt la plus générale.*

Toutes les équations imaginables du n^e degré, dans leſquelles il n'y a que deux variables, peuvent ſe rapporter à l'équation *(D),* ſi l'on peut comparer tous les termes de ces équations particuliéres un à un, avec ceux de l'équation *(D)* qui leur correſpondent : or cette comparaiſon de terme à terme, ſi uſitée depuis M. Deſcartes, qui eſt le premier qui l'ait miſe en pratique, ſera toûjours poſſible entre toutes les équations imaginables du n^e degré, & celle que l'on a marquée *(D)* dans les articles précédents; car, 1.° Tous les produits poſſibles des puiſſances deſcendantes depuis n juſqu'à o, de la variable s & des puiſſances aſcendantes, depuis o juſqu'à n de la variable t (à l'exception néantmoins de ceux qui ſont d'un degré plus élevé que la grandeur n) ſe rencontrent dans l'équation *(D)*; cela eſt évident par l'article 26. Or les termes dont les équations particuliéres du degré n ſont compoſées, ne peuvent être, quant à leurs variables, que des produits des puiſſances deſcendantes d'une variable comme s & des puiſſances aſcendantes d'une autre variable comme t, qui n'excédent point le n^e degré. Donc tous les termes, de ces équations particuliéres du n^e degré, auront leurs ſemblables dans l'équation *(D)*, quant à leurs grandeurs variables. Donc, par rapport à ces variables, ils pourront être comparés avec les termes de l'équation *(D).* 2.° Il en ſera de même par rapport aux grandeurs conſtantes qui multiplieront les termes des équations particuliéres; car tous les coëfficients q, α, β, γ, δ, ε, η, &c. de l'équation *(D)* étant indifférents à recevoir les ſignes $+$ ou $-$, & en même temps indéterminés à être de telle ou telle grandeur, peuvent être comparés un à un avec les coëfficients déterminés des équations particuliéres. Donc tous les termes des équations particuliéres du degré n peuvent être comparées, ſoit par rapport à leurs quantités variables, ſoit par rapport à leurs quantités conſtantes, avec les termes de l'équation *(D),* ſuivant

la méthode de comparaiſon ſi uſitée dans l'analyſe. Donc toutes les équations particuliéres du degré n, dans leſquelles il n'y a que deux inconnuës, peuvent ſe rapporter à l'équation *(D)*. Donc cette équation eſt de toutes les équations du n^e degré, qui ne renferment que deux variables, celle qui eſt la plus générale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXIX. Donc, 1.° l'équation marquée ici par *(1 D)* eſt de toutes les équations indéterminées du premier degré, qui ne renferment que deux inconnuës, celle qui eſt la plus générale, & à laquelle toutes les autres peuvent ſe rapporter.

$$(1D)\ldots s^1 + \overline{qt + \alpha} \times s^0 = 0.$$

2.° L'équation marquée *(2D)* eſt de toutes les équations du ſecond degré, qui n'ont que deux variables, celle qui eſt la plus génerale.

$$(2D)\ldots s^2 + \overline{qt + \alpha} \times s^1 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^0 = 0.$$

3.° L'équation marquée *(3D)* eſt de toutes les équations du troiſiéme degré, qui ne renferment que deux variables ou inconnuës, celle qui eſt la plus générale.

$$(3D)\ldots s^3 + \overline{qt + \alpha} \times s^2 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^1 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^0 = 0.$$

4.° L'équation marquée ici par *(4D)* eſt de toutes les équations indéterminées du quatriéme degré, qui n'ont que deux inconnuës variables, celle qui eſt la plus générale.

$$(4D)\ldots s^4 + \overline{qt + \alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^1 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^0 = 0.$$

5.° L'équation marquée *(5D)* eſt de toutes les équations indéterminées du cinquiéme degré, celle qui eſt la plus générale.

$$(5D)\ldots s^5 + \overline{qt + \alpha} \times s^4 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^3 +$$

$$\overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^2 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^1 + \overline{At^5 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^2 + Et + F} \times s^0 = 0.$$

Tout cela eſt une ſuite néceſſaire du Lemme précédent, & de l'article 26, leſquels donneront pareillement les Equations générales pour les 6ᵉ, 7ᵉ, 8ᵉ & 9ᵉ degrés, & enfin pour tel degré qu'on voudra.

COROLLAIRE II.

XXX. Il ſuit encore du Lemme précedent que l'équation marquée *(D)* exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e ordre.

$$(D) \ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car il n'y a point de ligne particuliére du n^e ordre, dont la nature ne puiſſe être exprimée par une équation du n^e degré: or il n'y a point d'équation du n^e degré qui ne puiſſe ſe rapporter à l'équation *(D)**. Donc il n'y a point de ligne particuliére du n^e ordre, dont la nature ne puiſſe ſe rapporter à l'équation *(D)*; donc cette équation exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e degré.

* *Art.* 28.

COROLLAIRE III.

XXXI. Donc l'équation marquée *(4 D)* exprime la nature de toutes les lignes algébriques du quatriéme ordre.

$$(4D) \ldots s^4 + \overline{qt + \alpha} \times s^3 + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} = 0.$$

C'eſt une ſuite néceſſaire du Lemme ſecond & du corollaire précédent*; & il eſt inutile d'ajoûter qu'on aura de même les Equations générales pour les Lignes du 5ᵐᵉ, 6ᵐᵉ, 7ᵐᵉ & 8ᵐᵉ ordre, & enfin pour tel ordre qu'on voudra, d'autant que cela ſe déduit trop clairement des art. 28 & 29.

* *Art.* 30.

REMARQUE.

REMARQUE.

XXXII. Il est aisé de s'appercevoir, 1.° Que le nombre des termes des Équations générales marquées par *(1 D)*, *(2D)*, *(3D)*, *(4D)*, *(5D)*, &c. de l'article 29, suit la progression marquée ici par *(MM)*

$(MM)\ldots\ \overline{1+2},\ \overline{1+2+3},\ \overline{1+2+3+4},\ \overline{1+2+3+4+5},\ \overline{1+2+3+4+5+6},\ \overline{1+2+3+4+5+6+7}$, &c.

Ensorte que la premiére équation *(1 D)*, qui est pour les lignes du premier ordre, est composée de trois termes; la seconde *(2D)*, qui est pour les lignes du second ordre, est composée de six termes; la troisiéme *(3D)*, qui est pour les lignes du troisiéme ordre, est composée de dix termes; la quatriéme *(4D)* est composée de quinze termes, & ainsi des autres à l'infini. 2.° Que la progression *(MM)* est la suite des nombres triangulaires, en commençant par le second. D'où il suit que n étant pris pour le nombre qui exprime le degré d'une Équation générale quelconque, le nombre triangulaire, qui correspond dans le Triangle arithmétique de M. Pascal au nombre naturel $n+2$, donne toûjours le nombre des termes qui doit être dans l'Équation générale d'une ligne du n^e ordre lorsqu'elle est complete. Or on sçait que le nombre triangulaire, qui correspond au nombre naturel $n+2$, est égal à $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2}$; donc cette quantité $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2}$ exprime toûjours le nombre des termes de l'Équation générale des lignes du n^e ordre, lorsqu'elle est complete. 3.° Il est aisé de voir que le nombre des coëfficients q, α, β, γ, δ, ε, &c. dans chaque Équation générale, est égal au nombre des termes de l'équation moins un (puisque nous n'en avons point donné jusqu'ici au premier terme); d'où il suit que le nombre des coëfficients de l'Équation générale des lignes du n^e ordre est $\frac{\overline{n+2}.\overline{n+1}}{2} - 1 = \frac{nn+3n}{2}$. *Ce que*

M. Stirling a remarqué avant nous, page 4 de son Traité, imprimé à Oxfort en 1717.

PROPOSITION I.

THÉOREME.

XXXIII. *Une ligne du* n^e *ordre peut être rencontrée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unités dans* n, *& ne le sçauroit être, par la même droite, en un plus grand nombre.*

DÉMONSTRATION.

* Fig. 21. Soit sur un plan une ligne *ZMMNX2mV* * de l'ordre *n*, dont l'axe soit *GQ*, & une ligne droite *GM* qui coupe la ligne *ZMm* en un point comme *M*: je dis que cette droite peut couper la ligne *ZMm* en autant d'autres points *2M*, *3M*, *4M*, *5M*, &c. qu'il y a d'unités dans $n - 1$, c'est-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans *n*, en y comprenant le point *M*.

Car ayant pris sur *GQ* la partie *GI* = à l'unité arbitraire, & après avoir mené du point *I* la droite *IK*, faisant avec l'axe *GQ* un angle quelconque *KIG*; l'angle *KGI* étant connu par la supposition, on voit qu'il y a dans le triangle *IKG* deux angles & un côté *GI* qui sont connus; donc les deux autres côtés *IK* & *KG* seront connus. Donc après avoir pris $GI = 1$, on peut encore prendre $IK = h$, quantité connüe & déterminée. Donc le rapport des ordonnées de la droite *GM* aux abscisses *GQ* (en nommant *y* ces ordonnées) sera $y = ht$.

Mais la courbe *ZMm* étant du n^e ordre, le rapport de ses ordonnées *MQ (s)* aux abscisses *GQ (z)* de son axe est exprimé par l'équation *(D)* *

* Art. 27. & 28.

$$(D)\ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{6t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + nt^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0$$

dans laquelle les coëfficients q, α, 6, γ, δ, ε, &c. sont des

grandeurs conſtantes, mais indéterminées à être de telle ou telle valeur, & à être affectées de tel ou tel ſigne.

Or toutes les fois que la droite *GM* rencontrera la courbe *ZMm*, les ordonnées *(y)* de cette droite *QM* deviendront égales aux ordonnées *QM* de la courbe *ZMm*, par conſéquent on aura $QM(s) = y = ht$; & en ſubſtituant dans l'équation *(D)* au lieu de *(s)* cette valeur *ht* (pour avoir la valeur des abſciſſes *GQ (t)* dans les endroits où la droite *GM* rencontre la courbe *ZMm)*, on aura l'égalité marquée ici par *(K)*, dont les racines donneront les valeurs des abſciſſes *GQ* aux points où la droite *GM* & la courbe *ZMm* ſe rencontrent.

$$(K)\ldots\left\{\begin{array}{l} + h^n \\ + q h^{n-1} \\ + \beta h^{n-2} \\ + \epsilon h^{n-3} \\ + \nu h^{n-4} \\ + \&c. \end{array}\right\} t^n \begin{array}{l} + \alpha h^{n-1} \\ + \gamma h^{n-2} \\ + \eta h^{n-3} \\ + \rho h^{n-4} \\ + \&c. \end{array}\left\} t^{n-1} \begin{array}{l} + \delta h^{n-2} \\ + \lambda h^{n-3} \\ + \pi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array}\right\} t^{n-2} \begin{array}{l} + \mu h^{n-3} \\ + \varphi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array}\left\} t^{n-3} \begin{array}{l} + \sigma h^{n-4} \\ + \&c. \end{array}\right\} t^{n-4} + \&c. = 0.$$

Or il eſt viſible qu'il peut y avoir dans cette égalité autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans l'expoſant *n* du premier terme, ſans qu'il puiſſe y en avoir un plus grand nombre; donc il peut y avoir autant d'abſciſſes *GQ*, *G2Q*, *G3Q*, *G4Q*, &c. communes à la droite *GM* & à la courbe *ZMm*, qu'il y a d'unités dans *n*, & il ne ſçauroit y en avoir davantage. Donc la ligne droite *GM* peut couper la courbe *ZMm* du n^e ordre en autant de points qu'il y a d'unités dans *n*, & ne ſçauroit la couper en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXXIV. Donc, 1.° les lignes du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, les ſections coniques peuvent être rencontrées en deux points par une même ligne droite, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre, ce que l'on ſçait d'ailleurs être vrai.

2.° Les lignes du troiſiéme ordre peuvent être rencontrées

en trois points par une même ligne droite, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.

3.° Les lignes du quatriéme ordre peuvent être rencontrées en quatre points par une même ligne droite, & ne ſçauroient l'être en un plus grand nombre.

4.° Celles du cinquiéme ordre peuvent être rencontrées en cinq points par une même ligne droite, celle du ſixiéme ordre en ſix points, celles du ſeptiéme en ſept points, & ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE II.

* Fig. 22. XXXV. Si par un point M ſimple*, double, triple, quadruple, &c. d'une ligne quelconque ZMN, on a mené une droite MG tangente de la courbe en ce point M, laquelle étant prolongée ait été rencontrée en G ſous un angle connu MGQ par une autre droite GQ, ſur laquelle on ait abbaiſſé de tous les points M, N, Z, de la courbe ZMN, des droites paralleles entr'elles comme MQ, NQ, &c. faiſant avec GQ des angles connus MGQ. Il eſt viſible,

1.° Qu'en nommant les abſciſſes GQ (t) & les ordonnées QM ou QN (s), le rapport des abſciſſes aux ordonnées

* Art. 30. ſera exprimé en général par l'équation (D)*, ſuppoſé que la courbe ſoit une ligne algébrique du n^e ordre.

$$(D) \ldots s^n + \overline{qt + \alpha} \times s^{n-1} + \overline{\beta t^2 + \gamma t + \delta} \times s^{n-2} + \overline{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^{n-3} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \varphi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

2.° Il n'eſt pas moins évident que GI étant priſe pour l'unité arbitraire, & IK ligne droite connuë (puiſque dans le triangle IGK il y a deux angles IGK, KGI, & un côté IG qui ſont donnés) IK, dis-je, étant nommée h, l'égalité marquée par (K) donnera les valeurs des abſciſſes GQ, $G2Q$, &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMN, aux points où cette droite rencontre la courbe.

$$(K)\ldots\left\{\begin{matrix}+h^{n}\\+q\,h^{n-1}\\+\beta\,h^{n-2}\\+\varepsilon\,h^{n-2}\\+\nu\,h^{n-4}\\+\&c.\end{matrix}\right\}t^{n}\;\begin{matrix}+a\,h^{n-1}\\+\gamma\,h^{n-2}\\+\eta\,h^{n-3}\\+\rho\,h^{n-4}\\+\&c.\end{matrix}\Bigg\}t^{n-1}\;\begin{matrix}+\delta\,h^{n-2}\\+\lambda\,h^{n-3}\\+\pi\,h^{n-4}\\+\&c.\end{matrix}\Bigg\}t^{n-2}\;\begin{matrix}+\mu\,h^{n-3}\\+\varphi\,h^{n-4}\\+\&c.\end{matrix}\Bigg\}t^{n-4}+\&c.=0.$$

3.° Il eſt certain auſſi * qu'il y aura dans cette égalité au moins deux racines égales, puiſqu'on a ſuppoſé la droite *GM* tangente en *M* de la courbe *ZMN*: ſi le point touchant *M* de la courbe eſt une infléxion de la ſeconde eſpece, il y aura, dans l'égalité *(K)* quatre racines égales entre elles *; ſi au point touchant *M* il y a une infléxion de la quatriéme eſpece, l'égalité *(K)* aura ſix racines égales : & ainſi des autres points d'infléxion inviſibles à l'infini.

* *Art.* 8. *n.* 2.

* *Art. id. n.* 4.

4.° Si le point touchant *M* eſt une infléxion ordinaire, il y aura *, dans l'égalité marquée par *(K)*, trois racines égales : ſi le point d'infléxion eſt de la troiſiéme eſpece, il y aura cinq racines égales dans l'égalité *(K)*; ſi ce point d'infléxion eſt de la cinquiéme eſpece, il y aura dans l'égalité *(K)* ſept racines égales, & ainſi des autres points d'infléxion viſibles d'eſpeces ſupérieures.

* *Art. id. n.* 3.

5.° Si le point touchant *M* eſt un point double de la premiére eſpece, il y aura * dans l'égalité marquée par *(K)* trois racines égales & de même ſigne : ſi la branche touchée par la droite *GM* eſt accompagnée d'une infléxion de la ſeconde eſpece au point double *M*, il y aura dans l'égalité *(K)* cinq racines égales & de même ſigne : ſi l'infléxion eſt de la quatriéme eſpece, il y aura ſept racines égales & de même ſigne, & ainſi des autres points d'infléxion inviſibles à l'infini qui ſe confondroient avec un point double.

* *Art.* 19. *n.* 1.

6.° Si le point touchant *M* eſt un point double de la ſeconde ou troiſiéme eſpece, il y aura * dans l'égalité marquée par *(K)* quatre racines égales & de même ſigne, ſuppoſé que l'infléxion de la branche touchée par la droite *GM* ſoit une infléxion de la premiére eſpece. Si cette infléxion eſt de la troiſiéme eſpece, il y aura dans l'égalité marquée par

* *Art. id. n.* 2.

(K) ſix racines égales entre elles : & ainſi des autres points d'inflexion viſibles d'eſpeces ſupérieures qui ſe confondent avec des points doubles.

7.° Si le point touchant *M* eſt un point triple de la
* *Art. 19. n. 2.* premiére eſpece, il y aura* dans l'égalité *(K)* quatre racines égales & de même ſigne, ſix, huit, dix, &c. ſi ce point triple eſt accompagné d'une infléxion inviſible de la branche touchée par la droite *GM.* Si la branche touchée par la droite *GM* a une infléxion viſible au point triple *M,* c'eſt-à-dire, ſi le point triple *M* eſt de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece, l'égalité *(K)* aura cinq, ſept ou neuf racines égales & de même ſigne, ſelon que cette infléxion, qui ſe confond avec le point triple *M,* ſera de la premiére, troiſiéme ou cinquiéme eſpece.

8.° Si le point touchant *M* eſt un point quadruple de
* *Art. id. n. 3.* la premiére eſpece, il y aura* dans l'égalité marquée par *(K)* au moins cinq racines égales & de même ſigne, ou ſept, ou neuf, ou onze, ſelon que le point touchant *M* ſera ſans infléxion, ou avec une infléxion de la ſeconde, quatriéme, ou ſixiéme eſpece, & ainſi de ſuite pour les autres infléxions inviſibles qui pourroient accompagner le point quadruple; ſi le point touchant *M* eſt un point quadruple accompagné d'une infléxion viſible de la branche touchée par *GM,* c'eſt-à-dire, ſi le point quadruple *M* eſt de la ſeconde, troiſiéme, quatriéme, ou cinquiéme eſpece, il y aura dans l'égalité marquée par *(K)* au moins ſix racines égales & de même ſigne, ou huit, ou dix, ou douze, ſi l'infléxion qui ſe trouve au point quadruple eſt de la troiſiéme, cinquiéme, ou ſeptiéme eſpece.

Enfin il eſt aiſé de voir combien il doit y avoir de racines égales & de mêmes ſignes dans l'égalité marquée par *(K),* lorſque le point touchant *M* eſt un point quintuple, ſextuple, & ainſi des autres points multiples d'un ordre ſupérieur.

COROLLAIRE III.

XXXVI. De tout ceci il eſt aiſé de conclurre, 1.° Que

les lignes du ſecond ordre ne ſçauroient avoir ni points d'infléxions, ni points doubles : car quand la ligne *ZMN* eſt du ſecond ordre, l'égalité *(K)* eſt du ſecond degré ; d'où il ſuit qu'elle ne ſçauroit avoir trois racines égales. 2.° Que les lignes du ſecond ordre n'ont ni points triples, ni points quadruples, en un mot que tous leurs points ſont ſimples. *C'eſt une vérité connüe depuis long-temps, mais que j'ai crû devoir remetire devant les yeux pour faire voir la liaiſon de cette théorie avec les vérités déja connües.*

COROLLAIRE IV.

XXXVII. Il ſuit encore de l'art. 35, 1.° Que les lignes du troiſiéme ordre peuvent avoir des points d'infléxion de la premiére eſpece, & des points doubles de la premiére eſpece, & par conſéquent des points de rebrouſſement & des points conjugués : mais qu'elles ne ſçauroient avoir ni infléxions de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece, ni points doubles de la ſeconde & troiſiéme eſpece, ni points triples, ni aucuns points multiples au deſſus du point double. 2.° Que les lignes du quatriéme ordre peuvent avoir des points d'infléxion de la premiére & ſeconde eſpece : des points doubles de toutes les eſpeces, & des points triples de la premiére eſpece : mais qu'elles ne ſçauroient avoir ni points triples de la ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece, ni point quadruple, ni aucun point multiple ſupérieur au point triple. 3.° Que les lignes du cinquiéme ordre peuvent avoir des points quadruples de la premiére eſpece : des points triples de la ſeconde, troiſiéme & quatriéme eſpece, & à plus forte raiſon des points triples de la premiére eſpece : des points doubles des trois eſpeces que nous avons marquées, & des infléxions de la premiére, ſeconde & troiſiéme eſpece : mais qu'elles ne ſçauroient avoir ni points quadruples de la ſeconde, troiſiéme, quatriéme ou cinquiéme eſpece, ni points quintuples, ni aucun point multiple ſupérieur au point quadruple de la premiére eſpece. 4.° Que les lignes du ſixiéme ordre peuvent avoir des points quintuples de la premiére eſpece, ou des points

quadruples de la ſeconde, troiſiéme, quatriéme & cinquiéme eſpece, & à plus forte raiſon des points quadruples de la premiére eſpece : des points triples & des points doubles de toutes les eſpeces. 5.° Enfin que les lignes de l'ordre exprimé par l'expoſant n peuvent avoir des infléxions dont l'eſpece ſoit exprimée par $n-2$; à plus forte raiſon de celles dont l'eſpece eſt exprimée par $n-3$, $n-4$, $n-5$, &c. Qu'elles peuvent avoir des points multiples dont la multiplicité eſt exprimée par $n-1$, mais ſeulement de la premiére eſpece : qu'elles peuvent avoir de toutes les eſpeces de points multiples, dont la multiplicité eſt exprimée par $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. mais qu'elles ne ſçauroient avoir de points multiples dont la multiplicité ſoit exprimée par n.

COROLLAIRE V.

XXXVIII. Il n'eſt pas moins évident que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées par leurs tangentes en un point ſimple M, ou par leurs ſécantes en un point double, en autant de points ſimples, autres que le point d'attouchement, ou autres que le point double en autant de points, dis-je, qu'il y a d'unités dans $n-2$. Ainſi 1.° les lignes du ſecond ordre, ou les ſections coniques, ne ſçauroient être coupées par leurs tangentes en aucun point, vérité connüe depuis long-temps. 2.° Les tangentes en un point ſimple, ou les ſécantes en un point double des lignes du troiſiéme ordre, peuvent couper leurs courbes en un autre point. 3.° Les tangentes en un point ſimple, ou les ſécantes en un point double des lignes du quatriéme ordre, peuvent couper leurs courbes en deux autres points ſimples, ou en un autre point double. D'où il ſuit que les lignes du quatriéme ordre peuvent avoir deux points doubles ſur la même ligne droite ſécante de la courbe à l'un & à l'autre point double.

COROLLAIRE VI.

XXXIX. Les lignes algébriques du n^e ordre peuvent être

être coupées par leurs aſymptotes rectilignes en autant de points qu'il y a d'unités dans $n-2$; c'eſt encore une ſuite de l'art. 35. Ainſi 1.° Les aſymptotes rectilignes des lignes du troiſiéme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en un ſeul point; Celles des lignes du quatriéme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en deux points; Celles des lignes du cinquiéme en trois points; Celles du ſixiéme en quatre, & ainſi de ſuite. 2.° Les lignes du quatriéme ordre peuvent être touchées en un point ſimplement ſimple, ou coupée en un point double par leurs aſymptotes rectilignes; Celles du cinquiéme ordre peuvent être touchées en un point d'infléxion de la premiére eſpece, ou en un point double, ou bien coupées en un point triple par leurs aſymptotes rectilignes; Celles du ſixiéme ordre peuvent être touchées en un point d'infléxion de la ſeconde eſpece, ou en un point triple, ou coupées en un point quadruple par leurs aſymptotes rectilignes, & ainſi des autres.

COROLLAIRE VII.

XL. Il ſuit encore des articles 33 & 35, que les tangentes en un point d'infléxion de la premiére eſpece, ou les tangentes en un point double de la premiére eſpece, ou les ſécantes en un point triple des lignes algébriques du n^e ordre peuvent couper leurs courbes en autant d'autres points différents du point d'infléxion, ou du point double, ou du point triple, qu'il y a d'unités dans $n-3$. D'où il ſuit, 1.° Que les tangentes au point d'infléxion, ou au point double d'une ligne du troiſiéme ordre, ne ſçauroit rencontrer cette ligne en d'autres points. 2.° Que les tangentes au point d'infléxion, ou au point double de la premiére eſpece, ou bien les ſécantes au point triple d'une ligne du quatriéme ordre, ne peuvent que couper cette ligne en un autre point ſimple, ſans pouvoir la toucher en un autre point ſimplement ſimple, ni la couper en un autre point double, ni lui être aſymptote. 3.° Que les tangentes au point d'infléxion de la premiére eſpece, ou les tangentes au point double de la premiére

eſpece, ou les ſécantes en un point triple des lignes du cinquiéme ordre, peuvent couper leur courbe en deux autres points ſimples, ou en un autre point double, ou la toucher en un autre point ſimplement ſimple.

COROLLAIRE VIII.

XLI. Il ſuit encore des mêmes articles 33 & 35, que la tangente à l'infléxion de la ſeconde eſpece, & les tangentes en un point double de la ſeconde ou troiſiéme eſpece, ou bien les tangentes en un point triple, ou enfin les ſécantes en un point quadruple des lignes algébriques du n^e ordre, ne peuvent couper leur courbe qu'en autant d'autres points qu'il y a d'unités dans $n - 4$. D'où il ſuit 1.° Que la tangente à l'infléxion de la ſeconde eſpece, ou les tangentes en un point double de la ſeconde & troiſiéme eſpece, ou bien les tangentes en un point triple des lignes du quatriéme ordre, ne ſçauroient rencontrer leur courbe en aucun autre point. 2.° Que la tangente à l'infléxion de la ſeconde eſpece, ou les tangentes en un point double de la ſeconde & troiſiéme eſpece, ou les tangentes en un point triple, ou les ſécantes en un point quadruple des lignes du cinquiéme ordre, peuvent couper leur courbe en un autre point ſimple. 3.° Que les tangentes en ces différents points des lignes du ſixiéme ordre peuvent couper leur courbe en deux autres points ſimples, ou en un autre point double, ou les toucher en un autre point ſimplement ſimple.

COROLLAIRE IX.

XLII. Il n'eſt pas moins évident que les lignes du troiſiéme ordre ne ſçauroient avoir qu'un ſeul point double. Car
* Fig. 24. ſoient M & N* ces deux points doubles d'une ligne du troiſiéme ordre : par les premiers principes de la Géométrie, ces deux points peuvent être unis par une même ligne droite MN. Soit prolongée cette droite juſqu'à ce qu'elle rencontre en G une autre droite GQ, que l'on prendra pour l'axe de la courbe : cela fait de chaque point double M & N, on

abbaissera sur cet axe les ordonnées *MQ, NP*, alors l'abscisse *GQ* sera au moins deux fois commune à la courbe *ZMN* & à la droite *GN*; de même l'abscisse *GP* sera au moins deux fois commune à la même courbe *ZMN* & à la même droite *GN*, ensorte que dans l'égalité marquée par *(K)* dans l'art. 33, il y aura deux racines égales pour l'abscisse *GQ*, & deux autres racines égales pour l'abscisse *GP*. Donc il y aura quatre racines dans l'égalité marquée par *(K)*: or il implique qu'il y ait quatre racines dans cette égalité, lorsque la courbe *ZNM* n'est qu'une ligne du troisiéme ordre (puisque cette égalité n'est alors que du troisiéme degré, n y étant $=3$). Donc il implique qu'il y ait deux points doubles dans une même ligne du troisiéme ordre. Donc, &c.

COROLLAIRE X.

XLIII. Une ligne du quatriéme ordre ne sçauroit avoir qu'un seul point triple; car s'il étoit possible qu'elle en eût deux, on prouveroit, par un raisonnement semblable à celui de l'article précédent, que l'égalité marquée par *(K)* dans l'art. 33, pourroit avoir six racines, lorsque la courbe, dont *GM* est sécante, n'est que du quatriéme ordre, ce qui impliqueroit contradiction, puisque l'égalité *(K)* ne sçauroit être alors que du quatriéme degré. Donc, &c.

COROLLAIRE XI.

XLIV. On prouvera de même que les lignes du quatriéme ordre qui ont un point triple, ne sçauroient avoir de points doubles; car si cela étoit possible, il s'ensuivroit que l'égalité marquée par *(K)* dans l'art. 33, auroit cinq racines, ce qui impliqueroit contradiction, puisque cette égalité ne sçauroit être que du quatriéme degré, lorsque la courbe n'est qu'une ligne du quatriéme ordre.

SCHOLIES.

XLV. Il sera aussi aisé de prouver, 1.° Que les lignes du 5[me] ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quadruple,

& que celles qui ont un point quadruple ne ſçauroient avoir ni points triples, ni points doubles. 2.° Que les lignes du ſixiéme ordre ne peuvent avoir qu'un ſeul point quintuple, & que celles qui ont un point quintuple ne ſçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples, ni points doubles. 3.° Enfin que les lignes algebriques de l'ordre n, ne peuvent avoir qu'un ſeul point multiple, dont la multiplicité ſoit exprimée par $n - 1$, & que celles qui ont un point multiple, dont la multiplicité eſt exprimée par $n - 1$, ne ſçauroient avoir d'autres points multiples.

Enfin, ſuivant la même théorie, on prouvera encore, 1.° Que les lignes du cinquiéme ordre, qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 2.° Que les lignes du ſixiéme ordre, qui ont des points quadruples, peuvent avoir des points doubles, & ne ſçauroient avoir de points triples, mais que celles de cet ordre qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 3.° Que les lignes du ſeptiéme ordre, qui ont des points quintuples, peuvent avoir des points doubles, & ne ſçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples. 4.° Enfin que les lignes du n^e ordre, qui ont des points multiples de l'ordre $n - 2$, ne peuvent avoir que des points doubles : que les lignes de l'ordre n qui ont des points multiples, dont la multiplicité eſt exprimée par $n - 3$, ne peuvent avoir que des points triples & des points doubles : que celles de cet ordre qui ont des points multiples de l'ordre $n - 4$, ne peuvent avoir que des points quadruples, ou des points triples, ou des points doubles, & ainſi des autres à l'infini, tous les autres points de ces courbes étant des points ſimples.

REMARQUE.

XLVI. Les différentes tangentes en ces points doubles, triples, quadruples, &c. ſe trouvent toûjours par la méthode des Tangentes que M. le Marquis de l'Hôpital a expliquée dans l'analyſe des Infiniment petits, mais il faut y appliquer les regles de différentiation contenuës dans l'article 163 de

cette même analyse, dans un Mémoire du célébre M. Bernoulli, imprimé dans les Journaux de Leipsik de l'année 1704, & dans différents ouvrages d'un des principaux Géometres * de cette Compagnie, imprimés, les uns dans les Journaux des Sçavants, les autres dans les Mémoires de l'Académie, pour les cas auxquels le numérateur & le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport de l'ordonnée à la soûtangente deviennent nuls : car cela arrive, lorsque le point, dont on cherche la tangente, est double, triple, quadruple, &c. & l'on est obligé de différentier deux fois selon ces méthodes, pour trouver le rapport de l'ordonnée à la soûtangente, lorsque le point est double : trois fois, lorsqu'il est triple : quatre fois, lorsqu'il est quadruple, & ainsi de suite pour les autres points multiples. M. de Fontenelle en a donné la raison dans son excellent Traité de la Géométrie de l'Infini, art. 1266 & 1267, & on peut même la déduire des principes qui ont été établis dans ce Mémoire, ainsi je me contente de renvoyer aux ouvrages des Géométres dont je viens de parler.

* M. Saurin.

PROPOSITION II.

THEOREME.

XLVII. *Les lignes algébriques du* n^e *ordre**, *peuvent être coupées par une ligne droite, parallele à leur axe, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable* (t) *qui dénote les abscisses* GQ *de son axe* G5q; *& par une ligne droite* QM *parallele à son ordonnée principale* GL, *en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable* (s) *qui dénote les abscisses* GE *de cette ordonnée principale* GL.

* Fig. 21.

Cette Proposition se démontre de la même maniére que celle de l'article 33, & on en déduit aisément les mêmes conséquences, ainsi je ne m'y arrête pas davantage pour ne pas tomber dans des répétitions.

DÉFINITION XV.

XLVIII. Je nommerai dans la ſuite *racine double*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à deux racines de cette égalité : telle eſt la racine $(-a)$ dans l'égalité du troiſiéme degré $x^3 + 4axx + 5aax + 2a^3 = 0$; & *racine ſimple*, celle qui dans une égalité quelconque n'eſt point repétée : telle eſt la racine $(-2a)$ dans cette même égalité du troiſiéme degré. Je nommerai *racine triple*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à trois racines de cette même egalité : telle eſt la racine $(-a)$ dans l'égalité $x^4 + 5ax^3 + 9a^2xx + 7a^3x + 2a^4 = 0$. De même je nommerai *racine quadruple*, celle qui dans une égalité quelconque eſt équivalente à quatre racines de cette même égalité, & ainſi des autres racines multiples à l'infini.

REMARQUE.

XLIX. Si par un point quelconque M d'une ligne $ZMDMN$, &c.* de l'ordre n, dont la nature eſt exprimée par l'Equation générale de l'art. 30, marquée par (D)*, on mene deux droites QM, EM, la premiére parallele à l'ordonnée principale GL, la ſeconde parallele à l'axe GQ, l'une & l'autre prolongées à l'infini, s'il eſt néceſſaire, de part & d'autre du point M, & qui rencontrent, la premiére l'axe GQ en Q, la ſeconde l'ordonnée principale GL en E : cela fait, ſi l'on nomme la droite, priſe à diſcretion, GQ (R), & la droite QM ou GE (g), ſi l'on ſubſtitüe 1.° dans l'équation marquée par (D), au lieu de l'indéterminée (t), ſa valeur (R), il eſt viſible qu'on aura l'égalité marquée par (L)*, dont les racines donneront les points M, $3N$, $2N$, N, &c. où la droite QM coupe la courbe $ZMDMNX2mV$. 2.° Si l'on ſubſtitüe dans cette même équation, marquée par (D), au lieu de l'indéterminée (s), ſa valeur $GE = g$, il eſt conſtant qu'on aura l'égalité marquée par (A)*, dont les racines donneront les points M, m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, &c. où la droite EM rencontre la courbe $ZMDMNX2mV$.

* Fig. 21. 35. & 36.

* Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.

* V. la même Table.

* V. la même Table.

Il eſt conſtant auſſi que l'abſciſſe *GQ* (*R*) ſera une des racines réelles de l'égalité marquée par (*A*), & que l'abſciſſe *GE* (*g*) ſera une des racines réelles de l'égalité marquée par (*L*), ſi le point *M* eſt un des points de la courbe *ZMDMNX2mV*, comme on l'a ſuppoſé.

Si l'on a beſoin de tranſporter l'origine des abſciſſes de *G* en *M*, il eſt conſtant, par les premiers principes de l'application de l'Algebre à la Géométrie, qu'il n'y a qu'à ſuppoſer $z = t - R$ & $u = s - g$, ou bien $t = z + R$ & $s = u + g$: car en ſubſtituant ces valeurs de t & de s dans l'équation de la courbe marquée par (*D*), on aura une équation ſemblable à celle que l'on voit dans la Table, marquée par (Δ), dans laquelle les coëfficients Q, A, B, C, D, E, F, G, &c. ſeront donnés en $q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda$, &c. & en g & en R. Or il eſt viſible que cette derniére équation exprime encore la nature de la courbe *ZMDMNX2mV* par rapport à des coordonnées *MP*, *P5M*, qui ont leur origine commune en *M*, & qui ſont paralleles aux premiéres *GQ*, *QM*.

Si par les points *G* & *M* on mene la droite *GM5M*, il eſt évident, par l'art. 33, que cette droite peut rencontrer la courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant n, en y comprenant les points doubles pour deux points ſimples, les points triples pour trois points ſimples, & ainſi des autres points multiples. Cela ſuppoſé, ſi l'on prend $GI = 1$ & $IK = h$ (en ſuppoſant toûjours *IK* parallele aux ordonnées) on trouvera l'égalité marquée dans la Table par (2*K*) de même qu'on a trouvé ci-devant * l'égalité marquée par (*K*): mais à cauſe des triangles ſemblables *GIK*, *GQM*, on aura ici $h = \frac{g}{R}$; de plus puiſque les coëfficients Q, A, B, C, D, E, F, &c. ſont donnés en $q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. & en g & en R, & que g & R ſont donnés même en $q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. il eſt viſible qu'il n'y aura dans l'égalité (2*K*) aucun coëfficient qui ne ſoit connu par rapport aux coëfficients de l'équation primitive marquée par (*D*).

* Art. 33.

Maintenant ſi par le point *M*, on mene une droite $M\omega$, faiſant avec *MP* un angle quelconque ωMP, mais différent de l'angle connu *MGQ*, cette droite pourra encore rencontrer la courbe *ZMDMNX2mV* en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant *n*, en y comprenant les points doubles pour deux points ſimples, les points triples pour trois points ſimples, & ainſi des autres. Cela poſé, ſi l'on prend $MI = GI = 1$, & ſi l'on nomme *l* la droite *Il* parallele aux ordonnées *P5M*, il eſt viſible que de même qu'on a trouvé dans les art. 33 & 35, l'égalité marquée par *(K)*, on trouvera ici l'égalité marquée dans la Table par *(3 K)*, dont les racines réelles donneront les points d'interſection de la courbe & de la droite $M\omega$.

Les choſes étant telles qu'on vient de les expoſer, il eſt viſible que dans les égalités marquées par *(2 K)* & par *(3 K)*, il y aura un certain nombre de racines réelles égales à zero, ſelon que le point *M* ſera ou un point ſimple, ou un point multiple, puiſque l'origine des coordonnées *MP (z) P5M (u)* eſt en *M*.

COROLLAIRE I.

L. Il ſuit de la remarque précedente, & de tout ce qu'on a dit juſqu'ici, 1.° Que le point *M* n'eſt qu'un point ſimple de la courbe *ZMNX2MV*, lorſque l'une des deux racines *GQ (R)** ou *GE (g)* eſt une racine ſimple, la premiére de l'égalité *(A)*, la ſeconde de l'égalité marquée par *(L)*, ce qui eſt connu de tout le monde. 2.° Que la droite *QM** eſt tangente, & la droite *EM* ſécante de la courbe au point *M*, lorſque *GE (g)* eſt une racine double de l'égalité marquée par *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'exprime qu'une racine ſimple de l'égalité marquée par *(A)*. 3.° Qu'au point *M* de la courbe *ZMV**, il y a une infléxion parallele à l'ordonnée principale *GL*, lorſque *GE (g)* eſt une racine triple de l'égalité *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'eſt qu'une racine ſimple de l'égalité *(A)*. 4.° Qu'au point *M* de la courbe *ZMV**, il y a une infléxion de la ſeconde eſpece à laquelle *QM* eſt tangente,

* *Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.*

* Fig. 21. *bis.*

* Fig. 22. *bis.*

* Fig. 21. *bis.*

tangente, lorsque *GE (g)* est une racine quadruple de l'égalité *(L)*, tandis que *GQ (R)* n'est qu'une racine simple de l'égalité *(A)*. 5.° Enfin, il est évident que quand *GQ (R)* n'exprime qu'une racine simple de l'égalité marquée par *(A)*, tandis que *GE (g)* exprime une racine multiple quelconque de l'égalité *(L)*, il est, dis-je, évident que le point *M* n'est qu'un point simple de la courbe *ZMV*, ou sans infléxion ou avec infléxion visible ou invisible : quand la racine multiple *GE (g)* est impaire, le point *M* est avec une infléxion visible ; quand elle est pair il est avec une infléxion invisible.

COROLLAIRE II.

LI. Il suit encore de tout ce qui a été dit jusqu'ici, que le point *M* est un point double, quand *GQ (R)* * exprime une racine double de l'égalité *(A)*, tandis que *GE (g)* exprime une racine double ou plus que double de l'égalité *(L)*. 1.° Si *GE (g)* n'est qu'une racine double, les droites *EM* & *QM* sont sécantes au point double *M**. 2.° Si *GE (g)* est une racine triple, la droite *EM* demeurant sécante au point double *M*, la droite *QM* est tangente de la courbe en ce même point double *M**. 3.° Si *GE (g)* est une racine quadruple, le point double *M* est de la seconde ou troisiéme espece, & la droite *QM* est tangente en *M* de la branche qui a une infléxion au point double *M**. 4.° Si *GE (g)* est une racine quintuple de l'égalité *(R)*, *GQ (R)* n'étant toûjours qu'une racine double de l'égalité *(A)*, le point double *M* est de la premiére espece, mais la branche à laquelle *QM* est tangente en *M*, a une infléxion de la seconde espece en ce même point double *M**, & ainsi des autres.

* *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*

* Fig. 25. & 26.

* Fig. 27.

* Fig. 28.

* Fig. 27.

REMARQUE.

LII. Les points doubles de la premiére espece, dont on a parlé dans l'article précédent, peuvent être sans rebroussement ou avec rebroussement, ou bien ils peuvent n'être que des ovales infiniment petites. Après s'être assûré par le

Corollaire précédent que le point *M* eſt un point double de la premiére eſpecé, on connoîtra ſi ce point double eſt ou un point d'interſection, ou un point de rebrouſſement, ou une ovale infiniment petite, en cherchant les tangentes de la courbe en ce point par la méthode de l'analyſe des Infiniment petits, jointe aux remarques, dont M.rs Bernoulli, Saurin & de Fontenelle l'ont enrichie : car la ſeconde différentiation de l'équation de la courbe marquée par *(D)* donnera une double valeur réelle de $\frac{ds}{dt}$ (c'eſt-à-dire, un double rapport réel de l'élement de l'ordonnée à l'élement de l'abſciſſe), ſi le point double *M* eſt un point d'interſection, au lieu que cette ſeconde différentiation ne donnera qu'une ſeule valeur de $\frac{ds}{dt}$, ſi le point *M* eſt un point de rebrouſſement, parce que les deux tangentes au point double *M* tomberont alors exactement l'une ſur l'autre *. Enfin cette ſeconde différentiation ne donnera que des valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, ſi le point double *M* eſt une ovale infiniment petite, parce qu'une ovale infiniment petite ne ſçauroit avoir de tangentes *. Il n'y a perſonne qui ne puiſſe éprouver, par des exemples connus, la vérité de cette regle : ainſi, ſans m'arrêter à en donner ici des exemples qui ſeront aſſés fréquents dans la ſuite de ce Traité, je vais continuer cette Théorie.

* *Art. 20. & 21.*

* *Art. id.*

COROLLAIRE III.

LIII. Il ſuit encore de tout ce qu'on a dit juſqu'ici, 1.° Que quand *GQ (R)* * & *GE (g)* ſont l'une & l'autre des racines triples, la premiére de l'égalité *(A)*, la ſeconde de l'égalité *(L)*, il ſuit, dis-je, que le point *M* eſt ou un point double auquel *QM* & *EM* ſont tangentes, ou un point triple auquel *QM* & *EM* ſont ſécantes. Dans cette circonſtance, il eſt viſible * qu'on connoîtra ſi le point *M* eſt double ou triple par le moyen de l'égalité marquée *(2 K)*, car ſi le point *M* n'eſt qu'un point double, l'égalité marquée par *(2 K)* n'aura que deux racines égales à zero, s'il eſt triple,

* *V. la Table à la fin de ce Memoire, & les Fig. 29. & 30.*

* *Art. 49.*

elle en aura trois. 2.° L'abſciſſe *GQ (R)* étant toûjours une racine triple de l'égalité *(A)*, ſi *GE (g)* eſt une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. & que l'égalité *(2K)* n'ait que deux racines égales à zero, le point *M** n'eſt toûjours qu'un point double, mais tel que la branche à laquelle *QM* eſt tangente a toûjours une infléxion viſible ou inviſible préciſément au point *M* où ſe fait l'interſection des deux branches. 3.° L'abſciſſe *GQ (R)* étant toûjours une racine triple de l'égalité *(A)*, & *GE (g)* une racine quadruple, quintuple, ſextuple, &c. de l'égalité *(L)*, ſi l'égalité *(2K)** a trois racines égales à zero, le point multiple *M* eſt toûjours un point triple, auquel *EM* & *GM* ſont ſécantes, tandis que *QM* eſt tangente d'une branche qui n'a point d'infléxion, ſi *GE (g)* eſt une racine quadruple : ou qui a une infléxion de la premiére eſpece en *M**, ſi *GE (g)* eſt une racine quintuple : ou une infléxion de la ſeconde eſpece en *M**, ſi *GE (g)* eſt une racine ſextuple, & ainſi de ſuite.

* Fig. 31. & 29.
* Fig. 32.
* Fig. 33.
* Fig. 32.

REMARQUE.

LIV. Après s'être aſſûré, par le Corollaire précédent, que le point *M* eſt un point triple, on connoîtra ſi ce point triple eſt une interſection de trois branches de la courbe ; ou s'il eſt accompagné d'un rebrouſſement, ou s'il eſt produit par l'adhéſion d'une ovale infiniment petite ſur une des branches de la courbe ; en différentiant trois fois (ſelon les méthodes de M.rs Bernoulli & Saurin) l'équation qui exprime la nature de la courbe : car la troiſiéme différentiation donnera trois valeurs de $\frac{ds}{dt}$, c'eſt-à-dire, trois valeurs réelles du rapport de l'ordonnée *QM* à la ſoutangente, ſi le point eſt un point d'interſection de trois branches, puiſqu'il y a trois tangentes réelles au point *M**; mais des trois valeurs réelles de $\frac{ds}{dt}$, il y en aura deux égales entr'elles, ſi le point triple *M* eſt accompagné de rebrouſſement, puiſqu'il doit y avoir alors deux des trois tangentes qui tombent exactement

* *Art.* 22. & 23.

* *Art. 22. & 23.* l'une ſur l'autre *; enfin la troiſiéme différentiation ne donnera qu'une ſeule valeur réelle & deux valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, ſi le point triple *M* eſt produit par l'adhéſion d'une ovale infiniment petite, puiſque dans cette derniére circonſtance il ne doit y avoir qu'une ſeule tangente réelle au point triple *M*, les deux autres devenant imaginaires *.

* *Art. id.*

COROLLAIRE IV.

LV. Il ſuit encore de tout ce qui a été dit ci-deſſus. Que quand *GQ (R)* & *GE (g)* * ſont l'une & l'autre des racines quadruples, la premiére de l'égalité *(A)*, la ſeconde de l'égalité *(L)*, il ſuit, dis-je, que le point *M* eſt 1.° ou un point double de la troiſiéme eſpece *, auquel *QM* & *EM* ſont tangentes, ou 2.° un point triple* auquel *QM* & *EM* ſont tangentes, ou 3.° un point quadruple auquel *QM* & *EM* ſont ſécantes *. Dans ces circonſtances il eſt viſible que ſe ſont les égalités *(2K)* & *(3K)* qui doivent déterminer la nature du point multiple *M*; car ſi l'égalité *(2K)* n'a que deux racines égales à zero, il eſt clair que le point *M* n'eſt qu'un point double de la troiſiéme eſpece ; ſi cette égalité *(2K)* a trois racines égales à zero , le point *M* eſt un point triple; mais ſi l'égalité *(2K)* a quatre racines égales à zero, le point *M* peut être, ou un point triple *, auquel *GM* ſeroit tangente, auſſi-bien que les droites *QM, EM;* ou bien un point quadruple * auquel *GM* ſeroit ſécante, auſſi-bien que les deux autres droites *QM, EM.* Dans cette derniére circonſtance, ſi l'égalité *(3K)* a trois racines égales à zero, le point *M* n'eſt qu'un point triple; ſi elle a quatre racines égales à zero, c'eſt un point quadruple auquel *QM, EM, GM* & *Mω* ſont ſécantes; ſi l'égalité *(3K)* a cinq racines égales à zero, le point multiple *M* eſt encore un point quadruple auquel *QM, EM* & *GM* ſont ſécantes, tandis que *Mω* eſt la tangente d'une des branches qui produiſent le point quadruple : ſi l'égalité marquée par *(3K)* a ſix racines égales à zero, ou ſept, ou huit, ou neuf, &c. le point multiple *M*

* *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*
* Fig. 37.
* Fig. 38.
* Fig. 35.
* Fig. 36.
* Fig. 35.

eſt toûjours un point quadruple auquel QM, EM & GM ſont ſécantes, & $M\omega$ tangente, mais la branche à laquelle $M\omega$ eſt tangente a une infléxion viſible ou inviſible préciſément au point M où ſe fait l'interſection, & c'eſt une infléxion viſible, ſi les racines de l'égalité $(3K)$ qui ſont égales à zero, ſont au nombre de ſix, huit, dix, douze, &c. & c'eſt une infléxion inviſible, ſi ces égalités ſont en nombres impairs ſept, neuf, onze, &c.

SCHOLIE.

LVI. De tout ce qui vient d'être dit, il eſt aiſé de déduire une théorie générale pour connoître ſi un point donné M d'une ligne algébrique donnée $ZMNX2mV$ eſt 1.° un point ſimple, double, triple, quadruple, quintuple, &c. 2.° De quelle eſpece de multiplicité il eſt : s'il eſt double de la premiére, ſeconde ou troiſiéme eſpece : s'il eſt triple de la premiére, ſeconde, troiſiéme ou quatriéme eſpece : s'il eſt quadruple de la premiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme ou cinquiéme eſpece : & ainſi des autres points multiples à l'infini. 3.° Si c'eſt un nœud, ou un point de rebrouſſement, ou une ovale infiniment petite; ſi outre le nœud, il y a un point de rebrouſſement de deux autres branches, ou s'il y a une ovale infiniment petite adhérante, & ainſi des autres. Mais comme les lignes du quatriéme ordre, dont j'ai à traiter ici, ne ſçauroient avoir ni points triples de la ſeconde & troiſiéme eſpece, ni points quadruples, ni points quintuples : en un mot, comme les lignes du quatriéme ordre ne peuvent avoir que des points doubles de toutes les eſpeces, ou au plus un ſeul point triple, je m'abſtiens de pouſſer cette théorie plus loin, perſuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a perſonne qui ne puiſſe déduire, des principes qui viennent d'être établis, toutes les conſéquences qui peuvent ſervir à cette théorie. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire pour en faire le détail : cependant avant de le finir, je crois qu'il eſt à propos de faire quelques remarques au ſujet des points multiples inviſibles du premier & du ſecond genre;

c'eſt-à-dire, au ſujet des ovales infiniment petites conjuguées, & des ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe.

REMARQUE I.

* *Art. 12.* LVII. On a dit dans la 8.e définition * nombre 3, que l'ovale infiniment petite ou point conjugué devoit être mis au rang des points doubles. Le célébre Chevalier Newton l'a dit auſſi dans ſon énumération des lignes du troiſiéme ordre, & c'eſt après ce grand homme que j'ai crû pouvoir le ſuppoſer; néantmoins ayant donné des regles dans ce Mémoire, pour reconnoître les points doubles d'avec les points ſimples & les autres points multiples, & pour connoître ces points doubles les uns des autres, j'ai crû qu'on ne me ſçauroit pas mauvais gré, ſi par maniére de digreſſion, je fais voir l'application de ces regles au point conjugué, ou ovale infiniment petite, ſur un exemple déja connu.

EXEMPLE.

* *Fig. 20.* LVIII. On demande ſi la courbe, dont la nature eſt exprimée par cette équation $pyy - 2cpy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & quelle eſt la nature de ce point double, ſi c'eſt un point d'interſection de deux branches, un point de rebrouſſement, ou ſi c'eſt un point conjugué (l'indéterminée (x) repréſente les abſciſſes AP, & l'indéterminée (y) les ordonnées PZ de cette courbe).

1.° Quand $AP(x) = a$, il reſte l'égalité $pyy - 2cpy + pcc = o$, dont les deux racines ſont $y = c$, $y = c$; & cette valeur de l'indéterminée (y) étant ſubſtituée dans l'équation de la courbe, il vient l'égalité $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = o$, qui a trois racines réelles, dont deux ſont égales entre elles, & de même ſigne, ces deux racines égales ſont $x = a$, $x = a$. Or (*par l'art. 51*) quand les égalités déſignées par (L) & par (A), (qui ſont ici les égalités $pyy - 2cpy + pcc = o$, & $x^2 - 4ax^2 + 5aax - 2a^3 = o$) ont l'une & l'autre

deux racines réelles, égales & de même ſigne, la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation (D), qui dans cet exemple particulier eſt réduite à l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & à ce point double, l'abſciſſe $AP\ (x)$ eſt à l'ordonnée $PZ\ (y) :: a : c$; donc, ſi l'on prend $AB = a$, & ſur la droite BM, parallele à l'ordonnée principale GL, la partie $BM = c$, le point M ſera le point double de la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$. *Ce qu'il falloit montrer en premier lieu.*

2.° Pour connoître maintenant la nature de ce point double M, c'eſt-à-dire, s'il eſt un point d'interſection, ou un point de rebrouſſement, ou une ovale infiniment petite *, on différentiera deux fois l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, ſuivant l'art. 163 de l'analyſe des Infiniments petits, & les méthodes de M. Bernoulli, & la ſeconde différentiation donnera $pdy^2 = 3xdx^2 - 4adx^2$, d'où l'on tire $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3x - 4a}{p}$, & enſuite $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{3x - 4a}}{\sqrt{p}}$. Mais au point double M, on a $x = a$ * : Donc, en ce point double M, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$. Or $\sqrt{-a}$ eſt une grandeur imaginaire; donc au point double M, les tangentes de la courbe ſont imaginaires, quoique les coordonnées GB, BM ſoient réelles : donc * ce point double M eſt une ovale infiniment petite, ou un point conjugué. *En effet cette courbe eſt celle qui, dans l'énumération des lignes du troiſiéme ordre de M. Newton, eſt la 69.ᵉ eſpece, que ce célébre Géométre dit avoir un point conjugué : j'ai préféré cet exemple, quoique connu, & pris parmi les lignes du troiſiéme ordre, afin de faire voir la liaiſon de mes principes, avec les vérités qui ont été publiées par d'autres.*

* *Art. 52.*

* *Par le nombre précédent du préſent article.*

* *Art. 20. & 21.*

REMARQUE II.

LIX. On a dit dans la neuviéme définition *, que l'ovale

* *Art. 13.*

infiniment petite conjuguée, étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite, au lieu d'être conjuguée, est adhérante à une des branches de la courbe, elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérante à la courbe: & on l'a nommée *point triple invisible*, par la raison que l'on ne voit pas, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause la triplicité de ce point qui n'est sensible que dans l'équation de la courbe ; je ne crois pas que personne ait jamais parlé de ces especes de points triples, c'est ce qui m'engage à m'étendre un peu sur leur formation.

Cette singularité, qui ne se rencontre pas dans les lignes qui sont au dessous du quatriéme ordre, vient de ce que les lignes du quatriéme ordre & celles d'un ordre supérieur peuvent avoir sur une même branche finie ou infinie $AMmZ$*, une ovale $M\phi m\delta\epsilon M$ coupée par cette branche en deux points M & m. Cette ovale, qu'on peut nommer *ovale adhérante*, fait partie de la courbe à laquelle elle est adhérante, & les points M & m, où elle est coupée par la branche finie ou infinie $AMmZ$, sont les points doubles de la courbe $ZmMANnXV$ à laquelle elle appartient, dont on suppose ici que GQ est l'axe, & GL l'ordonnée principale.

* Fig. 39.

Soit δ le point de l'ovale adhérante où la tangente est parallele à l'axe : ϕ le point de cette même ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, ensorte que la droite $Q\delta$ soit le *maximum* de l'ovale, parallele à l'ordonnée principale, & la droite $E\phi$ son *maximum* parallele à l'axe : soit de plus la droite indéfinie GM menée par les points G & M, il est constant que cette droite GM doit couper l'ovale, non seulement au point M, mais encore en un autre point comme γ, puisque cette ovale est une portion de courbe rentrante en elle-même.

Si l'on conçoit maintenant que les droites $M\delta$ & $M\phi$ deviennent infiniment petites, il est constant que les points M & δ, M & ϕ, seront infiniment près l'un de l'autre, aussi-bien que les points M & m & les points M & γ : en un mot il est clair que l'ovale sera infiniment petite, & qu'elle n'occupera

n'occupera plus ſur la branche $AMmZ$ qu'un eſpace infiniment petit, enſorte qu'elle ſera inviſible ſur le plan.

Néantmoins la droite $Q\delta$ coupera toûjours la courbe & au point M où eſt le nœud, & au point δ qui ſera infiniment près de M: de même $E\phi$ coupera la courbe & au point double M & au point ſimple ϕ, qui ſera infiniment près de M. D'où il ſuit 1.° que la droite $GE(g)$ ſera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (L)*, ſçavoir à deux racines égales à cauſe du nœud M, & à une troiſiéme racine qui ne différera des autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\delta = Ee$, c'eſt-à-dire, qui dans le fini n'en différera point. Par la même raiſon la droite $GQ(R)$ ſera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (A)*, dont deux ſeront correſpondantes au nœud M, & la troiſiéme au point ϕ, laquelle par conſéquent ne différera des deux autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\phi = Qq$, c'eſt-à-dire, qu'elle n'en différera point dans le fini, enſorte qu'il y aura dans l'égalité (A) trois racines parfaitement égales.

* *Art.* 49. *Voyés la Table.*

* *Art. id.*

Enfin ſi l'on tranſporte l'origine des coordonnées de G en M pour avoir, au lieu de l'équation qui ſe rapporte à l'équation générale marquée par (D), celle qui ſe rapportera à l'équation générale marquée par (Δ)*, & que de cette derniére équation on en déduiſe, ſuivant ce qui eſt dit ci-deſſus, l'égalité marquée par $(2K)$*, dont les racines donnent les points d'interſection de la courbe $ZmMANnXV$ & de la droite GM, il eſt clair que cette égalité $(2K)$ aura trois racines égales à zero; ſçavoir deux, à cauſe du point double M, où la droite GM coupe la courbe, & une troiſiéme, à cauſe du point γ qui n'eſt diſtant de M, origine des u & des z, que d'une grandeur infiniment petite.

* *Art. id. V. la Table.*

* *Art. id.*

Ainſi, dans les lignes du quatriéme ordre, ou d'un ordre ſupérieur au quatriéme, qui ont des ovales infiniment petites adhérantes à une de leurs branches, les équations algébriques, qui expriment la nature de ces courbes, doivent faire connoître l'éxiſtence & la ſituation de ces ovales par des

ſymptomes, s'il eſt permis de parler ainſi, pareils à ceux des courbes qui ont des points triples, dont la triplicité dépend de l'interſection de trois branches finies ou infinies de la même courbe, *ce que j'avois à faire remarquer ici pour ne laiſſer aucun doute ſur la neuviéme définition.*

EXEMPLE.

* Fig. 39. LX. Soit la courbe $ZmMANnXV$*, dont la nature eſt exprimée par l'équation marquée par le chiffre *(1)*

$$(1)\ldots ay^3 - 3aey^2 - acyy + 3aeey + 2acey - ae^3 - ace^2 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}abx^2 + \tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{12}a^4 - \tfrac{1}{6}ba^3 - \tfrac{2}{3}ax^3$$

dans laquelle on ſuppoſe $c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$ & $a > b$.

La droite GQ, qui s'étend à l'infini de part & d'autre du point G, eſt l'axe de la courbe ſur laquelle on prend les x poſitifs du côté de Q, & les x négatifs du côté de B : la droite GL, qui coupe GQ à angle quelconque au point G, eſt l'ordonnée principale de la courbe, ou l'axe des y : l'origine de ces indéterminées x & y eſt en G.

Cette courbe n'a que deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de la droite GL, & ces deux branches ſe réüniſſent en A, où la courbe coupe l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ : la branche $ZmMA$, qui s'étend à l'infini du côté des x poſitifs, eſt chargée d'une ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$, qu'elle traverſe de M en m : la branche $ANnXV$, qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, forme deux *ſinuoſités* KNn, NnX, dont les ſommets N & n ont des tangentes NB, nb, paralleles à l'ordonnée principale GL.

Après avoir pris du côté où les x ſont poſitifs $GQ = a$, $G2Q = a + b$, $Gq = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $G2q = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, & du côté où les x ſont négatifs, $GB = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $Gb = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$

$\sqrt{4aa-2ab-2bb}$, on élevera des points Q, $2Q$, q, $2q$, les quatres droites $Q\delta$, $2Qm$, $q\pi$ & $2q\varepsilon$ paralleles à l'ordonnée principale GL, & ensuite des points B & b les droites BX, bn, paralleles aux premiéres; cela fait, si l'on prend sur la droite $Q\delta$ la partie $QM=e$, le point M sera un de ceux où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: si l'on prend $M\delta$ (de l'autre côté du point M par rapport au point Q) tel que $M\delta$, soit $=c=\frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$, le point δ sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe: si l'on prend, sur la droite $2Qm$, le point m, tel que $2Qm=e+\frac{2}{3}c$, ce point m sera le 2[d] point où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\varepsilon M$: & si, sur cette même droite $2QM$, on prend $2Q\mu=e-\frac{1}{3}c$, le point μ sera l'autre point de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe; enfin, si par les points M & m, on tire les droites $M\phi$, $m\varepsilon$, paralleles à l'axe GQ, le point ϕ où la premiére droite $M\phi$ coupera la droite $q\pi$, sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point ε où la seconde droite $m\varepsilon$ coupe la droite $2q\varepsilon$, sera le second point de l'ovale où la tangente est parallele à la même ordonnée principale GL, c'est-à-dire, que $q\phi$ & $2q\varepsilon$ seront tangentes de l'ovale, l'une au point ϕ, l'autre au point ε, ensorte que si l'on prolonge les tangentes de l'ovale aux points δ & μ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite $q\pi$, l'une au point π, l'autre au point ξ, l'ovale se trouvera renfermée d'un côté entre les droites $2q\varepsilon$, $q\pi$, & de l'autre entre les droites $\delta\pi$, $\mu\xi$.

Si l'on prend sur la droite BX la partie $BN=e$ & la partie $BX=e+c$, le point N sera le sommet de la premiére sinuosité KNn de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point X sera l'extrémité de la seconde sinuosité NnX de la même branche $ANnXV$: de même si l'on prend sur la droite bn la partie $bn=e+\frac{2}{3}c$, & la partie $bK=e-\frac{1}{3}c$,

le point n sera le sommet de la seconde sinuosité NnX de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL, & le point K sera l'extrémité de la premiére sinuosité KNn de la même branche $ANnXV$. Enfin si du point E, où la droite MN, parallele à l'axe, coupe l'ordonnée principale GL, on prend, sur cette même droite GL, la partie EA égale à la racine réelle de cette égalité $W^3 - cW^2 + \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{6}aab = 0$, en allant de E vers G, parce que cette racine est négative, on aura le point A, où les deux branches $ZmMA$, $VXnNA$, s'unissent, en coupant l'ordonnée principale GL parallelement à l'axe GQ.

Tout cela n'est qu'une suite des principes qu'on a démontrés jusqu'ici, le calcul même n'en est pas fort difficile, je l'obmets ici (parce qu'il ne serviroit qu'à allonger) pour en venir à la formation des *points triples invisibles*.

Tout ce qu'on vient de dire étant donc supposé, il est visible que la grandeur de l'ovale $M\varphi m\delta\varepsilon Me$ dépend des grandeurs de la droite $M\varphi$ $(\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb})$ & de la droite $M\delta$ $(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18aa}}{2\sqrt[3]{2a}})$. Ces droites étant donc, pour ainsi dire, les parametres de cette ovale, si la droite $Q2Q$ (b) est supposée infiniment petite, $M\varphi$ devient en même temps infiniment petite : car $Q2Q$ (b) étant alors $= 0$ par rapport à GQ (a), on a $M\varphi = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = 0$, la droite $M\delta$ $(c = \frac{b\sqrt[3]{9b + 18a}}{2\sqrt[3]{2a}})$ devient aussi infiniment petite ou égale à zero par rapport à GQ (a) : ainsi l'ovale $M\mu\varphi m\delta\varepsilon M$ devient une ovale infiniment petite, mais
* Fig. 40. elle demeure toûjours adhérante à la branche $AMmZ$*.

A l'égard de ce qui arrive à la branche $ANnXV$, quoique cela ne soit pas du sujet dont nous traitons dans cet article, il n'est pas hors de propos de faire remarquer, en passant, que les deux sinuosités KNn, NnX, deviennent infiniment petites, & se changent en une infléxion parallele à l'ordonnée

principale : mais je m'attache uniquement ici à la branche $ZmMA$, ſur laquelle l'ovale (comme on a déja dit) devient infiniment petite, & par conſéquent inviſible ſur le plan.

Quoique cette ovale ſoit inviſible, il en reſte des marques dans l'équation : en effet lorſque $Q2Q(b)$ devient $= 0$, par rapport à $GQ(a)$, l'équation de la courbe $ZmMANnXV$ ſe change en celle qu'on voit ici marquée par (2)

(2)... $ay^3 - 3aeyy + 3aeey - ae^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a^4$,

tous les termes, où les coëfficients b & c ſe rencontrent, devenant infiniment petits & par conſéquent égaux à zero par rapport aux autres.

Maintenant ſi on cherche quelle doit être la valeur de GE ou $QM(y)$ au point Q, auquel $x = a$, on trouve * l'égalité (L) qui eſt du troiſiéme degré, & qui a par conſéquent trois racines; * Art. 49. V. la Table.

(L)... $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$

Ces trois racines ſont réelles & égales entre elles, étant $y = e$, $y = e$, $y = e$; d'où il ſuit que $GE(g) = e$ eſt une racine triple de l'égalité (L), ce qui dénote en M*, ou un point d'infléxion parallele à l'ordonnée principale, auquel QM ſeroit tangente, ou un point double * auquel QM eſt tangente, ou bien un point triple * auquel QM eſt ſécante. Mais ſi l'on ſubſtituë dans l'équation (2), au lieu de l'indéterminée (y) ſa valeur e, pour connoître * la nature du point M, on trouve l'égalité (A), qui étant du quatriéme degré, doit avoir quatre racines réelles ou imaginaires. * Art. 8. n. 3. * Art. 19. n. 1. * Art. 18. n. 2. * Art. 49. V. la Table.

(A)... $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a^4 = 0$.

Ces quatre racines ſont réelles, & il y en a trois égales entre elles, & une quatriéme qui eſt inégale, car cette égalité donne $x = a$, $x = a$, $x = a$, & $x = -\frac{1}{3}a$; d'où il ſuit que $GQ(R) = a$ eſt une racine triple de l'égalité (A), & qu'il y a de l'autre côté de G une valeur de (x) qui eſt égale à $\frac{1}{3}GQ$, laquelle correſpond à une racine triple de l'égalité (L), & par conſéquent qu'il y a en N* une infléxion parallele à l'ordonnée principale. *Ce que je remarque ſeulement en paſſant*. * Art. 50.

pour faire voir l'usage des regles qu'on a données ci-devant. Revenons au point M dont il faut faire connoître la nature.

On a trouvé que GE $(g) = e$ est une racine triple de l'égalité (L); d'où l'on a conclu que le point M pourroit être, ou un point, dont l'infléxion seroit parallele à l'axe, ou un point double auquel QM seroit tangente, ou un point triple auquel QM seroit sécante. Mais GQ $(R) = a$ est aussi une racine triple de l'égalité (A), donc, 1.° le point M ne sçauroit être un simple point d'infléxion, (car il faudroit pour cela que GQ (a) ne fût qu'une racine simple de l'égalité marquée

* Art. 50. n. 3. par (A))*; 2.° ce même point M ne sçauroit être un point double avec rebroussement, (car GQ (a) ne seroit alors qu'une

* Art. 51. racine double * de l'égalité (A)). Donc il ne peut être qu'un point double sans rebroussement, auquel QM & EM se-

* Art. 53. roient tangentes *, ou bien un point triple auquel QM & EM seront sécantes.

Pour connoître maintenant si ce point M est un point double, ou un point triple, on transportera l'origine des indéterminées de G en M, en prenant $u = y - e$, & $z = x - a$, ce qui transformera l'équation (2) en celle que l'on voit ici marquée par (Δ).*

* Art. 49. V. la Table.

$$(\Delta) \ldots 4au^3 = z^4 + \tfrac{4}{3}az^3.$$

Cela fait, par les points G & M, on tirera la droite GM,

* Art. 33. & 49. qui coupera la courbe en autant de points * qu'il y a de racines réelles dans l'égalité $(2K)$ en y comprenant les points

$$(2K) \ldots \left.\begin{matrix} z^4 + \tfrac{4}{3}az^3 \\ -4ah^3z^3 \end{matrix}\right\} = 0$$

doubles pour deux points, & les points triples pour trois.

Dans cette égalité (qui est donnée par la comparaison des triangles semblables GIK, $MP5M$, & dans laquelle IK

* Art. 49. V. la Table. $(h) = \frac{e}{a}$) * les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = 0$, & $z = -\frac{4}{3}a + \frac{4e^3}{aa}$, ensorte qu'elle a trois de ces racines qui sont égales à zero; d'où il suit que la droite GM sécante en M ne sçauroit y être sécante en un point double, (car il

ſaudroit pour cela * qu'il n'y eût dans l'égalité *(2K)* que deux racines égales à zero), donc le point *M* eſt un point triple, auquel *QM, EM,* & *GM* ſont ſécantes *. *Art. 53. n. 1. *Art. id.

Mais on a vû ci-devant qu'en ce point *M,* il y a une ovale infiniment petite adhérante à la courbe, qui eſt inviſible ſur le plan : donc l'ovale infiniment petite, adhérante à une des branches de la courbe eſt déſignée dans l'équation, qui exprime la nature de la courbe, par les mêmes ſymptômes que le point triple. Donc ces ovales infiniment petites adhérantes ſont des eſpeces de points triples inviſibles. *Ce qu'il falloit faire connoître par cet exemple.*

Les points triples inviſibles ou ovales infiniment petites adhérantes à une des branches de la courbe, ont tant de rapport avec les points triples viſibles, formés par l'interſection de trois branches finies ou infinies de la même courbe; que ſi l'on cherche la tangente de la courbe au point où la triplicité eſt inviſible, il faudra différentier trois fois, conformément à l'article 46, pour avoir le rapport du *dx* au *dy;* il s'agit donc de vérifier cette propoſition par ce même exemple.

Soit donc toûjours la courbe Z*MANV**, dont la nature eſt exprimée par l'équation marquée par *(2)* *Fig. 40.

$$(2)\ldots ay^3 - 3aey^2 + 3aeey - ae^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}a^2xx - \tfrac{1}{12}a^4.$$

En différentiant cette équation, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2axx + aax}{3axyy - 2ey + ee}$: ſi on demande le rapport de dx à dy au point *M,* où l'on a trouvé $x = a$, & $y = e$, il eſt viſible que la ſubſtitution de x & de y dans la différentielle précédente donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, d'où il ſuit (par l'art. 163 de l'analyſe des Infinim. petits) qu'il faut différentier ſéparément le numérateur & le dénominateur de cette fraction, cette ſeconde différentiation donne $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3xx - 4ax + aa}{6axy - e}$: ſi on ſubſtituë dans cette ſeconde différentielle, au lieu de x & de y, leurs valeurs au point *M,* on aura encore $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0}{0}$, d'où il ſuit qu'il faut différentier

une troisiéme fois, suivant les méthodes de M.[rs] Bernoulli & Saurin, cette troisiéme différentiation donne $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6x - 4a}{6a}$: si on substituë dans cette troisiéme différentielle, la valeur de x au point *M*, c'est-à-dire, a au lieu de x, on aura $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6a - 4a}{6a} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, qui fait connoître enfin que l'ordonnée *QM* au point *M* est à la soûtangente *QT* en ce même point *M*, comme 1 est à $\sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire, que $QT = e\sqrt[3]{3}$. Mais pour trouver cette valeur de la soûtangente *QT*, il a fallu différentier trois fois, comme s'il y eut eû trois branches qui se fussent rencontrées en *M*. Donc pour trouver la valeur de la soûtangente au point triple invisible *M*, il faut faire les mêmes opérations que pour le point triple visible. *Ce que je m'étois proposé de faire connoître en second lieu par cet exemple.*

Avant de finir cet article, il ne faut pas oublier de remarquer que la troisiéme différentiation n'ayant fourni ici, au point *M*, que l'égalité $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$, qui ne sçauroit avoir qu'une seule racine réelle, il s'ensuit qu'il n'y a au point *M*, qu'une seule tangente, ce qui est encore une nouvelle preuve qu'il n'y passe qu'une seule branche de la courbe *ZMANV*. D'où l'on voit la différence qu'il y a entre un point triple invisible, & un point triple visible. Car si ce point triple *M* eût été formé par la rencontre de trois branches finies ou infinies de la courbe, la troisiéme différentiation auroit fourni une égalité du troisiéme degré qui auroit eû trois racines réelles, à cause des trois tangentes qui se seroient rencontrées au point *M*. *Différence que je m'étois proposée de faire remarquer en dernier lieu par cet exemple.*

EXAMEN

EXAMEN CHYMIQUE DES VIANDES

Qu'on employe ordinairement dans les Boüillons ;

Par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Boüillon doit contenir de suc nourrissant.

Par M. GEOFFROY le Cadet.

DE tous les Aliments, ceux qu'on tire des Végétaux devroient être les plus convenables aux malades, parce qu'ayant des principes moins développés, ils semblent être les plus analogues à la Nature, comme M. Lémery l'a prouvé dans un de ses Mémoires; cependant le boüillon fait avec les Viandes, est la nourriture que l'usage a établi, & qui passe généralement pour la plus saine & la plus nécessaire dans les cas de maladie, où elle est presque toûjours la seule employée.

Ce n'est que par l'examen des principes, que cette nourriture contient, qu'on peut être en état de la donner avec discernement, afin de ne pas courir le risque de la prescrire trop forte dans les circonstances où la diéte exacte est quelquefois le seul remede; ni trop foible, lorsque le malade exténué par une longue maladie, a besoin d'une nourriture, augmentée par degrés, pour réparer ses forces. C'est pour parvenir à des éclaircissements utiles sur cette proportion, que j'ai fait l'analyse des Viandes qui sont le plus d'usage, ou qui contiennent un suc nourrissant regardé comme salutaire; telles que le Bœuf, le Veau, le Poulet, &c. Je n'ai entrepris cette recherche que parce que l'analyse des Viandes n'a pas été portée aussi loin que celle des Plantes.

Feu M. Dodart, dont la mémoire est si respectable à l'Académie, & dont l'extrême exactitude est si connuë, s'est

contenté de dire en 1702*, qu'il tenoit de feu M. Bourdelin, que les chairs des Animaux boüillies en consommé, & ensuite mises à la distillation, ne rendoient pas moins de Sel volatil que si elles avoient été distillées cruës. Comme il paroît qu'on a négligé de déterminer la quantité d'extrait que ces consommés laissoient après l'évaporation, & ce que les Viandes pourroient avoir communiqué de leurs principes à l'eau, dans laquelle on les avoit fait boüillir; j'ai repris ce travail, afin d'ajoûter aux analyses déja connuës, cette partie négligée, qui est l'objet de ce Mémoire. Je me suis proposé d'y faire connoître la quantité & la qualité des principes des chairs cruës mises en distillation; ce qu'elles fournissent de principes aux extraits solides qu'on en tire par l'ébullition & l'évaporation; la différence essentielle des Sels volatils qu'on en tire; ce que les chairs dépoüillées de leurs sucs & séchées contiennent encore de principes: enfin je déterminerai dans un autre Mémoire, ce que les os & les matiéres osseuses peuvent fournir, dans la cuisson, d'extrait nourrissant.

* *Hist. de l'Acad. des Sc. année 1702. p. 43.*

CHAIR DE BOEUF.

Je commencerai par la chair de Bœuf: j'en ai pris une grosse piéce de tranche, dont j'ai fait ôter la graisse, les os, les cartilages & les membranes; de cette piéce de Bœuf j'ai fait couper plusieurs morceaux d'un poids égal de 4 onces. L'un de ces morceaux a été mis en distillation au Bain-Marie sans aucune addition. Il a fourni 2 onces 6 gros 36 grains de flegme ou d'humidité qui a passé dans le récipient. La chair restée séche dans la cornuë, s'est trouvée réduite au poids d'une once 1 gros 36 grains. Le flegme avoit l'odeur de boüillon; il a donné des marques de Sel volatil, puisqu'il a précipité en blanc la dissolution du Mercure sublimé corrosif, comme les purs Sels volatils ont coûtume de le faire, & le dernier flegme de la distillation en a donné des marques encore plus sensibles, en précipitant une plus grande quantité de la même dissolution.

Cette chair desséchée, qui pesoit 1 once 1 gros 36 grains,

ayant été miſe dans une cornuë au fourneau de reverbere pour l'analyſer, m'a donné d'abord un peu de flegme chargé d'Eſprit volatil, qui peſoit 1 gros 4 grains : enſuite 3 gros 46 grains de Sel volatil & d'Huile fétide épaiſſe qui n'a pû s'en ſéparer.

La Tête-morte ou la matiére reſtée dans la cornuë, peſoit 3 gros 30 grains : c'étoit un charbon noir, luiſant & léger qu'on a calciné dans un creuſet à feu très-violent ; la calcination l'a réduit en cendres, qui peſoient 40 grains. Ces cendres expoſées à l'air ſe ſont humectées, & ont augmenté de poids. Elles ont été leſſivées, & l'eau de leur leſſive éclaircie, n'a point donné de marques de Sel alkali, mais de Sel marin, puiſqu'elle a précipité en blanc la diſſolution du Mercure dans l'Eſprit de Nitre. Elle n'a cauſé aucun changement à la diſſolution du ſublimé corroſif, ſi ce n'eſt qu'après quelque temps de repos, il s'eſt formé au bas du vaiſſeau une eſpece de nuage, en forme de Coägulum leger : or nous ne connoiſſons juſqu'à preſent que les Sels qui ſont de la nature du Sel ammoniac ou le Sel marin, qui précipitent en blanc la diſſolution de Mercure par l'Eſprit de Nitre, & ſeulement les terres abſorbantes animales que j'ai obſervé précipiter legérement la diſſolution du ſublimé corroſif.

Sur 4 onces de chair de Bœuf ſéchée au Bain-Marie, j'ai verſé autant d'Eſprit de Vin bien rectifié ; le tout eſt demeuré en digeſtion pendant un très-long-temps, l'Eſprit a tiré de cette Viande une foible teinture, il en a détaché quelques gouttes d'huile, la couleur qu'il a priſe, étoit rouſſe avec une odeur fade : l'Huile de Tartre mêlée avec cet Eſprit en a développé une odeur urineuſe, ſon mêlange avec la diſſolution de Mercure par l'Eſprit de Nitre a blanchi, il s'y eſt fait un précipité blanc-jaunâtre; puis cette liqueur eſt devenuë ardoiſée, à cauſe du Sel ammoniacal urineux, dont l'Eſprit de Vin s'étoit imbu. L'eſſai de cet Eſprit de Vin, mêlangé avec la diſſolution du ſublimé corroſif, a produit un précipité blanc, qui eſt devenu un peu jaune ; cette

précipitation ne s'eſt faite dans ce dernier cas, que par le déve-loppement d'une portion du Sel volatil urineux, qui a paſſé dans l'Eſprit de Vin avec le Sel ammoniacal.

Quatre onces de pareille chair de Bœuf ayant été cuites dans un vaiſſeau bien fermé, avec trois chopines d'eau, & la cuiſſon ayant été répétée ſix fois avec pareille quantité de nouvelle eau, pour tirer autant qu'il étoit poſſible tout le ſuc de cette Viande; j'ai raſſemblé tous ces boüillons, dont les derniers n'avoient plus qu'une odeur d'eau de Veau très-légére. Je les ai fait évaporer à feu lent, je les ai filtrés vers la fin de l'évaporation, pour en ſéparer une portion terreuſe, & il eſt reſté dans le vaiſſeau un extrait médiocrement ſolide, qui s'humectoit à l'air très-facilement, & qui s'eſt trouvé peſer 1 gros 56 grains. Ainſi il réſulte de cette expérience que puiſque 4 onces de Bœuf boüilli donnent 1 gros 56 grains d'extrait, une livre de ſemblable chair de Bœuf boüillie doit fournir 7 gros 8 grains de pareil extrait, plus 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, & 3 onces 2 gros de fibres dépoüillées de tout leur ſuc. Ce produit peut varier ſelon que l'animal aura été bien ou mal nourri dans de bons ou de mauvais herbages. Il peut varier auſſi, ſi la chair que l'on choiſit pour l'expérience eſt plus ou moins fraîche. Il faut remarquer que le boüillon fait d'une bonne chair de Bœuf, ne ſe met preſque jamais en gelée, ſi l'on ôte de la chair, les membranes, les tendons & les cartilages. Or j'entends par gelée, non l'extrait ci-deſſus, mais le boüillon qui ſe met de lui-même en une maſſe claire & tremblante lorſqu'il eſt froid.

L'extrait de cette chair de Bœuf, qui peſoit 1 gros 56 grains, a fourni dans ſon analyſe 1 gros 2 grains de Sel volatil, attaché aux parois du Récipient, non pas en ramifications, comme le ſont ordinairement les Sels volatils, mais en criſtaux plats, formés la plûpart en parallelepipedes; l'Eſprit & l'Huile qui ſont venus enſemble après le Sel volatil peſoient 38 grains. Le Sel fixe de Tartre, mêlé avec ce Sel volatil, a paru augmenter ſa force, ce qui pourroit faire

ſoupçonner ce dernier d'être un Sel ammoniacal urineux; & ce ſoupçon eſt d'autant mieux fondé, que les criſtaux de ce Sel volatil ſe forment à peu-près comme ceux du Sel volatil de l'Urine, qu'on ſçait être différents des autres Sels volatils tirés des chairs des animaux.

La Tête-morte ou le charbon reſté dans la cornuë étoit très-rarefié & très-leger, il ne peſoit plus que 6 grains. Sa leſſive a précipité en blanc la diſſolution du Mercure comme a fait la leſſive de la cendre de chair de Bœuf cruë, dont j'ai parlé ci-deſſus.

Les 6 gros 36 grains de la maſſe des fibres de Bœuf deſſéchées, analyſées de la même façon, ont rendu 2 gros d'un Sel volatil de la forme des Sels volatils ordinaires, & qui s'eſt attaché aux parois du Récipient en ramifications, & mêlé d'un peu d'Huile fétide aſſés épaiſſe, mais moins brune que celle de l'extrait qui a été tirée du boüillon. L'Eſprit qui étoit de couleur citrine, ſéparé de ſon huile, a peſé 36 grains. La Tête-morte peſoit 1 gros 60 grains.

La leſſive qu'on a faite après la calcination n'a pû altérer la diſſolution du Mercure par l'Eſprit de Nitre, parce que lorſqu'on a analyſé ces fibres de Bœuf deſſéchées, elles étoient déja dénuées, non-ſeulement de tout leur Sel eſſentiel ammoniacal, mais encore de leur Sel fixe qui eſt de nature de Sel marin; puiſqu'elles ont paſſé pour la plus grande partie avec les Huiles dans l'eau pendant la longue ébullition de cette chair. Cette leſſive a ſeulement teint légérement de couleur d'Opale, la diſſolution du ſublimé corroſif, preuve qu'il y reſtoit encore une portion huileuſe : on ſçait que les matiéres ſulphureuſes précipitent cette diſſolution en noir ou plûtôt en violet foncé, dont la couleur d'Opale eſt un commencement.

On connoît donc par l'analyſe de l'extrait des boüillons, que je viens de rapporter, qu'il paſſe dans l'eau pendant l'ébullition de la chair de Bœuf un Sel ammoniacal qu'on peut regarder comme le Sel eſſentiel de cette Viande, & qui paroît dans la diſtillation de l'extrait ſous une forme différente de celui qu'on retire de la chair, lorſqu'on la diſtille cruë,

comme on a fait dans les analyses anciennes, & il y a apparence que c'est ce même Sel qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, puisque le Sel volatil que j'ai retiré de cet extrait a beaucoup de rapport, comme je l'ai fait voir, avec celui qu'on retire de l'Urine par son analyse. Le Sel que l'on tire de l'extrait sera donc le produit de ce Sel ammoniacal naturel dans les Viandes, qui est plus facile à sublimer avec celui qui se tire ensuite des fibres: & l'on peut dire, après cette opération, que les Sels volatils sont presque toûjours un produit du feu, puisque des principes si peu sensibles ne peuvent se développer qu'autant que la matiére se brûle & se calcine par la violence du feu pour former le Sel volatil.

J'ai détaillé mes opérations sur la chair de Bœuf, pour rendre un compte exact de mon travail, qui a été le même sur toutes les autres Viandes que j'ai examinées. Je ne repeterai point ces procedés dans la suite de ce Mémoire, de crainte d'être trop long.

CHAIR DE VEAU.

Quatre onces de chair, prise dans une Roüelle de Veau, distillée cruë au Bain-Marie, comme la chair de Bœuf, a donné 2 onces 6 gros 54 grains d'humidité ; la chair desséchée pesoit 1 once 1 gros 18 grains, après avoir fourni ses principes par l'analyse. Le *Caput-mortuum* pesoit 2 gros 51 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin, comme l'a fait celle du Bœuf.

Quatre onces de pareille chair boüillie, ont fourni un boüillon un peu gélatineux : ce boüillon réduit en extrait en a laissé 2 gros 30 grains assés solide, quoique difficile à dessécher : la masse des fibres desséchées s'est trouvée réduite au poids de 5 gros 62 grains. Ainsi une livre de Roüelle de Veau contient 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, une once un gros 48 grains d'extrait, & 2 onces 7 gros 32 grains de fibres désséchées ou entiérement dépoüillées de leur suc.

En comparant les produits de ces premiéres opérations

faites ſur la chair de Bœuf & ſur celle de Veau, je trouve que le Veau a, par poids de 4 onces, 18 grains de flegme plus que le Bœuf; qu'il fournit 46 grains d'extrait de plus, & que ſes fibres deſſéchées peſent 46 grains de moins. Ainſi puiſque ſes fibres deſſéchées peſent moins que celles de Bœuf, puiſqu'on en tire plus de flegme & plus de parties gommeuſes, ne peut-on pas préſumer que les liqueurs qui circulent dans le corps du Veau, où elles ſont deſtinées, non-ſeulement à la nutrition, mais auſſi à l'accroiſſement de l'Animal qui n'eſt pas encore parfait, doivent contenir des particules plus diſpoſées à une prochaine ſolidité, que les liqueurs circulantes dans le corps du Bœuf où elles n'ont d'autre deſtination que celle de la nutrition. C'eſt auſſi par cette raiſon que l'extrait qu'on tire de la chair de Veau devient plus ferme que celui de la chair de Bœuf, parce qu'il contient plus de ces particules gommeuſes deſtinées à devenir ſolides pour prolonger les os, les cartilages, les tendons, &c. Et il eſt impoſſible de donner la même fermeté à l'extrait de la chair de Bœuf, ſi l'on n'y joint pas dans la cuiſſon ſes os, ſes cartilages & ſes membranes, qui ne ſont, pour ainſi dire, qu'un compoſé de ces particules gommeuſes.

Les 2 gros 30 grains d'extrait de chair de Veau m'ont donné par l'analyſe un gros 12 grains tant en Eſprit qu'en Huile & en Sel volatil, qui avoit le caractere urineux comme celui du Bœuf; la Tête-morte reſtée dans la cornüe n'a peſé qu'un gros.

Les 5 gros 62 grains de la maſſe de fibres deſſéchées qui ont fourni l'extrait, étant mis de même au feu de réverbere, ont fourni un gros 66 grains de Sel volatil, qui portoit le caractere des Sels volatils ordinaires, c'eſt-à-dire, qu'il étoit en ramifications, & un gros 37 grains d'Huile & d'Eſprit volatil; la Tête-morte reſtée dans la cornüe peſoit 2 gros 18 grains.

Je reprends ici les poids de ces Têtes-mortes ou charbons qui ne peuvent être ſujets à erreur, ſur-tout par rapport à leur peſanteur. Celui de l'extrait de Bœuf ne peſoit que 6

grains, celui de l'extrait de Veau en peſoit 72, ainſi 66 grains de différence de poids entre ces deux charbons d'extraits.

Le charbon de ſibres deſſéchées de Bœuf ne peſoit qu'un gros 60 grains, & celui du Veau, 2 gros 18 grains; autre différence de 30 grains.

Ces deux poids excédents, joints enſemble, donnent un total de 96 grains de parties, regardées comme ſolides, qui ſont de plus dans le Veau que dans le Bœuf. Ces parties ſolides, jointes aux particules gommeuſes dont j'ai parlé ci-deſſus, qui ſont deſtinées à devenir ſolides pour l'accroiſſement de l'Animal, étant numériquement beaucoup plus conſidérables dans le Veau que dans le Bœuf, ne pourroit-on pas conjecturer que ſi ces particules conſervoient dans nos corps, lorſque nous les prenons pour nous nourrir, la même deſtination qu'elles ſemblent avoir dans le corps de l'Animal, dont elles ſont tirées, la chair de Veau ſeroit convenable aux enfants, parce qu'ils croiſſent, & aux malades qui ont ſouffert une déperdition ou un amaigriſſement conſidérable, & que la chair de Bœuf conviendroit mieux aux adultes & aux perſonnes qui joüiſſent d'une ſanté parfaite; mais je ne donne ceci que comme une conjecture.

CHAIR DE MOUTON.

Quatre onces de chair de Mouton priſe dans cette partie qu'on nomme vulgairement l'*E'clanche*, miſe en diſtillation au Bain-Marie comme le Bœuf & le Veau, ont donné 2 onces 6 gros 30 grains de flegme.

La chair dépoüillée de ſon humidité, qui peſoit une once un gros 42 grains, diſtillée au feu de réverbere, après avoir fourni tous ſes principes, a laiſſé dans la cornüe un charbon qui ne peſoit que 2 gros 36 grains, & dont la leſſive a donné des marques de Sel marin, c'eſt-à-dire, qu'elle n'a point altéré la diſſolution du ſublimé corroſif, & qu'elle a précipité en blanc la diſſolution de Mercure.

Quatre onces de la même chair de Mouton boüillie a fourni 2 gros 58 grains d'extrait : ainſi une livre de pareille

chair

chair doit donner 11 onces 5 gros 32 grains de flegme, une once 3 gros 16 grains d'extrait, 2 onces 7 gros 24 grains de fibres dépoüillées de leur ſuc.

Les 2 gros 58 grains d'extrait diſtillé au feu de réverbere ont fourni environ autant de Sel volatil que le Bœuf, & plus que le Veau; les cryſtaux en ont été mieux formés. La Tête-morte n'a plus peſé que 54 grains; ſa leſſive a donné des marques d'un Sel marin plus abondant que dans les autres Viandes.

Les fibres de ce Mouton étant ſéchées, après avoir fourni leur extrait, n'ont plus peſé que 5 gros 60 grains; ce qui prouve évidemment que le Mouton contient plus de parties nourriſſantes & de principes volatils que le Bœuf & le Veau, puiſqu'il laiſſe dans ſon analyſe moins de matiéres fixes. L'analyſe de ces fibres a donné aſſés de Sel volatil ramifié, tel qu'il ſe trouve toûjours dans l'analyſe des fibres deſſéchées des Viandes: la Tête-morte a peſé 2 gros, ſa leſſive n'a que très-peu donné de preuves de Sel marin avec les diſſolutions mercurielles, parce que la plus grande partie des Sels ſe ſont volatiliſés, ou ont paſſé en ammoniac dans l'extrait.

POULET.

Le Poulet étant une des Viandes qu'on employe ou ſeule ou avec les autres Viandes ordinaires des boüillons, j'en ai fait un ſemblable éxamen; j'en ai pris un jeune qui peſoit 9 onces 4 gros 48 grains; après l'avoir concaſſé, on l'a fait boüillir dans pluſieurs eaux, qui en ont tiré un extrait gélatineux peſant 7 gros 36 grains: la chair & les os deſſéchés à l'étuve comme les autres Viandes n'ont plus peſé qu'une once 6 gros 40 grains. Ainſi ce Poulet devoit contenir 6 onces 6 gros 44 grains d'humidité, j'en ai fait diſtiller ſéparément à feu de réverbere 6 gros 18 grains de la chair ſéche, & 3 gros 9 grains des os ſecs (qui eſt tout ce que j'en ai pû retirer) la chair m'a donné du Sel volatil en belles ramifications; la Tête-morte peſoit un gros 6 grains, la leſſive de ce charbon n'a donné aucune marque de Sel.

Les os ont fourni, outre les autres principes, un peu de Sel volatil de la même figure que celui des extraits tirés des autres Viandes ; la Tête-morte pesant 2 gros 8 grains, n'a rien donné de remarquable dans les essais qu'on a fait de sa lessive.

L'extrait de la chair, qui pesoit 7 gros 36 grains, a fourni un Sel volatil figuré comme celui du Bœuf, mais qui n'est venu qu'en forçant le feu; la Tête-morte pesoit 2 gros 20 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin.

COQ.

Un vieux Coq, qui pesoit 2 livres 2 onces 6 gros, m'a donné 4 onces 7 gros 66 grains d'extrait gommeux, transparent & très-sec.

CHAPON.

La chair d'un Chapon dégraissé, pesant une livre 7 onces 2 gros 48 grains, a fourni une once 5 gros d'extrait qui a eu peine à se sécher.

PIGEONS.

Deux jeunes Pigeons de voliére, qui pesoient 14 onces, ont donné un extrait assés solide pour devenir sec, qui a pesé 7 gros 35 grains.

FAISAN.

Un Faisan, qui pesoit 2 livres, m'a donné un extrait salin qui n'a pû se déssécher suffisamment pour former un extrait solide, quoique je l'aye laissé très-long-temps à l'étuve ; cet extrait pesoit 2 onc. 4 gros 16 grains ; ainsi cette chair fournit plus d'extrait que le Bœuf.

PERDRIX.

Deux Perdrix, pesant une livre 2 onces 5 gros, ont rendu une once six gros 30 grains d'extrait moins solide que celui du Faisan.

POULET D'INDE.

Un Poulet d'Inde, peſant 9 livres, a rendu 12 onces 43 grains d'un extrait aſſés ſolide, qui n'a pû ſe ſécher, & qui eſt toûjours reſté huileux & comme réſineux.

Il réſulte de tout ce que je viens de lire, que l'extrait tiré des Viandes boüillies, doit être regardé comme la partie nourriſſante que fournit la chair des animaux dans les boüillons qu'on en fait, ſans que je prétende pour cela qu'elle ſoit employée toute entiére à la nutrition, puiſqu'elle contient encore des parties groſſiéres que l'action de la digeſtion en ſépare comme inutiles par les voyes ordinaires, plus ou moins abondamment, ſuivant l'état du malade. Cela ſuppoſé, il faut faire voir ce qu'un malade prend de nourriture dans un boüillon ordinaire de demi-ſeptier de liqueur.

Si, ſuivant l'uſage, ce boüillon eſt fait d'une livre de tranche de Bœuf, d'une livre & demie de Roüelle de Veau, & d'une moitié de Chapon, qui peut peſer 14 onces; ſi toutes ces Viandes, peſant enſemble 3 livres 6 onces, ſont cuites dans 3 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, réduites à 3 chopines pour en faire ſix boüillons, qui doivent ſe mettre en gelée, lorſque la cuiſſon des Viandes eſt ſuffiſante, ces ſix boüillons contiendront 2 onces 5 gros 34 grains d'extrait au moins; car l'extrait total de toutes ces Viandes ſeroit plus fort de 3 gros 12 grains, ſi on avoit répété l'ébullition, comme je l'ai fait, lorſque j'ai voulu avoir tout le ſuc nourriſſant; & ſi le malade les prend tous les ſix dans les 24 heures, il aura pris par conſéquent environ 2 onces 5 gros 34 grains d'une nourriture, qui, comparée avec le poids entier du pain & de la Viande qu'il peut manger en ſanté, paroît trop forte : ainſi, c'eſt à tort que le Vulgaire s'imagine que les malades ne ſont pas ſuffiſamment nourris par les boüillons.

Il y a même des circonſtances où ils le ſeroient aſſés par les Eaux de Veau ou de Poulet, puiſque la premiére, qui ſeroit faite avec une livre de Veau ſur 2 pintes d'eau, réduites à moitié, contiendroit une once un gros 48 grains d'extrait;

& que l'eau d'un Poulet qui peut peſer 9 onces 4 gros & quelques grains, donne 7 gros 36 grains d'extrait. Il faut auſſi faire remarquer que les Sels volatils & les Huiles de ces extraits, étendus dans les boüillons, ſont plus développés, & qu'ils doivent paſſer plus vîte dans le ſang, que ceux qui étant encore embarraſſés dans les fibres groſſiéres des Viandes, occupent plus long-temps l'action de la digeſtion, ſans compter qu'il eſt plus aiſé d'unir à cette nourriture qu'à toute autre, le ſuc des Plantes qu'on juge à propos d'y joindre pour tempérer ſon action dans le Sang.

Je ne répéterai point ici le rapport qu'ont entre eux les extraits des autres Viandes, parce que je joints à ce Mémoire une Table qui contient par colomnes les produits détaillés de toutes mes opérations.

TABLE du produit des Expériences faites sur les Viandes.

CHAIR DE BOEUF CRUE distillée au Bain-Marie.	Onces.	Gros.	Grains.
Premiére Eau.			
QUatre onces de chair de Bœuf ont donné de premiére humidité...............	2	6	36
Bœuf séché au Bain-Marie..	1	1	36
Total................	4		
Extrait du Bœuf boüilli.			
Quatre onces de Bœuf ont produit d'extrait.............	......	1	56
Les fibres séchées...............	......	6	36
Total................	......	8	20
Eau tirée par le Bain-Marie...	2	6	36
A quoi il faut ajoûter un 2.d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever................	......	1	16
Total de l'humidité qui se trouve contenüe dans 4 onces de chair de Bœuf, 2 onces 7 gros 52 grains.			
Total	4		
Poids des masses de la chair de Bœuf pour une livre.			
Une livre de seize onces contiendra en eau.................	11	6	64
En extrait........................	......	7	8
Fibres séchées	3	2	
Total	16		
Analyse de l'extrait de 4 onces de Bœuf qui ont produit 1 gros 56 grains.			
Sel volatil	......	1	2
Huile & Esprit..................	......	......	38
Tête-morte, ou charbon	......	......	6
Perte	......	......	10
Total	......	1	56

Analyse des 6 gros 36 grains de fibres desséchées.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil..........................	......	2	
Esprit volatil........................	......	......	36
Tête-morte, ou charbon......	......	1	60
Perte........................	......	2	12
Total.............	......	6	36
CHAIR DE VEAU CRUE.			
Eau premiére.			
Quatre onces de cette chair ont donné de premiére humidité........................	2	6	54
Veau séché au Bain-Marie ...	1	1	18
Total..............	4		
Extrait de Veau.			
Quatre onces de Veau ont produit d'extrait............	......	2	30
Les fibres séchées...............	......	5	62
Eau par le Bain-Marie.......	2	6	54
Total...............	3	7	2
A quoi il faut ajoûter un 2.d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever, ou la perte..	......	......	70
Total..............	4		
Eau de la 1.re évaporation...	2	6	54
Eau de la 2.de évaporation...	......	......	70
Total..............	2	7	52
Poids des Masses de la chair de Veau pour une livre.			
Une livre de 16 onces contiendra en eau...............	11	6	64
En extrait.........................	1	1	48
Fibres séchées......................	2	7	32
Total................	16		

Analyse de l'extrait de 4 onces de Veau, 2 gros 30 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil } Huile & Esprit }	......	1	12
Tête-morte	......	1	
Perte	......	......	18
Total	......	2	30
Analyse de 5 gros 62 grains de fibres de Veau desséchées.			
Sel volatil	......	1	66
Huile & Esprit	......	1	37
Tête-morte	......	2	18
Perte	......	......	13
Total	......	5	62
CHAIR DE MOUTON distillée au Bain-Marie.			
Eau première.			
Quatre onces de cette chair ont donné de première humidité	2	6	30
Mouton séché au Bain-Marie.	1	1	42
Total	4		
Extrait de Mouton boüilli.			
Quatre onces de Mouton ont produit	......	2	58
Fibres séchées	......	5	60
Eau par le Bain-Marie	2	6	30
Total	3	7	4
A quoi il faut ajoûter un 2d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever	......	......	68
Total	4		
Poids des Masses pour 1 liv.			
Une livre de 16 onces contiendra en eau	11	5	32
En extrait	1	3	16
Fibres séchées	2	7	24
Total	16		

Analyse de l'extrait de 4 onces de Mout. 2 gros 58 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil	......	1	
Huile & Esprit	......	1	
Tête-Morte	......	......	54
Perte	......	......	4
Total	......	2	58
Analyse des 5 gros 60 grains de fibres desséchées.			
Sel volat. & Huile inséparable.	......	3	12
Esprit	......	......	24
Tête-morte	......	2	
Perte	......	......	24
Total	......	5	60
CHAIR D'AGNEAU.			
Une livre de chair sans graisse.			
Extrait difficile à sécher, & toûjours humide	1	1	39
POULET.			
Chair & Os, 9 onces 4 gros 48 grains.			
Eau	6	6	44
Extrait	......	7	36
Fibres charnuës & os séchés après l'extrait	1	6	40
Total	9	4	48
Analyse des 7 gros 36 grains d'extrait de Poulet.			
Esprit, Huile & flegme	......	4	15
Sel volatil & Huile	......	......	58
Tête-morte	......	2	20
Perte	......	......	15
Total	......	7	36
Analyse des fibres desséchées du Poulet, 6 gros 18 grains.			
Esprit & Huile épaisse	......	3	34
Sel volatil	......	1	
Tête-morte	......	1	6
Perte	......	......	50
Total	......	6	18

Analyse des os de Poulet après l'ébullition, 3 gros 9 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Esprit, Huile & Sel volatil...	......	......	69
Tête-morte......................	......	2	8
Perte....................	......	......	4
Total...............	......	3	9
VIEUX COQ. *pesant 2 liv. 2 onces 6 gros.*			
Extrait gelatineux sec..........	4	7	66
CHAPON. *Chair de Chapon dégraissé, 1 liv. 7 onc. 2 gros 48 gr.*			
Extrait difficile à sécher......	1	5	
PIGEONS DE VOLIÉRE. *Deux Pigeons, pesant 14 onc.*			
Extrait solide en Tablettes...	......	7	35
FAISAN. *Chair de Faisan, pesant 2 liv. avec les os.*			
Extrait mol......................	2	4	16
Fibres séchées avec les os....	9	2	32
Eau.............................	20	1	24
Total.............	32		
Analyse de simple chair de Faisan, 4 onces.			
Eau.............................	2	6	36
Esprit & Huile..................	......	4	
Sel volatil........................	......	2	36
Tête-morte......................	......	2	48
Perte...................	......	......	24
Total..............	4		
Analyse de l'extrait de Faisan, 1 gros 56 grains.			
Esprit & Huile................	......	......	48
Sel volatil.......................	......	......	36
Tête-morte......................	......	......	36
Perte....................	......	......	8
Total..............	......	1	56

Fibres séchées de Faisan, sans os, 6 gros 36 grains.	Onces.	Gros.	Grains.
Esprit, Sel volatil & Huile épaisse......................	......	5	10
Tête-morte......................	......	1	12
Perte.........	......	......	14
Total..............	......	6	36
PERDRIX. *Deux vieilles Perdrix, pesant 1 liv. 2 onces 5 gros.*			
Extrait huileux ou gras & humide.......................	1	6	30
POULET D'INDE. *Un Poulet d'Inde, pesant 9 liv.*			
Extrait gras & huileux quoiqu'en Tablettes.............	12	......	43
COEURS DE VEAUX.			
Deux cœurs de Veaux, pesant 11 onces 4 gros, ont rendu d'extrait qui n'a pû se mettre en gelée, ni se sécher......	......	3	60
FOYE DE VEAU. *Un Foye pesant 2 livres 7 gros.*			
Extrait qui s'humectoit.......	2	1	60

PIEDS DE VEAUX. *Huit pieds pesant 6 livres 8 onces.*	Liv.	Onces.	Gros.	Grains.
Eau	3	5	4	45
Extrait gommeux & sec.	......	8	3	27
Os humides au sortir du boüillon, avec cartilages.....................	2	10		
Total.........	6	8		

Analyse d'une once d'extrait gommeux & sec de pieds de Veau.	Onces.	Gros.	Grains.	MACREUSES. *Deux Macreuses du poids de 2 liv. 7 onces.*	Onces.	Gros.	Grains.
Esprit & Huile	......	3		Extrait solide qui s'humecte aux changements des temps.	2	1	50
Sel volatil	......	2	18				
Tête-morte	......	2	25				
Perte	......	......	29				
Total	1						



LA

LA COURBE DESCENSUS ÆQUABILIS DANS UN MILIEU RÉSISTANT COMME UNE PUISSANCE QUELCONQUE DE LA VITESSE.

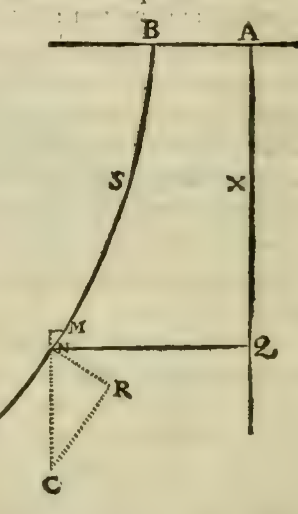
Par M. DE MAUPERTUIS.

I. EN 1687 M. Leybnitz, à l'occasion de sa dispute avec M. l'Abbé Catelan sur les Forces vives, proposa à ses adversaires, de trouver la Courbe dans laquelle un corps tombant par la seule force de la pesanteur, s'approche également de l'horizon dans des temps égaux. Par-là il leur faisoit voir que puisqu'on peut régler d'une maniére arbitraire le rapport entre les chûtes d'un corps & les temps qu'il employe à ces chûtes, la considération des temps qui étoit la seule ressource des adversaires des Forces vives ne devoit en aucune maniére entrer dans l'estimation de ces forces. M. Leybnitz vouloit aussi faire comprendre à M. l'Abbé Catelan que l'Analyse de Descartes ou l'Algebre ordinaire n'étoit pas suffisante, comme il le prétendoit, pour résoudre toutes sortes de Problemes. 29 Novemb. 1730.

Ce Probleme, qui ne fut point résolu par ceux à qui il étoit proposé, reçût en 1694 différentes Solutions des plus célébres Géometres. Au lieu de prendre l'horizon pour terme des approches du corps, on prit un poinct quelconque; & M.[rs] Bernoulli distinguerent leurs Solutions par les élégantes constructions qu'ils donnerent de la Courbe *Descensus æquabilis*. Enfin M. Varignon en 1699 donna au Probleme une espece de généralité, en ne l'astreignant ni à l'hypothese de Galilée sur les vîtesses, ni au rapport d'égalité entre les chûtes & les temps. *Vide Acta Lipf. 1694.* *V. les Mem. de l'Ac. 1699. & 1703.*

Jusqu'ici tout s'est passé dans le Vuide, & nous n'avons aucune Solution du Probleme dans un Milieu résistant. On voit assés que cette circonstance doit changer extrémement la nature de la Courbe *Descens. æquab.* En effet cette Courbe qui est la seconde parabole cubique dans le cas proposé par M. Leybnitz, c'est-à-dire, dans le cas où le corps dans le vuide doit s'approcher de l'horizon proportionnellement aux temps, cette Courbe, dis-je, dans un milieu résistant, comme une puissance quelconque de la vîtesse, devient transcendente du second degré.

II. Comme l'hypothese particuliére d'une résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse donne un moyen de trouver cette Courbe qui ne seroit pas applicable aux autres hypotheses, je commencerai par chercher la Courbe dans cette hypothese, je donnerai ensuite toutes les Courbes *Descens. æquab.* pour quelque hypothese de résistance que ce soit.



Soit la courbe que l'on cherche, $BN = s$, $AQ = x$, $QN = y$; la force de la pesanteur $= p$; la vîtesse du corps dans quelque poinct N de la courbe $= v$.

Le corps tombant dans la courbe BN, sa force accélératrice dépend de deux causes; l'une est la force de la pesanteur, l'autre la résistance du milieu. Pour trouver ce que la pesanteur y contribüe, ayant pris la constante NC pour p, je la décompose en deux autres forces, l'une NR perpendiculaire, l'autre RC parallele à la courbe; il est clair que cette derniére seule accélere le corps; ainsi $\frac{pdx}{ds}$ est la force accélératrice produite par la pesanteur.

Mais la résistance du milieu s'oppose à cette force, & en

doit détruire une partie ; or cette résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse, si l'on prend $\frac{1}{n}$ pour son intensité, l'on aura pour la force retardatrice du corps $\frac{vv}{n}$; & pour la force accélératrice actuelle produite par les deux causes $\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}$. Or la force accélératrice, multipliée par le temps, donne la différence de la vîtesse ; l'on a donc ici $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n})\, ds = vdv$, ou $npdx = vvds + nvdv$.

III. Pour avoir v dans cette équation, je la multiplie par c^{fs} (c étant le nombre dont le logarithme est l'unité, & f un coëfficient que je vais déterminer) j'ai donc $npc^{fs}dx = vvc^{fs}ds + nc^{fs}vdv$, dont l'intégrale est $\int npc^{fs}dx = \frac{1}{f}vvc^{fs} - \frac{2}{f}\int c^{fs}vdv + n\int c^{fs}vdv$. Je cherche maintenant la valeur de f propre à faire évanoüir les deux derniers termes, & je trouve $f = \frac{2}{n}$; l'intégrale de l'équation est donc $np\int c^{\frac{2s}{n}}dx = \frac{n}{2}vvc^{\frac{2s}{n}}$, & $vv = \frac{2p}{c^{\frac{2s}{n}}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$.

IV. Maintenant puisque dans la courbe que l'on cherche, les descentes verticales doivent être proportionnelles aux temps, l'on a $\frac{ds}{v}$ proportionnel à dx ; ou prenant q pour une arbitraire constante $\frac{ds^2}{vv} = \frac{dx^2}{qq}$. Substituant dans cette équation l'expression de la vîtesse, l'on a $\frac{ds^2}{2pc^{-\frac{2s}{n}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx} = \frac{dx^2}{qq}$ ou $\frac{c^{\frac{2s}{n}}ds^2}{2pdx^2} = \frac{1}{qq}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$. Différentiant cette équation, elle devient $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, qui est l'équation de la courbe *Descens. æquabilis.*

V. Cette équation n'est pas intégrable; cependant on peut

construire la courbe par les Quadratures, comme l'on va voir.

Dans l'équation $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, l'on n'a supposé aucune des différentielles constante; si donc on fait $ddx = 0$, l'on aura $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, ou $qq(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + nqqdyddy = npdx^3$.

Si maintenant l'on fait $dy = \frac{zdx}{q}$, $ddy = \frac{dzdx}{q}$; ces valeurs substituées dans l'équation, l'on aura $\frac{dx}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}} + nzdz = npdx$. D'où l'on tire $dx = \frac{nzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF, dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qnz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite une seconde courbe DH, dont l'abscisse $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = z =$ l'abscisse DE de la premiére, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$. Ainsi l'on aura les deux coordonnées de la courbe que l'on cherche.

On peut remarquer que la premiére courbe DF est quarrable par logarithmes; car si l'on fait $qq + zz = tt$, l'on change la premiére expression $\frac{qnzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, en $\frac{qqntdt}{npq - t^3}$, qui est intégrable par logarith.

Ayant communiqué cette solution, & cette construction de la Courbe à M. Bernoulli, il m'envoya une maniére de

perfectionner la construction, qui est digne de son illustre Auteur ; je vais la rapporter ici, extraite de sa Lettre, sur la permission qu'il m'en a donnée.

« Soit O le centre de gravité de l'aire DFE, d'où l'on abbaisse la perpendiculaire OG : par la nature de ce centre, on a $DHI = \frac{DFE.DG}{q}$; donc $y = \frac{DHI}{q} = \frac{DFE.DG}{qq} = \frac{x.DG}{q}$, c'est pourquoi l'on peut se passer de l'aire DHI ; car supposant la souscentrique DG donnée dans l'aire donnée DFE, on trouve la valeur de y, en faisant $q : DG :: x : \frac{x.DG}{q} = y$; or dans la pratique il est fort aisé de connoître la souscentrique des figures, en mettant la figure DFE en situation horizontale sur le tranchant d'un plan vertical parallele FE, que l'on avance ou recule d'un mouvement toûjours parallele jusqu'à ce que la figure DFE soit en équilibre ; cela fait, la partie DG emportée par le tranchant sera la souscentrique. »

Voici la démonstration de la construction de M. Bernoulli. L'on a par la nature du centre de gravité $DG = \frac{1}{x}\int z dx$; c'est-à-dire (à cause de $x = \frac{DFE}{q}$ & de $y = \frac{DHI}{q}$) $DG = \frac{q}{DFE} DHI$; Donc $DHI = \frac{DG.DFE}{q}$ & $y = \frac{DG.DFE}{qq} = \frac{x.DG}{q}$.

VII. Voilà le Probleme résolu pour un milieu résistant, comme le quarré de la vîtesse : cette hypothese, outre qu'elle est assés conforme à la nature, a encore pour le calcul cet avantage particulier, qu'on peut trouver en termes finis l'expression de la vîtesse, ce qui n'arrive pas dans les autres hypotheses de résistance proportionnelle à quelqu'autre puissance de la vîtesse.

VIII. On peut cependant par une autre méthode se passer de l'expression de la vîtesse, & résoudre le Probleme en général, pour un milieu qui résisteroit comme une puissance quelconque de la vîtesse.

En ſuivant les mêmes raiſonnements qui ont conduit à l'équation $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}) ds = vdv$, on trouvera dans l'hypotheſe d'une réſiſtance proportionnelle à une puiſſance quelconque de la vîteſſe $(\frac{pdx}{ds} - \frac{v^e}{n^{e-1}}) ds = v dv$.

L'on a de plus par la propriété de la courbe $\frac{ds}{v} = \frac{dx}{q}$; l'on a par cette derniére équation v & dv, $= \frac{qds}{dx}$ & $\frac{qdx dds - qds ddx}{dx^2}$; ces valeurs ſubſtituées dans la premiére, donnent pour l'équation de la courbe *Deſcenſ. æquab.*

$\frac{pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e ds^{e+1}}{n^{e-1}} = dx^{e-3} (qqdxdsdds - qqds^2 ddx)$.

Si l'on fait dx conſtant, cette équation devient $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qqdx^{e-2} dsdds$; ou $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} qqdx^{e-2} dyddy$, qui eſt l'équation de toutes les courbes *Deſcenſ. æquab.* pour telle hypotheſe de réſiſtance que l'on voudra.

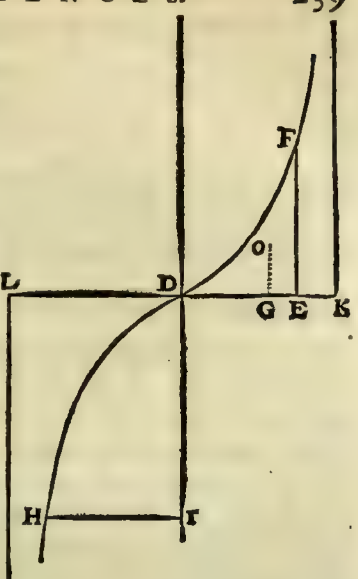
IX. Toutes ces courbes ſont conſtruiſibles par les quadratures; car faiſant $dy = \frac{zdx}{q}$ $ddx = \frac{dzdx}{q}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la derniére équation, il vient $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e (dx^2 + \frac{zz}{qq} dx^e)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} dx^e . zdz$. D'où l'on tire $dx = \frac{n^{e-1} zdz}{pn^{e-1} - \frac{1}{q} (qq + zz)^{\frac{e+1}{2}}}$.

Conſtruiſant donc la courbe DF dont l'abſciſſe $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qn^{e-1} z}{pn^{e-1} - \frac{1}{q} (qq + zz)^{\frac{e+1}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faiſant enſuite la courbe DH, dont l'abſciſſe $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI =$ l'abſciſſe DE de la premiére,

l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$, l'on a donc ainsi les deux coordonnées de la courbe *Descens. æquab.*

X. Ayant l'aire DFE de la premiére courbe, l'on pourra se passer de la seconde par la considération du centre de gravité, comme l'on a vû dans la solution particuliére : car, ayant $x = \frac{DFE}{q}$, l'on aura toûjours $y = \frac{x . DG}{q}$.



XI. Si on suppose $n = \infty$, c'est-à-dire, que la résistance du milieu soit nulle, l'équation générale $p n^{e-1} dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} qq dx^{e-2} dy ddy$, se réduira à $p dx^3 = qq dy ddy$, ou $p x dx^2 + p a dx^2 = \frac{qq}{2} dy^2$; ou $dy = \frac{dx}{q} \sqrt{(2pa + 2px)}$, ou enfin $y = \frac{2\sqrt{2}}{3pq} (pa + px)^{\frac{3}{2}} + b$.

D'où l'on voit que dans le cas d'une résistance nulle, ou dans le vuide, la courbe *Descens. æquab.* est une parabole cubique, comme l'ont trouvé M.rs Leybnitz, Bernoulli & Varignon. Dans ce cas il est évident que les deux courbes *DF*, *DH*, sont quarrables.

XII. Dans certaines hypotheses de résistance, l'équation générale de la courbe *Descens. æquab.* se peut ramener aux premiéres différences, & même aux quantités finies.

1.° Si, par ex. on suppose que le milieu résiste en raison simple directe de la vîtesse du mobile, e sera $= 1$, & l'équation générale deviendra $\frac{dy\, ddy}{(p-q)\, dx^2 - q\, dy^2} = \frac{1}{qq} dx$, ou

$\frac{2qdyddy}{(p-q)dx^2-qdy^2} = \frac{2}{q}dx$, dont l'intégrale eſt $lAdx^2 - l((p-q)dx^2 - qdy^2) = \frac{2}{q}x$; d'où repaſſant aux nombres, & (prenant c pour le nombre dont le Logarithme $= 1$), l'on a $\frac{Adx^2}{(p-q)dx^2-qdy^2} = c^{\frac{2}{q}x}$, ou $dy = \frac{dx}{\sqrt{q}} \sqrt{(p-q-Ac^{-\frac{2}{q}x})}$; & faiſant $p=q$, & $-A=BB$, cette équation devient $dy = \frac{B}{\sqrt{p}}c^{-\frac{x}{p}}dx$, dont l'intégrale eſt $y = -Bc^{-\frac{x}{p}}\sqrt{p} + b$, ou $(b-y)c^{\frac{x}{p}} = D$; d'où l'on voit que dans cette hypotheſe, la courbe *Deſcenſ. æquab.* eſt une courbe exponentielle.

2.° Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon doublée de la vîteſſe; l'équation générale $(pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qqdx^{e-2}dsdds)$ deviendra $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, qui eſt la même que nous avons trouvée dans la ſolution particuliére. Cette équation ſe peut ramener aux premiéres différences, mais avec des quantités exponentielles; car lui donnant cette forme $\frac{nqqdsdds}{npdx^3-qqds^3} = 1$, & multipliant tout par $\frac{3ds}{n}$, l'on a $\frac{3qqds^2dds}{npdx^3-qqds^3} = \frac{3ds}{n}$, dont l'intégrale eſt $lAdx^3 - l(npdx^3 - qqds^3) = \frac{3s}{n}$, ou repaſſant aux nombres $Adx^3 = c^{\frac{3s}{n}}(npdx^3 - qqds^3)$.

3.° Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon triplée de la vîteſſe du mobile, l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$, deviendra $\frac{dsdds}{pnndx^4-q^3ds^4} = \frac{dx^{-1}}{nnqq}$, ou $\frac{\frac{nn}{q}dx^2dsdds}{\frac{pnn}{q^3}dx^4-ds^4} = dx$, ou $\frac{nndx^2}{q}\left(\frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})}+ds^2} + \frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})}-ds^2}\right) : dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})} = 4dx$, dont l'intégrale eſt $n\sqrt{(\frac{q}{p})}$. $lA(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})} + ds^2) - l(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})} - ds^2) = 4x$,

ou

ou repassant aux nombres, l'on a $\left(\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2}\right)^{n\sqrt{\frac{q}{p}}}$ $=c^{4x}$ ou $\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2}=c^{(\frac{4}{n}\sqrt{\frac{p}{q}})x}$ ou $An\sqrt{p}dx^2$ $+Aq\sqrt{q}ds^2=c^{\frac{4x}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}}(n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2)$.

4.° Si l'on suppose maintenant que le milieu résiste uniformément, on aura $e=0$, & l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}-q^e$ $ds^{e+1}=n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$ deviendra $\frac{p}{n}dx-ds=\frac{qqdsdds}{ndx^2}$, ou $pdx-nds=\frac{qqdsdds}{dx^2}$, dont l'intégr. est $\frac{2px-2ns+2na}{qq}$ $=\frac{ds^2}{dx^2}$.

5.° Si l'on suppose que le milieu résiste en raison simple inverse de la vîtesse du mobile; l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}$, &c. devient $\frac{p}{nn}-\frac{1}{q}=\frac{qqdsdds}{nndx^3}$, ou $pqdx^3-nndx^3=q^3dsdds$, dont l'intégrale est $(2pqx-2nnx+2nna)dx^2=q^3ds^2$, ou $(2pqx-2nnx+2nna)dx^2=q^3dx^2+q^3dy^2$, ou $((2pq-2nn)x+2nna-q^3)dx^2=q^3dy^2$, ou $q^{\frac{3}{2}}dy=dx(\sqrt{(2pq-2nn)x+2nna-q^3})$ ou $(y+b)$ $q\sqrt{q}=\frac{1}{3pq-3nn}(2pqx-2nnx+2nna-q^3)^{\frac{3}{2}}$ équation à la 2de parabole cubique.

Quoiqu'un milieu résistant en raison inverse de la vîtesse du mobile n'ait point apparemment lieu dans la nature, c'est cependant une chose fort digne de remarque, que la 2de parabole cubique qui est dans le vuide la courbe *Descens. æquab.* la soit encore dans cette hypothese; il arrive en quelque maniére à cette courbe, ce qui arrive à la Cycloïde, qui étant la courbe isochrone dans le vuide, l'est encore dans un milieu résistant en raison simple directe de la vîtesse, outre qu'elle l'est aussi dans un milieu dont la résistance seroit uniforme.

Toutes ces hypotheſes de réſiſtance dont nous venons de parler, & pluſieurs autres donneroient des conſtructions particuliéres de la courbe *Deſcenſ. æquab.* dont quelques-unes pourroient être plus ſimples que celle que nous avons donnée. Dans l'hypotheſe, par ex. d'une réſiſtance proportionnelle à la ſimple vîteſſe, la courbe ſe peut conſtruire ſans quadrature, par le moyen de la ſeule Logarithmique; dans les autres, en quarrant des courbes exponentielles.

Mais j'ai mieux aimé donner une conſtruction générale pour toutes les hypotheſes de vîteſſe, que de détailler toutes ces conſtructions particuliéres.



DE LA NATURE DE LA TERRE EN GÉNÉRAL, ET DU CARACTERE DES DIFFÉRENTES ESPECES DE TERRES.

Par M. DE REAUMUR.

NOus ne sçavons que trop, qu'en Physique, les premiers principes sont ce qui nous est le moins connu. On n'a pû encore nous donner d'idées claires de ces Estres simples, dont on a voulu faire les Eléments des autres Corps, de la Terre principe, du Soufre principe, du Sel principe, &c. Il n'est pas même bien sûr que nous puissions parvenir à les connoître, au moins par la voye des expériences, la seule pourtant, en Physique, sur qui on puisse compter. Il y a bien loin apparemment d'où nous pouvons partir jusqu'à des êtres simples. La décomposition, comme la division des Corps, ne peut-elle point être poussée jusqu'à l'infini ? De quelque côté qu'on considére la Nature, l'infini semble le seul terme qui lui soit prescrit. Aussi la Terre, dont nous nous sommes proposés d'examiner le caractére dans ce Mémoire, n'est nullement un être simple; ce n'est point cette Terre élémentaire d'Aristote, & de bien d'autres, c'est une Terre à nous plus connuë, quoiqu'on n'ait pas pris soin de s'en faire des notions assés déterminées. 23 Juin 1730.

Il seroit extrêmement à désirer d'avoir des idées bien distinctes des premiers principes, nos connoissances en seroient plus complettes, mais les connussions-nous bien, nous ne devrions pas y remonter, lorsque nous avons à déterminer la nature de la plûpart des corps qui sont l'objet de nos recherches. Nous expliquerions mal la nature de ces corps, nous n'en

donnerions pas les idées qu'on en veut avoir, si nous la prenions dès les premiers principes. Il faut nous arrêter bien plus près, & il ne nous est pas toûjours permis de nous arrêter aussi près qu'il en seroit besoin. On veut me faire connoître un corps, un composé, qu'on me fasse connoître les éléments prochains, dont il a été formé, fussent-ils eux-mêmes très-corps, très-composés. J'emploirai volontiers une comparaison, quoique peu noble, qui me paroît très-propre à faire voir qu'on nous instruit mal, quand on passe tout d'un coup à des principes trop éloignés ; & c'est malheureusement le défaut de la Chymie, à qui nous devons néantmoins tant de belles connoissances physiques, elle ne nous montre que rarement les éléments immédiats. J'amene de l'Amérique, ou des Indes, quelqu'un dont la Physique a toûjours été la passion, je le suppose très-versé dans toutes les manipulations de Chymie, mais très-ignorant sur tout ce qu'on a imaginé en Europe, pour flater le goût; je le conduis chés un Pâtissier, où je lui montre des gâteaux de toutes especes, des biscuits, & de toutes les sortes de friandises qui sont l'ouvrage de cet art. Je lui demande ce que chacun de ces composés a de propre, quelle est leur nature? si pour m'en rendre raison, il a recours à l'analyse, qu'il en vienne à des distillations, à des cohobations, &c. il pourra me dire qu'il y a plus de parties huileuses dans certains gâteaux, que d'autres ont plus de Sels, que d'autres ont plus d'acides; il pourra déterminer la proportion qui est entre les parties terreuses, & les Soufres, & les Sels. Mais m'en aura-t-il donné plus d'idée des compositions sur lesquelles je l'ai interrogé, que sur celles de quelques Pierres, ou de quelques Plantes, qui pareillement traitées auroient donné des principes assés semblables? Il devoit me dire, que tel gâteau n'est fait que d'eau commune, de farine, & de beurre ; que les œufs sont entrés dans un autre ; que dans un autre, on a fait entrer de la levûre de biére, que le sucre est entré dans la composition d'un autre, qu'un autre est fait d'amandes pilées. Enfin il falloit encore me dire, que selon la façon dont le beurre a été mêlangé avec la farine,

on a fait des gâteaux feüilletés ou non feüilletés. Si le Pâtissier fait connoître à nôtre Philosophe les matiéres qu'il employe, & la façon dont il les employe, il verra qu'il a eû tort de recourir à des quintessences, pour découvrir la nature de ces compositions. Quand la Nature travaille à former des gâteaux d'une autre espece, des Pierres à grains, des Pierres feüilletées, des Métaux, des Minéraux, elle n'a pas toûjours des quintessences à employer, elle se sert des sables, des soufres, des bitumes, tels qu'ils sont. Pour faire entrer les bitumes, les soufres dans ses ouvrages, souvent elle ne les analyse pas plus que le Pâtissier analyse son beurre. En un mot, c'est avec des composés qu'elle forme la plûpart des corps, qui sont l'objet de nos considérations.

Je sçais bien qu'on peut pousser ses recherches jusqu'à examiner quelle est la nature de chacun des composants d'un composé, que nous le devons même, quand ils nous donnent prise ; mais ce que je sçais aussi, c'est que nous ne pouvons pas porter loin les décompositions, & peut-être y en a-t-il prodigieusement à faire avant d'arriver à des êtres simples, aux premiers éléments.

Il y a un certain nombre de matiéres, toutes très-composées, qui se combinent assés ordinairement dans la plûpart des corps, l'Eau, la Terre, le Feu, ou les matiéres inflammables, les Sels, &c. Quelques-uns les ont toutes prises pour des éléments ; d'autres, selon leur prédilection pour quelques-unes, n'en ont pris que deux ou trois, ou qu'une seule pour premier principe. Mais avant de leur donner cette qualité, on les a bien plus épurées par l'imagination, qu'elles ne le sont quand elles tombent sous nos sens. La Terre est une de celles à qui on a été le plus disposé à accorder ce rang. Aussi tant que nous nous en tiendrons aux principes immédiats, aux principes, qui eux-mêmes peuvent en avoir d'autres, la Terre nous paroîtra la principale base des corps physiques. Mais cette Terre qui entre dans la composition des corps, n'est que celle qui est continuellement sous nos yeux, & qui pourtant ne nous est pas assés connuë. On

n'en a eû que des idées vagues, on n'a point considéré quelles sont ses principales propriétés, celles qui constituent son caractere. J'ai cherché à les déterminer, & à distinguer les différentes especes de Terres par le plus ou le moins qu'elles participent à chacune des propriétés communes à toute Terre. J'ai éprouvé le besoin que j'avois d'avoir des caracteres fixes de la Terre en général, & des especes en particulier, dans quelques essais que j'ai faits sur la physique des Minéraux, dans les observations que j'ai voulu faire sur les diverses Terres, les plus favorables à la végétation des Plantes; je l'ai de même éprouvé, quand j'ai voulu suivre les matériaux qu'employent divers Arts, tels que les arts des Verriers, ceux des Potiers, ceux des faiseurs de Fayance & de Porcelaine; ils demandent tous qu'on sçache, & ce que c'est que la Terre en général, & ce qu'ont de particulier ses différentes especes.

Nous donnons, sans hésiter, le nom de *Terre* à l'amas de matiéres qui occupe un champ, où des Plantes croissent, ou peuvent croître; nous donnons ce nom à un tout, dont nous imaginons que la Terre fait une grande partie. Qu'on en sépare les grosses & les menües pierres, le reste sera encore Terre pour nous, & même le sera davantage. Qu'on ait ensuite recours à quelque expédient, comme à des lotions, pour séparer de la masse ces petits grains durs que nous appellons *Sable;* après que tout le Sable sensible aura été séparé, nous conserverons encore le nom de Terre à la matiére restante, & selon l'idée que nous nous sommes faite de la Terre, nous croirons qu'elle le mérite même mieux, qu'elle en est plus terre. Mais cette matiére restante, cette Terre, qu'est-elle? n'est-elle elle-même qu'un Sable beaucoup plus fin que celui que nous avons enlevé? qu'un Sable dont les grains, pris séparément, échapent à nos yeux par leur petitesse? ou est-elle une matiére qui différe véritablement du Sable, qui ait un caractere particulier & bien marqué?

Les Physiciens n'ont pas trop cherché à prendre parti sur l'un ou l'autre de ces sentiments, ou plûtôt ils semblent avoir crû qu'il n'y avoit pas à délibérer entre deux sentiments.

Quand Rohault a parlé de l'Argile, qui eſt une eſpece de Terre très-commune, il a dit, ſans héſiter, *Que la production de l'Argile n'eſt pas beaucoup différente de celle du Sable ; qu'il faut ſeulement ajoûter que ſes grains ſont encore probablement plus petits, pour laiſſer entr'eux de plus petits intervalles, & ainſi compoſer un tout que l'eau puiſſe difficilement pénétrer.* L'autorité de M. de la Quintinie ne ſeroit pas comparée en Phyſique à celle de Rohault, ſi on y faiſoit uſage des autorités ; mais il avoit eu plus d'occaſion que ce Phyſicien, d'examiner les différentes eſpeces de Terres, & comme lui, il veut qu'elle ne ſoit, en général, qu'un amas de grains de Sable extrémement déliés. Les Terres labourables font naturellement prendre cette idée ; on y trouve une grande quantité de Sable, aiſé à reconnoître ; de-là on eſt porté à croire que les molécules, parmi leſquelles ce Sable eſt mêlé, ne ſont eux-mêmes que des amas de grains ſemblables, mais imperceptibles à nos yeux, quand ils ſont ſeuls, & que ce que nous appellons Terre, ſont des amas de grains de Sable extrémement fins.

Cependant puiſque les grains de Terre échapent à nôtre vûë, par leur petiteſſe, nous ſommes hors d'état de décider par cette voye, s'ils ſont ſimplement un Sable plus diviſé, plus broyé, ou s'ils ſont d'une nature différente de celle du Sable. Les grains de Sable de différentes groſſeurs que nous appercevons, ne ſont pas une induction ſuffiſante pour nous déterminer à aſſûrer qu'ici tout ce qui ne nous eſt pas viſible, ne différe de ce qui l'eſt, que par ſon peu de groſſeur. Quelqu'un dont les yeux ſeroient, par rapport aux nôtres, ce que les nôtres ſont par rapport à ceux de certains inſectes, pourroit ne voir les Pierres parſemées dans un champ que de la groſſeur dont nous paroiſſent les grains de Sable ; ſon induction le tromperoit ſouvent, s'il aſſûroit que les grains de Sable du champ ne ſont autre choſe que des fragments de ces Pierres. Il éviteroit cet erreur, s'il venoit à éxaminer les propriétés des Pierres mêmes, & ceux de ces prétendus fragments ; les Pierres de tel champ ſe réduiroient en Chaux, pendant que le Sable du même champ ſe vitrifieroit. Ce n'eſt

auſſi qu'après avoir éxaminé les propriétés du Sable, & celles de la Terre proprement dite, que nous pourrons décider s'ils ſont une même matiére, ou des matiéres différentes ; & cet éxamen nous apprendra que l'un & l'autre ont leurs propriétés particuliéres, & que la Terre ne différe peut-être pas moins du Sable, que le Sable différe des Métaux & des autres Minéraux.

Des expériences très-communes ſont capables de nous donner ici de grandes lumiéres. Nous voyons journellement que les corps de certaines claſſes ne ſont nullement ou peu pénétrables à l'eau. Elle ne ſçait point paſſer au travers des ouvrages d'Or, d'Argent, de Plomb, de Verre. Quand les Criſtaux, les Cailloux ont été expoſés à l'air pendant un certain temps, l'eau ne peut plus s'y inſinuer, au moins en quantité ſenſible. Au contraire non ſeulement l'eau s'introduit dans les Sels, elle ſe les approprie, elle les diſſout, elle ſemble enſuite faire un tout avec eux. Enfin l'eau s'inſinüe dans des corps d'une troiſiéme claſſe ; en s'y inſinuant, elle augmente leurs dimenſions ſous certains rapports, tels ſont la plûpart des bois & les matiéres ſolides qui nous viennent des Plantes, les peaux, les chairs deſſéchées des Animaux ; en un mot tous les corps que nous nommons *ſpongieux*, parce qu'ils ont tous une qualité que l'Eponge a autant ou plus qu'aucun autre, que tous s'abreuvent d'eau. L'eau dont ils ſont abreuvés augmente leur volume, & quand elle vient à s'en évaporer, ils retournent à leurs premiéres dimenſions.

Les caracteres de ces trois claſſes ſont très-marqués ; les corps qui ſe rangent ſous la premiére, doivent être regardés comme fort différents de ceux qui ſe rangent ſous la troiſiéme. Il eſt pourtant aiſé de s'aſſûrer, dès qu'on cherche à s'inſtruire, que le Sable doit être mis dans la premiére, & que c'eſt dans la derniére que la Terre doit être placée. L'expérience la plus ſimple ſuffit ici. Qu'on rempliſſe un vaſe de Sable, qu'on arroſe ce Sable d'eau peu-à-peu, & qu'à diverſes repriſes on en verſe même juſqu'à ce qu'elle le ſurnage. Si avant d'avoir commencé à humecter ce Sable, on a marqué où

où ſe terminoit ſa ſurface, ce qui eſt toûjours très-facile, ſur-tout ſi l'on fait l'expérience dans quelque bouteille de Verre tranſparent, on obſervera que la ſurface du Sable bien humecté ne ſe ſera aucunement élevée. Il arrivera même quelquefois qu'elle s'abbaiſſera un peu, parce que l'eau, qui a pénétré, a pû faire changer de place quelques grains de Sable, les porter dans des eſpaces qui, quoique capables de loger des grains, étoient reſtés vuides. Qu'on faſſe enſuite évaporer cette eau, la ſurface du Sable reſtera toûjours au même endroit. Rien n'a dû contribuer à l'élever ou à l'abbaiſſer. La vûë ſimple nous met en état de juger que les grains de Sable ſont ſemblables à des fragments de Criſtaux ou de Cailloux, qu'ils ſont de même tranſparents, & que leurs ſurfaces ſont polies, ſerrées; en un mot on juge qu'ils ſont impénétrables à l'eau, comme les Cailloux & les Criſtaux. Ils ont pareillement une peſanteur ſpécifique qui ſurpaſſe celle de l'eau. Qu'a donc pû faire l'eau qui a été verſée ſur une maſſe de Sable? ce n'a été que de deſcendre par les petits paſſages qui lui ſont reſtés, & de remplir les vuides qui ſont entre les grains. Rien ne tend juſques-là à augmenter la maſſe, & rien ne tendra à la diminuer, lorſque l'eau s'évaporera. Seulement la maſſe humectée à fond, doit être plus ſolide, réſiſter mieux à la force qui par ſa preſſion tendroit à faire gliſſer les grains. L'eau les lie mieux entre eux que ne faiſoit l'air; les grains ſont alors plus difficiles à déplacer. C'eſt une Phyſique connüe de reſte de ceux qui voyagent dans des chemins où il ſe trouve du Sable.

Il en ſera de même, ſi au lieu de remplir le vaſe, dont nous venons de parler, de Sable groſſier, on le remplit d'un Sable prodigieuſement fin. L'eau dans ce ſecond cas n'eſt pas plus en état de pénétrer dans la ſubſtance de chaque grain, qu'elle l'étoit dans le premier cas; elle n'a pas plus de facilité à s'introduire dans des fragments de Cailloux & de Criſtaux que dans des Criſtaux & des Cailloux entiers; elle n'a pas plus de facilité à pénétrer dans des fragments de Sable que dans les gros grains dont ils ont fait partie. Elle ira remplir

les vuides que les petits grains laissent entr'eux, si elle trouve des routes pour y arriver; de sorte que quelque fine que soit la poudre sablonneuse, contenüe dans un vase, on n'augmentera aucunement son volume, si on l'humecte peu-à-peu, aussi ne lui fera-t-on rien perdre de celui qu'elle avoit moüillée, si on la séche doucement; mais les circonstances de ne l'humecter ni de la sécher trop brusquement sont nécessaires, pour des raisons que nous expliquerons ailleurs.

Remplissons un vase pareil à celui où nous avons mis jusqu'ici nos différents Sables, de quelques graines fines, de Millet, de graines de Navette, &c. & versons par-dessus cette graine la quantité d'eau qui pourra être reçûë. L'eau ira d'abord occuper les intervalles que les grains laissent entr'eux, mais elle ne s'en tiendra pas là, comme elle fait quand le vase est plein de Sable; peu à peu elle s'introduira dans chaque grain, elle les gonflera tous. Bien-tôt le vase sera plus que plein, les grains s'éleveront par-dessus ses bords; & si on veut ensuite les faire sécher, on ramenera la masse à son premier volume: il en arriveroit de même, si au lieu de graines, on eût employé de la sciûre de bois.

Enfin prenons un vase rempli d'une Terre séche, ou pour éviter actuellement les difficultés qui se peuvent trouver à bien remplir le vase, prenons un morceau d'une Terre solide bien séche, & dont toutes les dimensions soient aisées à mesurer; un morceau de Glaise, par exemple, à qui on aura donné la figure d'un cube, d'un parallelepipede, d'un cylindre. Humectons cette Terre séche, & après que nous aurons eu donné à l'eau le temps de la pénétrer, mesurons une seconde fois ses dimensions, nous les trouverons toutes augmentées; faisons ensuite sécher cette même masse de Terre, & nous la ramenerons à son premier volume. En un mot, une masse de Terre, comme un morceau de bois, acquiert du volume lorsque l'eau la pénétre, & en perd quand l'eau s'en évapore.

Ces observations simples & communes nous conduisent, ce me semble, bien directement à regarder chaque molecule, chaque grain de Terre, comme un petit corps spongieux que

l'eau peut pénétrer & diſtendre, & par conſéquent comme un corps compoſé de parties fléxibles. Au lieu, que les grains de Sable ſont des corps roides, infléxibles, impénétrables à l'eau. Ces derniers ont auſſi une tranſparence que n'ont pas les grains de Terre; des corps ſpongieux n'ont pas une diſpoſition prochaine à la tranſparence.

Si les grains de Terre étoient compoſés de parties roides, qui laiſſaſſent ſimplement entr'elles des cavités propres à recevoir une certaine portion d'eau, tout ce qui en arriveroit, c'eſt que l'eau ſe logeroit entre les parties d'un grain, comme elle ſe loge entre les différents grains de Sable. La poudre de charbon qui eſt ſpongieuſe, mais compoſée de parties roides ne ſe renfle point par l'humidité, elle commence à s'éloigner de la Terre, & à s'approcher du Verre. Le volume de chaque grain de Terre, & celui de la maſſe entiére, ne ſeroit pas augmenté par l'eau ſi les grains étoient ſimplement ſpongieux, comme ceux du charbon. Mais l'eau ne s'introduit pas ſeulement entre les parties du grain, elle les écarte, comme elle écarte les fibres du bois, où elle s'inſinüe. Ce n'eſt pas une petite difficulté en Phyſique, que d'expliquer d'où l'eau prend la force, au moyen de laquelle elle diſtend les corps dans leſquels elle s'introduit, car cette force eſt prodigieuſe; ſon effet ne peut être arrêté par les plus grands fardeaux ſuſpendus au bout des cordes; des coins de bois humectés s'enflent, quoique renfermés entre des maſſes de roches, telles que les meules de Moulin, & les font ſauter. Je n'entreprends point actuellement d'expliquer la cauſe d'où dépend ce grand effet de l'eau, mais il nous ſuffit d'avoir commencé à établir, qu'une des principales propriétés de la Terre, une de celles qui la diſtingue des Cailloux, des Criſtaux, des Sables, &c. eſt d'être ſpongieuſe, & de ſe laiſſer renfler par l'eau. Il étoit plus important qu'il ne ſemble, de bien connoître cette propriété de la Terre, de ſçavoir qu'elle ne la partage point avec les Sables. Nous aurons bien-tôt occaſion de voir combien nous en pouvons tirer de lumiéres, par rapport à pluſieurs productions, ſoit de la Nature, ſoit de l'Art. Quand nous

viendrons, par exemple, à expliquer la formation des Pierres, nous verrons qu'elles ne ſont que du Sable & de la Terre, réünies en une maſſe. Nous aurons des caractéres pour diſtinguer les différentes eſpeces de Pierres, en faiſant voir les différentes proportions dans leſquelles ſont faits, dans les unes & dans les autres, les mêlanges de Terre & de Sable. Auſſi regardai-je cette propoſition, comme une des propoſitions fondamentales de cette partie de la Phyſique où on examine la compoſition des Minéraux, & des autres Corps terreſtres; nous ne la ſçaurions donc prouver trop ſolidement.

Il ſe fait journellement une ſorte de reproduction de la Terre très-propre à nous confirmer dans l'idée que nous avons priſe de chaque grain de Terre, comme d'un corps ſpongieux. Nous voyons, pour ainſi dire, renaître la Terre, chaque jour, par la décompoſition des corps, à la formation deſquels elle a beaucoup de part. Du bois, des feüilles, des Plantes ne ſont pas de la Terre, mais le Terreau, employé par les Jardiniers, n'eſt-il pas une eſpece de Terre? Si on ne veut pas encore le reconnoître pour tel, lorſqu'on l'étend ſur les couches, ſur les plattes-bandes, au moins ne héſitera-t-on pas à le prendre pour vraye Terre, lorſqu'il aura reſté expoſé à l'air pendant deux ou trois ans, qu'il aura aidé pendant ce temps à la végétation des Plantes; alors on ne pourra plus le diſtinguer de la Terre ordinaire des Jardins. Or, qu'eſt-ce que du Terreau? ce n'eſt que du fumier plus pourri; & qu'eſt-ce que ce fumier? ce ſont des pailles, des herbes, des feüilles d'arbres qui ont été corrompuës juſqu'à un certain point. A la Campagne, on fait des tas de toutes ſortes de feüilles, & de toutes ſortes de Plantes communes, comme des fougéres; on met même en tas, en quelques Pays, des arbuſtes, comme des Genêts ordinaires ou des Genêts épineux; ces Plantes ainſi amoncelées, ſont arroſées par l'eau des Pluyes; l'humidité qu'elle y entretient, les fait fermenter, elles ſe corrompent, elles ſe changent en fumier, qui porté dans les champs, y devient Terreau, & enſuite de véritable Terre. C'eſt ainſi qu'on rend chaque année à un champ, au moins une partie

de ce qu'on lui a ôté pendant la recolte. Voilà donc des Plantes redevenuës Terres, ou si l'on veut, on a retiré de ces Plantes ce qu'elles avoient de Terre. Qu'est-ce qu'étoient ces Plantes? des composés d'une infinité de tuyaux, ou de fibres spongieuses. Elles reparoissent sous la forme de Terre, après avoir été divisées en parties d'une extrême petitesse; à la vérité la division qui a été faite, n'est pas précisément semblable à celle qui se feroit par des haches, des ciseaux, des pilons; du bois, des feüilles réduites en la poudre la plus fine, ne sont pas précisement pour cela de la Terre. La division ici a été l'ouvrage de la fermentation. Le mouvement qu'elle produit, ne se réduit pas à séparer un tout en diverses portions, chacune semblable à celles qui formoient le tout. Elle divise, pour ainsi dire, chaque partie, elle la décompose; elle met les Soufres & les Sels les plus volatils en état de s'évaporer. Ils s'évaporent à mesure que les parties pourries se séparent, & qu'elles leur permettent de s'élever. A mesure donc que les parties de nos Plantes perdent plus de leurs Soufres & de leurs Sels volatils, & qu'elles se divisent en plus petits grains, elles se rapprochent davantage de la nature de la Terre commune; enfin elles se trouvent réduites à l'état de cette Terre, lorsque la division & l'évaporation ont été portées assés loin.

En suivant cette sorte de génération, ou de revivification de la Terre, nous voyons qu'elle a été tirée de corps fléxibles, de corps spongieux qui ont perdu une certaine quantité des parties qui entroient dans leur composition. La dissipation qui s'est faite de certaines parties ne paroît pas propre à augmenter la solidité de la tissure des parties d'où celles-là ont été dégagées, elles ne semblent que la devoir rendre moins dense, plus spongieuse. Ainsi il semble que chaque molecule de Terre doit être au moins aussi spongieuse, & même l'être davantage que chaque molecule de Plante. Enfin il est clair, au moins qu'un molecule, qu'un grain de Terre différe d'une partie d'une pareille grosseur de la Plante, en ce qu'elle a moins de Soufres & de Sels volatils, elle n'a gardé que les plus fixes des uns & des autres.

La fermentation qui se fait dans les Plantes, pour les réduire en fumier ou en Terreau, conserve non-seulement leur tissure spongieuse, elle donne de plus à la matiére qui paroît sous une nouvelle forme, une sorte de tissure poreuse qu'elle n'avoit pas auparavant. C'est ce qui est prouvé par une expérience que j'ai faite sur des feüilles de Vignes que j'ai mises chés moi en tas & à couvert, pour les y faire pourrir, sans se mêler avec d'autre Terre. Quand elles ont été pourries jusqu'à ce point où elles perdent leur nom pour prendre celui de Terreau, elles ont fermenté vivement, & subitement avec les acides que j'ai versés dessus. Au lieu que l'Esprit de Nitre versé sur des feüilles vertes, sur des feüilles séches, ou sur des feüilles simplement commencées à pourrir, n'y produit aucune fermentation sensible.

Je sçais bien qu'il se peut faire une décomposition des Plantes qui nous donnera un résidu terreux, plus compacte, moins spongieux, moins propre à se renfler, & à se raccourcir, que les parties des Plantes ne l'étoient, & telles sont les cendres que nous laisse le bois brûlé. Mais ces cendres aussi approchent beaucoup plus de la nature du Sable, que de celle de la Terre, comme nous le prouverons ailleurs. Un agent plus violent que ceux qui agissent dans la fermentation, a exercé ses forces contre le bois; quand le feu l'a brûlé ç'a été dans un instant qu'il a enlevé une quantité considérable de matiéres; des matiéres, même peu volatiles, ont cedé à la force de son action, comme il paroît par la suye qui s'assemble dans les cheminées. Il a changé la tissure du tout, s'il a écarté certaines parties les unes des autres, il en a rapproché d'autres. Tout se passe plus paisiblement dans une fermentation aussi douce que celle qui occasionne la dissolution des Plantes, il n'y a que les parties les plus volatiles qui s'élevent. Il n'y a pas de mouvements assés considérables pour rapprocher des parties qui par leur tissure naturelle sont écartées, pour rendre compacte ce qui est spongieux.

Si après avoir dissout certaines Terres dans l'eau, c'est-à-dire, si après avoir agité de l'eau au fond de laquelle il y

avoit de la Terre, & l'avoir renduë bourbeuſe, on laiſſe raſſeoir cette eau dans un verre tranſparent, & qu'on obſerve ce qui ſe paſſe pendant qu'elle s'éclaircit; il ſemble alors que les formes de maſſes ſpongieuſes, que nous avons attribuées à chaque grain de Terre ſe manifeſtent. Du moins voit-on deſcendre vers le fond du verre des flocons ſemblables à ceux de la neige, ou à ceux qui nagent dans le lait caillé. Si on obſerve l'eau dans laquelle ſe précipite le Sable le plus fin, & où il s'y précipite auſſi lentement que fait la Terre dans l'eau dont nous venons de parler, on n'y apperçoit nullement de pareils flocons ; les grains de Sable n'en ſont point, & ne ſont pas propres à en former par leur réünion.

Il eſt encore à remarquer, que ſi après avoir rendu du Sable extrémement fin par la trituration, on l'abreuve de la quantité d'eau néceſſaire pour en former un petit gâteau, que dès que cette petite maſſe eſt ſortie des mains, & poſée à plat, qu'une couche d'eau vient couvrir ſa ſurface. Un gâteau de Terre pétri de la même maniére, ne paroîtra pas couvert d'une couche d'eau, elle ne s'aſſemble point ſenſiblement ſur ſa ſurface. Dans le premier cas, l'eau ne peut être retenuë que dans les interſtices des grains. Dans le ſecond, elle eſt dans les grains mêmes, & ce n'eſt que peu à peu qu'elle peut s'en dégager, c'eſt-à-dire, à meſure que celle de la ſurface s'évapore.

Quoique la propriété d'être ſpongieuſe, de ſe laiſſer renfler par l'eau qui la pénétre, ſoit ſelon moi une de celles qui caractériſe le mieux la Terre, & une de celles dont on peut faire le plus d'uſage dans l'explication des phénomenes, elle en a un autre qui va de pair, dont l'éxiſtence eſt plus aiſée à démontrer, & qui prouve même l'éxiſtence de la premiére. Le caractere le mieux marqué que nous ayons, pour diſtinguer les Métaux des Minéraux, c'eſt leur malléabilité ; de ce que, ſoit à froid, ſoit à chaud, ils ſoûtiennent les coups de marteau ſans ſe caſſer. Tous les compoſés que nous avons mis dans la claſſe des Métaux ont cette propriété ; quand ils ſont purs, quand ils ne ſont point alliés avec des matiéres

qui la leur ôtent, ſoit qu'on les frappe, ſoit qu'on les tire par une filiére, dont la force équivaut à celle de la percuſſion, on les étend ſans les caſſer, ils ſont ductiles. La Terre eſt auſſi caractériſée par une eſpece de ductilité que n'ont ni les autres Minéraux, ni les Métaux. Sa ductilité eſt de l'eſpece de celle de la pâte ; la Terre eſt pétriſſable. Lorſqu'on la ramollie par l'eau, elle ſe laiſſe étendre, elle prend entre les doigts la forme qu'on veut lui donner, & elle la conſerve. C'eſt à cette propriété de la Terre à qui nous ſommes redevables du bas prix auquel ſont tant d'ouvrages de Poterie & de Fayance, ſi commodes pour une infinité d'uſages. Un ouvrier exercé fait prendre ſur le Tour les figures de vaſes arrondis à une maſſe de Terre informe, & cela preſque ſur le champ.

Toutes les Terres n'ont pas cette propriété à un même degré ; celles qui l'ont le plus, ſont appellées des *Terres graſſes,* & celles qui l'ont le moins, des *Terres maigres.* Les Terres les plus maigres, les moins ductiles, ſont celles qui ſe rapprochent le plus du Sable, car cette ductilité, propre à la Terre, manque entiérement aux Sables. Une maſſe de Terre peut être maigre de deux maniéres, ou parce que la vraye Terre ne fait qu'une portion du tout, dans lequel entre une portion conſidérable de Sable. Ainſi nos Terres labourables ſont-elles toutes mêlangées avec une quantité de Sable ſenſible, qui en peut être ſéparé par des lotions ; elles ne ſont ſouvent plus maigres les unes que les autres, que parce que le Sable y eſt mêlé en plus grande proportion. Mais diverſes Terres ſont par elles-mêmes, indépendamment du Sable avec lequel elles ſont mêlées, moins ductiles, moins graſſes que bien d'autres Terres, la tiſſure de leurs grains ſe rapproche plus de celle des Sables, & s'éloigne de celle des Terres les plus graſſes. Ces remarques fourniſſent le fondement de la diviſion des Terres en bien des eſpeces, toutes aiſées à caractériſer.

Quoiqu'il ſoit très-ſûr que le Sable ordinaire, que le Sable dont les grains ſont ſenſibles, n'a aucunement la ductilité des

des Terres grasses. On doutera peut-être, & avec vrai-semblance, si ce manque de ductilité ne doit pas être attribué uniquement à la grosseur de ses grains ; si le Sable réduit en grains aussi fins que ceux de la Terre, ne donneroit pas de même une pâte traitable : car il est évident que plus les grains seront fins, & plus ils auront de disposition à se lier ensemble. Cependant j'ai fait réduire par un long broyement le Sable dans une poudre extrémement fine, & j'ai eu grand regret de voir que quelque trituré qu'il eût été, il ne faisoit jamais une pâte qui eût cette liaison, cette onctuosité, qui met les pâtes de Terre en état d'être travaillées. Lorsque je traiterai de la maniére de faire les différentes especes de Porcelaines, on verra combien j'ai dû désirer de parvenir à avoir une pâte de pur Sable qui fût ductile, & avec quels soins j'ai dû tenter les expériences qui pouvoient la faire espérer.

Mais quelques soins que j'aye pris pour faire bien broyer du Sable, on peut pourtant penser que la petitesse à laquelle j'ai réduit ces grains, n'approchoit pas de celle où la nature les peut amener, & de celle que la nature a réellement donnée aux grains qui composent les Terres grasses. J'ai craint que cela ne fut ainsi; mais des expériences m'ont prouvé que j'avois des pâtes de Sable très-peu traitables, quoique leurs grains ne fussent peut-être pas plus gros, ou peut-être le fussent moins, que les grains de Terre. La meilleure maniére de séparer le Sable de la Terre avec laquelle il est mêlé, est de détremper la masse composée dans une suffisante quantité d'eau, de faire du tout une eau bourbeuse; & de laisser ensuite reposer cette eau pendant quelque temps, c'est-à-dire, jusqu'à ce qu'elle commence à s'éclaircir. Les grains les plus gros & les plus pesants se précipitent les premiers, bien-tôt ils tombent au fond du vase: si on verse l'eau doucement par inclination, elle n'emporte avec soi que les parties les plus fines & les plus légeres qui y étoient restées suspendües. Si cette eau a été reçûë dans un second vase, & qu'on l'y laisse reposer pendant un temps plus long que celui où on l'a laissée dans le premier, peu à peu elle y dépose les parties

dont elle étoit chargée, elle reprend avec le temps sa premiére limpidité. Dans le premier vase il est resté un sédiment sablonneux, qui n'est plus mêlé avec une aussi grande portion de Terre qu'il l'étoit d'abord, & ce qui a passé dans le second vase est une Terre mêlée avec peu de Sable, ou avec le Sable le plus fin. Si on repete un nombre de fois suffisant des opérations semblables sur le sédiment sablonneux du premier vase, ce sédiment se trouve purgé de toute Terre, c'est du Sable aussi pur que nous pouvons nous proposer de l'avoir. Comme l'un des sédiments venus de la premiére opération, n'étoit pas pur Sable, de même l'autre sédiment venu de cette même opération n'étoit pas pure Terre, il est resté de la Terre dans l'un, & il a passé du Sable avec la Terre dans l'autre. Si on répéte pareillement ces opérations sur le sédiment terreux, c'est-à-dire, si on travaille à séparer le Sable fin qui étoit resté mêlé avec la Terre, plus on donnera le temps à l'eau de se reposer, avant de la transvaser, & plus on donnera de facilité au Sable de se séparer, plus aussi on en dépurera la Terre.

Mais quand les opérations auront été répétées un certain nombre de fois, inutilement les repeteroit-on davantage; si les grains de Sable qui restent mêlés avec ceux de la Terre sont d'une telle petitesse, qu'ils n'ayent pas plus de force pour vaincre la résistance que l'eau oppose à leur descente, qu'en ont les grains de Terre, les grains de Terre & les grains de Sable se précipitent alors pêle-mêle. Reste à sçavoir, & c'est précisement la question à éclaircir, si ces grains de Sable qui ne sont pas plus en état de se précipiter que des grains de Terre, si des grains de Sable si petits n'ont pas les qualités que nous regardons comme particuliéres à la Terre, s'ils ne peuvent pas faire une pâte ductile. Une expérience bien simple me donne les éclaircissements nécessaires pour décider la question.

Je réduis par le broyement le Sable dans une poudre extrêmement fine, j'y réduis de même du Verre. J'entreprends de faire des pâtes avec l'une ou l'autre de ces poudres, & je

trouve que, dans quelque proportion que je les délaye avec de l'eau, je n'ai jamais une pâte grasse, onctueuse, en un mot, ductile. Si je puis démontrer que ces grains sont cependant aussi fins que ceux d'une Terre ductile, j'ai démontré que la ténuité seule des grains ne suffit pas pour donner une pâte grasse : or les remarques précédentes nous mettent en état de décider si ces grains de Sable ou de Verre sont aussi déliés que ceux de la Terre. Pour cela je n'ai qu'à prendre une Terre grasse, bien reconnuë pour Terre, & à l'allier avec une quantité connuë de poudre de Sable ou de Verre, c'est-à-dire, à faire une pâte de poudre de Sable & de Terre, de poudre de Terre & de Verre; & après avoir bien fait ces mêlanges, tenter par des lotions de séparer le Verre ou le Sable d'avec la Terre. Si je n'y parviens point, je suis certain que les grains de Verre ou de Sable se soûtiennent aussi aisément dans l'eau que ceux de Terre; d'où je suis en droit de conclurre que les grains de Sable & de Verre sont aussi déliés que ceux de Terre : je pourrois même conclurre qu'ils sont plus fins, parce qu'on sçait d'ailleurs que la pesanteur spécifique du Sable & du Verre sont plus grandes que celles de la Terre; ainsi les grains de Sable, pour rester également suspendus dans le liquide, doivent être plus petits, il faut qu'une augmentation de surface compense leur excès de pesanteur sur celle des grains de Terre. Or j'ai composé des pâtes de Terre glaise, & d'autres Terres grasses mêlées soit avec du Sable réduit dans une poudre très-fine, soit avec du Verre broyé au même point, d'où je n'ai pû ensuite séparer par des lotions que peu ou point du Sable ou du Verre que j'y avois fait entrer : donc les grains de ces poudres de Verre & de Sable étoient aussi fins que ceux de la Terre. Cependant des pâtes faites uniquement de ces mêmes Sables, ou de ces mêmes Verres broyés ne sont pas ductibles : donc la finesse des grains ne suffit pas pour composer une pâte ductible.

Quoiqu'il y ait entre le Verre & le Sable des différences, je ne les regarde que comme celles qui sont entre les différentes especes de Verres, & nous sommes en droit ici de les

traiter également dès que les grains de l'une & de l'autre de ces matiéres ont des ſurfaces polies, & qu'elles ſont l'une & l'autre impénétrables à l'eau. Une eſpece de Verre, dont on avoit fait des Bouteilles, où le Vin s'altéroit, a donné occaſion à M. Geoffroy le cadet de faire une fort curieuſe obſervation; c'eſt qu'il y a des Verres qui, comme les matiéres métalliques, ſe laiſſent diſſoudre par l'Eſprit de Nitre, & encore mieux par l'Huile de Vitriol. Les diſſolvants ſont des agents ſemblables à ceux que la Nature employe, les parcelles dans leſquelles ils diviſent les corps ſont bien d'une autre fineſſe que celles qui nous viennent après des triturations ordinaires. J'ai fait diſſoudre de ces Verres altérables, & quand la diſſolution a été faite, j'ai édulcoré, le mieux qu'il m'a été poſſible, le Verre diſſout, c'eſt-à-dire, qu'en le lavant à bien des repriſes, j'ai emporté tout le Sel que l'eau en pouvoit emporter. Cette poudre, toute fine qu'elle étoit, n'a point été propre à donner une pâte ductile. On auroit tort ſi on mettoit ſur le compte des Sels, qui ſont reſtés engagés dans le Verre, ce manque de ductilité. Une Terre ductile, après avoir été ſoulée de Sel, de quelque eſpece que ce ſoit, ſe laiſſe pétrir & bien étendre.

Dès qu'on y regarde de près, on apperçoit auſſi qu'il ne ſuffit pas que les grains d'une poudre, qui a été détrempée par l'eau, ſoient extrémement fins, pour que la pâte qui en vient ſoit ductile. La ductilité de toute maſſe, de toute matiére, ſuppoſe que ſes parties ont entr'elles un certain degré de liaiſon ; & elle ſuppoſe de plus, que lorſqu'on fait changer de forme à cette maſſe, que lorſqu'on déplace ſes parties, qu'il y en a qu'on fait mouvoir ſur d'autres ; que les parties, pendant leur déplacement, ſont auſſi adhérantes aux parties qu'elles rencontrent, qu'elles l'étoient à celles qu'elles touchoient pendant qu'elles étoient en repos ; qu'il en eſt de chacune de ces parties à peu-près comme d'un morceau de Marbre qui touche par une ſurface plane & polie, une table de Marbre auſſi plane & auſſi polie ; qui voudroit l'enlever, auroit à vaincre une réſiſtance plus grande que celle du poids

de ce morceau de Marbre ; & on trouveroit la même résiſtance, ſoit qu'on voulût l'enlever pendant qu'il eſt en repos, ſoit pendant qu'il eſt forcé de gliſſer ſur la ſurface de la table. Des grains anguleux, tels que ceux de tout Sable & de toute poudre de Sable, des grains d'ailleurs roides, ne ſont pas propres à ſe lier, à s'attacher enſemble, par le ſeul attouchement ; ils ne ſçauroient ſe toucher que par des petites ſurfaces, &, pour ainſi dire, par quelques points. Si on remplit d'eau les interſtices qu'ils laiſſent entr'eux, leur liaiſon en ſera augmentée, parce que les parties de l'eau tiennent plus les unes aux autres que ne font celles de l'air : mais elle ne ſera augmentée que de ce que l'eau a de liaiſon ou de viſcoſité, & cela ne va pas loin. Auſſi ſi l'on veut pétrir cette maſſe, dont les grains ſont ſi mal liés, il s'y fera des fentes, elle ſe ſéparera en pluſieurs parcelles. Les déplacements des grains occaſionneront ceux de l'eau ; dans les endroits où les grains ſe trouveront ſéparés des autres par trop d'eau, & dans les endroits où ils ſe toucheront moins, il ſe fera des ſéparations.

Rempliſſons un vaſe d'une Terre bien ſéche, réduite en poudre. Preſſons cette poudre autant qu'il eſt poſſible ; les grains ſont alors à peu-près dans le même cas où ſeroient ceux d'une poudre de Sable. Mais ſi nous arroſons enſuite cette poudre d'eau, nous allons avoir des effets fort différents de ceux qui arriveroient, ſi nous arroſions de même du Sable, & dont la cauſe eſt dûë à la premiére propriété de la Terre que nous avons établie ; ſçavoir, à ce qu'elle eſt ſpongieuſe, à ce que ſes grains ſe laiſſent pénétrer & gonfler par l'eau. L'eau qui n'iroit que dans les intervalles que les grains de Sable laiſſent entr'eux, s'inſinüe dans les grains mêmes de Terre, elle fait effort pour les gonfler en tous ſens ; ils vont chacun s'étendre, & les côtés où ils s'étendront le plus, ce ſeront ceux où ils trouveront moins d'obſtacles à leur extenſion, c'eſt-à-dire, vers les endroits où ils ne s'entretouchent pas. En ſe gonflant, ils vont à la rencontre les uns des autres ; bien-tôt les attouchements des grains, les engrénements des parties des uns dans celles des autres, ſeront

considérablement augmentés, ou, ce qui est la même chose, la liaison, la ténacité de la masse va être augmentée, car chaque grain est contraint ici à s'appliquer contre son voisin, par une force pareille à celle qui agit dans les cordes que l'eau pénétre.

Si on vient dans la suite à faire sécher cette masse, il arrivera même que ses grains, redevenus secs, tiendront beaucoup plus ensemble qu'ils n'y tenoient avant qu'ils eussent été moüillés. L'eau les a engrénés les uns dans les autres, & l'engrénement n'a pas été détruit pendant qu'elle s'est évaporée; la pression de l'air extérieur a tenu unis des grains qui ne tendoient pas à se séparer. Nôtre masse de Terre séche sera plus dure que lorsqu'elle étoit moüillée, tout au contraire de ce qui arrive à un tas de grains de Sable. L'état de chaque grain de Sable est le même, soit que le tas qu'ils composent soit moüillé, soit qu'il ne le soit pas. Il n'en est pas de même de celui de chaque grain de Terre dans ces deux différentes circonstances; la masse qu'ils composent ne sçauroit être moüillée, qu'ils ne soient chacun moüillés intimement. Nous avons tâché de donner quelque idée de la tissure que nous leur concevons, en les comparant à de petits fragments d'éponge, de papier, à de la poudre de bois; ils boivent l'eau comme ces sortes de matiéres, & il est à croire aussi que quand ils en sont imbibés, ils ont comme elles une souplesse qui leur manque, lorsqu'ils sont plus secs. Quand l'eau a donné à la Terre la consistance d'une pâte médiocrement molle, elle a ramolli chacun de ses grains: l'eau plus molle que le corps dans lequel elle s'introduit, doit ramollir ce corps, si elle en augmente les dimensions précisément de la quantité du volume qu'elle y va occuper, au lieu qu'elle augmenteroit la dureté du corps où elle s'introduiroit sans le dilater, parce qu'elle y occuperoit la place d'une matiére plus tenüe. Le papier, le bois moüillés nous donnent un exemple de ce qui arrive dans le premier cas, & le tas de Sable nous en donne un de ce qui arrive dans le second.

La principale cause de la ductilité qu'a la Terre ramollie

par l'eau doit, à mon ſens, être tirée de ce qu'alors chacun de ſes grains ont une ſoupleſſe qu'ils n'avoient pas auparavant; je n'exclus pas pourtant l'eau des vuides que les grains peuvent laiſſer entr'eux. Je comprends même que lorſqu'on vient à preſſer la maſſe, que lorſqu'une force tend à faire mouvoir une partie des grains, que l'eau qui eſt dans les interſtices qu'ils ne rempliſſent pas, aide à les faire gliſſer. Mais je conçois que ces grains, qui en changeant de place, cedent à la force qui tend à les faire aller en avant, changent en même temps de figure pour s'appliquer contre les grains qu'ils rencontrent. Cet effet eſt une ſuite néceſſaire de leur ſoupleſſe, dès qu'ils portent à faux quelque part, dès qu'ils ne touchent pas ſuffiſamment leurs voiſins, ils ſont obligés de céder juſqu'à ce qu'ils ayent trouvé un appui qui les mette en état de réſiſter à la force qui agit contre eux. Si un gâteau de pâte ne touchoit pas par-tout un plateau ſur lequel il ſeroit poſé, on l'obligeroit à le toucher par-tout, ſi on le preſſoit au deſſus des endroits où il n'y étoit pas appliqué. Ce qui arrive ſenſiblement à toute la maſſe de pâte, eſt ce qui arrive continuellement à ſes grains, quand on la manie ou preſſe pour lui faire changer de forme. Les grains ſouples & hors d'état de ſe ſoûtenir, s'ils ne ſont appuyés de toutes parts, obéiſſent juſqu'à ce qu'ils ſe ſoient preſque moulés ſur leurs voiſins. Tout ſe paſſeroit différemment, ſi les grains étoient roides, infléxibles comme des grains de Sable; quelques points d'appuis ſuffiſent à ces derniers, la force qui agit contre eux n'a d'autre effet que de les faire mouvoir. Quand la maſſe qu'ils formoient, auroit été ſans gerçures, il s'y en feroit dès qu'ils ſeroient forcés à ſe déplacer, parce qu'alors les vuides ceſſeroient bien-tôt d'être auſſi réguliérement diſtribués.

On pourroit croire que la figure ſeule des parties ſuffiroit pour expliquer la ductilité de la Terre moüillée; qu'en leur en imaginant une qui leur permit de s'appliquer éxactement les unes contre les autres, qu'on auroit une cauſe de leur tenacité, & d'une tenacité qui ſe conſerveroit pendant qu'elles ſeroient miſes en mouvement, ou, ce qui eſt la même choſe,

pendant qu'on feroit changer de forme à la maſſe qu'elles compoſent. Mais quelles figures plus favorables leur pourroit-on imaginer que celles de lames bien polies? Avec de pareilles lames, on pourroit faire un tout dont les parties ſeroient liées, tant que l'arrangement régulier des lames ſubſiſteroit. Mais cet arrangement ſeroit bien-tôt troublé, ſi on venoit à paîtrir la maſſe; les lames ſe trouveroient bien-tôt différemment inclinées les unes par rapport aux autres; & alors plus de liaiſon, plus de ductilité, ſi la ſoupleſſe de chacune des lames ne donnoit l'une & l'autre.

Les Gyps, les Talcs fourniſſent une preuve qui confirme fort le raiſonnement précédent. On ſçait qu'une des propriétés de l'une & de l'autre de ces matiéres eſt de ſe diviſer en feüilles, qui elles-mêmes ſe ſubdiviſent en d'autres feüilles, juſqu'à un terme que nous ignorons: de ſorte que ſi on pulvériſe du Gyps ou du Talc, la poudre ne ſera pas compoſée comme celle du Sable de grains qui auront à peu-près d'égales dimenſions en différents ſens, mais elle ſera compoſée de petites lames qui auront beaucoup moins d'épaiſſeur qu'elles n'ont de largeur & de longueur. Cependant quelques fines qu'ayent été les poudres de Talc & de Gyps, quand elles ont été humectées par l'eau, elles ne m'ont jamais donné ni une pâte liée, ni une pâte ductile. Auſſi ces pâtes, comme celles du Sable pulvériſé, ſe ſéchent ſans perdre rien de leurs dimenſions; preuve que l'eau ne pénétre pas plus dans l'intérieur des grains de Gyps & de Talc que dans celui des grains de Sable; & preuve encore que la figure la plus favorable des parties d'une poudre ne ſuffit pas pour que cette poudre détrempée par l'eau devienne une pâte ductile, lorſque l'eau ne peut pas pénétrer & ramollir chaque grain. Les Métaux ne doivent auſſi leur ductilité qu'à la ſoupleſſe de leurs parties; il y en a même, comme le Fer, & l'Acier ſur-tout, qui ne ſont bien ductiles que lorſqu'ils ſont extrêmement chauds; il eſt néceſſaire que le feu ramolliſſe des parties qui ont trop de roideur, lorſqu'elles ſont froides. En un mot la ductilité demande que les parties qui compoſent un tout, puiſſent elles-mêmes changer aiſément

aiſément de figure, & que pendant qu'elles en changent elles reſtent toûjours appliquées les unes contre les autres.

Les Terres, les plus terres, ſi je puis me ſervir de ce terme, telles que ſont les Glaiſes, ont une propriété bien connüe, celle de retenir l'eau, elle ne peut les traverſer. C'eſt à cette propriété de la Glaiſe à qui nous ſommes redevables des eaux de tant de Sources & de tant de Puits. Que la Glaiſe ſe laiſſe moüiller par l'eau, & que cependant elle ne permette pas à l'eau de la percer, què l'eau ne puiſſe ſe filtrer au travers d'un lit de Glaiſe qui eſt bien humecté, c'eſt un fait ſingulier, & dont l'explication pourroit embarraſſer qui ignoreroit la propriété que nous avons reconnüe dans nos grains de Terre de ſe laiſſer pénétrer & gonfler par l'eau. Celle qui arrive ſur une maſſe de Glaiſe ſéche, trouve des grains prêts à la recevoir, elle peut même alors trouver des paſſages entre les grains, qui lui permettent d'avancer juſqu'à une certaine profondeur. Mais bien-tôt elle va elle-même ſe boucher ces paſſages. A meſure qu'elle s'introduit dans les grains, elle les diſtend, elle les gonfle, & les force à s'appliquer exactement les uns contre les autres.

Rohault, qui apparemment n'avoit pas aſſés fait d'attention à nôtre premiére propriété de la Terre, attribüe cet effet à une autre cauſe qui ſemble d'abord ſuffiſante. Il imagine que l'eau qui pénétre la Glaiſe, entraîne avec ſoi les grains les plus fins, qu'elle les dépoſe dans les paſſages, & qu'ainſi peu-à-peu elle les bouche. Mais ce ſentiment auquel on ſeroit peut-être forcé de s'en tenir, ſi on n'en avoit pas un plus probable, ſeroit combattu par bien des difficultés. Si on humectoit un morceau de Glaiſe ſéche par la ſeule vapeur d'un air humide, il ſeroit difficile de concevoir qu'il s'y fît des déplacements de grains de Terre ; cependant la Glaiſe humectée ainſi, ſeroit capable d'arrêter l'eau, comme celle qui auroit été arroſée par une quantité d'eau conſidérable : il s'enſuivroit que dans un lit de Glaiſe de quelques pieds d'épaiſſeur, ſur lequel l'eau coule, que le paſſage n'eſt bouché à l'eau qu'à une certaine profondeur de ce lit, & qu'elle en pénétre

aiſément les premiéres couches. Il ne lui eſt bouché, le paſſage, que où il y a eu aſſés de parties fines portées & dépoſées ; ces parties plus fines ont été priſes des couches les plus proches de la ſurface ; les premiéres couches devroient donc laiſſer paſſer l'eau, comme le font des couches de Sable. Or l'expérience démontreroit aiſément le contraire. Enfin un morceau de Glaiſe qui a une fois arrêté l'eau, lorſqu'il auroit été ſéché, & qu'on viendroit à en verſer deſſus, l'arrêteroit, lorſque l'eau ſeroit arrivée au premier endroit, ce qui n'eſt pas.

Ni la ductilité de la Terre, ni ſa propriété de ſe raccourcir en ſe ſéchant, ne peuvent donc être expliquées par la ſeule petiteſſe de ſes grains. Il faut de plus imaginer chacun de ſes grains ſpongieux & ſouples. La peine que j'ai eu à croire la premiére hypotheſe inſuffiſante, l'envie que j'ai eu pluſieurs fois d'y revenir, me fait penſer qu'on ne ſçauroit trop bien établir que l'un & l'autre effet ne ſçauroient uniquement dépendre de la fineſſe des grains. Les Sels concrets paroiſſent propres à le bien prouver. Il n'en eſt peut-être aucun qui ne ſoit compoſé de parties plus tenües que celles des Terres ordinaires; du moins eſt-il ſûr que leurs parties, qui ſe ſoûtiennent dans l'eau, pendant que celles de la Terre ne s'y ſoûtiennent pas, ſont prodigieuſement fines ; cependant je ne connois point de Sel, qui étant imbibé d'eau, faſſe une pâte ductile, ni dont l'eſpece de pâte qu'on en aura faite ſe raccourciſſe en ſéchant. J'ai formé des lames avec differents Sels réduits en poudre, & enſuite arroſées d'eau légerement, aucune de ces lames ne s'eſt raccourcie ſenſiblement pendant qu'elle s'eſt ſéchée. J'ai eſſayé de la ſorte de l'Alun, du Vitriol, du Borax, du Sel de Soude, &c.

Les caractéres particuliers que nous avons aſſignés au Sable & à la Terre, ne ſont pas uniquement propres à nous donner des idées plus diſtinctes de l'une & de l'autre de ces matiéres, que celles qu'on s'en étoit faites juſqu'ici ; ces caractéres nous aideront extrêmement à démêler la compoſition de bien des Minéraux. Il n'en eſt point dont la Terre & le Sable

ne faſſent partie. Entre les différentes claſſes des matiéres minérales, la plus étenduë, & celle qui offre de plus belles variétés, eſt celle des pierres; une grande partie des genres qu'elle comprend, ne ſont faits que d'un alliage de Sable & de Terre. C'eſt une idée que nous développerons plus au long dans quelques Mémoires que nous avons à lire ſur la formation des Pierres, & ſur leurs diviſions en claſſes, en genres & en eſpeces; nous en avons déja donné une ébauche, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720, où nous avons taché d'expliquer la formation des Cailloux. Nous avons dit alors que dans certaines circonſtances, l'eau charrie une matiére ſablonneuſe qui eſt ſi fine qu'elle nage dans l'eau qui la tranſporte, qu'elle y eſt comme diſſoute. Que l'eau pourtant dépoſe cette poudre ſablonneuſe & criſtalline dans pluſieurs Terres ou Sables au travers deſquels elle ſe filtre. Que cette matiére dépoſée entre de purs Sables, en lie les grains enſemble. Que les grains ſenſibles d'un Sable ainſi liés, forment des Pierres de Grès. Que quand la même matiére ſe dépoſe entre les molecules de Terre, & qu'elle les lie, qu'elle compoſe des Pierres communes, telles que nos Pierres à bâtir, qui différent entr'elles ſelon la qualité de la Terre, dont les grains ont été liés enſemble, & auſſi ſelon la quantité de la matiére employée à les lier. Enfin que la matiére criſtalline introduite dans des Terres compactes, comme les Bols, les Glaiſes, &c. & dans des Pierres ſpongieuſes, formoit des Cailloux qui, dans la derniére circonſtance, étoient des Pierres, qui elles-mêmes s'étoient pétrifiées de nouveau, qui étoient devenuës plus Pierre, qu'elles ne l'étoient en leur premier état. Ces explications ſur la nature des Cailloux, qui ne manquent pas de vrai-ſemblance, ſont de plus prouvées, dans le Mémoire que je viens de citer, par des obſervations très-préciſes & très-déciſives. Mais ni ces obſervations, ni les raiſonnements qui les précédent, ne nous apprennent point s'il y a des Pierres où la Terre reſte ſous ſa forme de Terre; s'il y a des Pierres auſſi groſſiérement conſtruites avec la Terre que les Grès le ſont avec le Sable; ſi comme les

grains de Sable des Grès ſont ſimplement liés entr'eux par une matiére ſablonneuſe plus fine. Il y a de même des Pierres où les molecules de Terre ſont ſimplement liés entre eux par une pareille matiére criſtalline; en un mot, ſi la Terre qui compoſe certaines Pierres a conſervé toutes les propriétés de la Terre, & ſi au contraire celle qui eſt entrée dans la compoſition de quelques autres Pierres a perdu ces propriétés, & a ceſſé d'être Terre, ou au moins une Terre qui nous ſoit connoiſſable.

Pour éclaircir la premiére queſtion, j'ai pris un morceau de Pierre d'auprès de Charenton qui ne faiſoit qu'arriver au haut de la Carriére; il étoit encore tendre & preſque mol. Je l'ai fait piler, il a preſque été réduit en une pâte médiocrement dure. J'ai lavé cette pâte pierreuſe dans une ſuffiſante quantité d'eau, & cela à diverſes repriſes. L'eau s'eſt chargée des parties les plus légeres, elle en a emporté aſſés les premiéres fois pour être rendüe très-trouble. J'ai mis cette eau dans des vaſes, afin qu'elle y laiſſât dépoſer la matiére qu'elle avoit enlevée. Je n'ai ceſſé de laver la pâte que quand j'ai vû que l'eau qui l'avoit lavée ne ſe troubloit plus.

Les différents ſédiments que ces opérations m'ont fournis, m'ont mis en état de décider ſi cette eſpece de Pierre n'eſt compoſée que d'un Sable extrêmement fin, ou ſi elle eſt compoſée en partie d'une véritable Terre. Le premier, le plus ſimple eſſai que j'ai fait des premiers ſédiments, auroit ſeul ſuffi pour me convaincre que ces ſortes de Pierres contiennent une Terre pure. La pâte en laquelle ils ont été réduits, après que je ne leur ai laiſſé que l'eau néceſſaire pour les tenir mols, étoit auſſi ductile que celles de pluſieurs Terres; plus ductile que celle de quelques Marnes. Cette matiere qui avoit la ductilité propre aux Terres, & qu'on ne trouve point aux Sables, étoit donc de la Terre, & non du Sable.

J'ai paſſé enſuite à l'épreuve de l'autre propriété de la Terre, de celle de ſe raccourcir en ſéchant. J'ai fait des lames de cette Terre, que j'ai meſurées éxactement; je les ai laiſſées ſécher à l'ombre. Elles ſe ſont raccourcies de 5 lignes ſur 6

pouces, ce qui est un des grands raccourcissements dont soient capables les Terres pures.

Tous mes sédiments ne se sont pourtant pas raccourcis au même point; les premiers contenoient la Terre la plus pure, & celle des derniers étoit mêlée avec beaucoup de Sable. Aussi les sédiments tirés des derniéres lotions n'étoient pas une pâte ductile, comme celle des premiers : au lieu que les lames des premiers se sont raccourcies de 5 lignes sur 6 pouces, celles des derniers ne se sont raccourcies que de 2 lignes sur la même longueur.

Les sédiments moyens ont eû aussi des raccourcissements moyens entre les précédents.

Enfin le résidu dont l'eau n'emportoit plus rien, sur lequel elle ne se blanchissoit pas, étoit un pur Sable.

Nous pourrions par d'autres essais déterminer plus particuliérement le caractére de la Terre contenuë dans cette espece de Pierre, déterminer de quel genre elle est, en déterminer les proportions avec le Sable. Mais cet examen ne doit pas précéder le reste de ce Mémoire; sa place même ne sera que dans les Mémoires qui le doivent suivre. C'est assés d'avoir vû que nos premiéres propriétés de la Terre nous font connoître qu'il y a des Pierres où elle entre sans être altérée.

La seconde question que nous avons faite, est s'il y a des Pierres dans la composition desquelles la Terre soit entrée, & où elle ne conserve plus de ses premiéres propriétés de Terre, celles qui la font distinguer du Sable. Pour la résoudre, j'ai fait réduire des Cailloux de Marly dans la poudre la plus fine. Elle se soûtenoit dans l'eau à peu-près autant de temps que s'y soûtenoit la Terre tirée de nos Pierres de Charenton. Je l'ai pétrie, elle n'a eu nulle ductilité. J'ai fait des lames de cette pâte qui ont séché sans se raccourcir sensiblement. Cependant ces Cailloux ont probablement eu pour base une Terre pareille à celle des Pierres blanches de Marly. Quand la Pierre est devenüe Caillou, la Terre a donc perdu ses propriétés, elle semble être elle-même devenuë Caillou,

Sable, &c. Mais les Pierres d'auprès de Charenton nous fournissent encore de quoi mieux prouver cette espece de transformation de la Terre. On trouve de ces Pierres qui ont été changées en Cailloux, ce sont celles dont j'ai parlé dans le Mémoire de 1720, sur les Cailloux où leur métamorphose est bien prouvée. Or ces Pierres, tant qu'elles n'étoient que simples Pierres, contenoient une véritable Terre, comme il a été prouvé ci-dessus. J'ai traité des Cailloux parfaits, qui devoient sûrement leur premiére origine à des Pierres communes, de la même façon que j'avois traité des Cailloux de Marly, & ils ne m'ont pas plus donné d'indices de Terre. Je dis qu'ils étoient devenus des Cailloux parfaits, parce qu'il y a des Cailloux qui donnent encore des indices de matiéres terreuses, mais ce sont ceux dont le grain est le plus gros, & qui ont le moins de transparence.

Il résulte de-là qu'il y a des Pierres qui sont une Terre dont les grains ont été liés par la matiére cristalline; mais qu'il y en a d'autres, qui sont des Pierres plus parfaites, où la matiére cristalline a pénétré les grains mêmes de la Terre, à peu-près comme on imagine que les Acides pénétrent les Alkalis: mais ces conséquences demanderont à être plus détaillées & plus prouvées, elles doivent nous donner bien des éclaircissements sur la nature des différentes Pierres, & sur leur formation, ç'en est assés ici de les avoir indiquées.

Tous ceux dont la profession est de façonner la Terre en ouvrages, sçavent assés l'attention qu'il faut avoir à la propriété qu'ont les Terres ductiles de se retirer. Les Potiers de Terre, les faiseurs de Creusets, &c. sçavent qu'il faut faire sécher lentement les vases qu'ils en ont formés, qu'autrement ils sont en risque de se fendre, avant même qu'on les expose au feu qui les doit cuire; les forces avec lesquelles différentes parties tendroient à se raccourcir, n'étant pas égales, & étant supérieures à celles qui les tiennent unies, produiroient des séparations. Si une partie est épaisse, & que l'humidité s'en échappe trop brusquement, la couche la plus proche de sa surface est presque séche, pendant que les couches intérieures sont très

abbreuvées d'eau, ou, ce qui revient au même, la couche ſupérieure eſt devenuë plus courte que celle ſur laquelle elle eſt appliquée. Il faut donc néceſſairement qu'un eſpace vuide tienne lieu de ce qui manque à ſa longueur, elle ſe fend dans un, ou dans pluſieurs endroits, où elle étoit plus foible; de couches en couches il en arrive de même, & alors la partie ſe trouve partagée par pluſieurs fentes qui traverſent de part en part avant même qu'elle ſoit abſolument ſéche. C'eſt pour n'avoir pas le déſagrement de voir leurs ouvrages caſſés avant qu'ils ſoient ſecs, que les ouvriers mêlent une certaine quantité de Sable avec leur Terre; ils lui en donnent ce qu'ils lui en peuvent faire porter, ſans la rendre trop peu ductile. Plus le Sable fait une grande portion de la maſſe compoſée, & moins cette maſſe a de diſpoſition à ſe retirer, moins auſſi on a à craindre qu'elle ſéche trop promptement.

Ceux qui font des modelles en Terre ſçavent auſſi dans quelles proportions il faut les faire plus grands que ne le doivent être les ouvrages qu'on moulera deſſus, parce que ces modelles ſecs n'auront plus les dimenſions qu'ils avoient lorſqu'ils étoient humides.

Mais il y a une circonſtance importante où on n'a pas fait aſſés d'attention à cette propriété de la Terre, c'eſt dans la conſtruction des murs de revêtemens. Ces murs qui doivent ſoûtenir des Terraſſes faites pour l'agrément, comme celles des Jardins, où les Terres d'ouvrages utiles comme ceux des fortifications, ſont de conſéquence, tant par rapport à leur uſage, que par rapport à leur prix; au moins doit-on chercher à les rendre ſolides en leur donnant l'épaiſſeur & les talus ou fruits qui leur conviennent. Les dépenſes auſquelles ils engagent, font auſſi ſouhaiter de ne leur donner que la ſolidité convenable. On a eu recours à la Géométrie, pour déterminer les proportions qui leur ſont néceſſaires; mais la Géométrie ne réſout les problemes que ſur les conditions qui ont été propoſées, & il n'arrive que trop ſouvent qu'on reſtraint ceux de Phyſiques à des conditions qui en excluent d'autres que la Nature y fait entrer: ou qu'aux conditions que la Nature

preſente, on en ſubſtituë de totalement différentes. Par rapport à nos murs de revêtements, on a calculé le poids qu'ils ont à ſoûtenir pour empêcher l'éboulement des Terres. M. Couplet, qui a traité cette matiére avec plus d'étenduë, de détail & d'exactitude que perſonne, dans pluſieurs de nos derniers Volumes, a ſur-tout cherché à donner à ces murs toute la force néceſſaire. Pour cela il a pris l'hypotheſe où ils auroient à ſoûtenir des maſſes de pur Sable; il a même imaginé les grains de Sable comme autant de petites boules. Des murs bâtis avec la ſolidité néceſſaire pour tenir ferme contre des maſſes compoſées de grains ſi roulants ſembleroient avoir bien de la force de reſte, car il s'en faut beaucoup que les grains des Terres ordinaires ayent une pareille diſpoſition à rouler. Nous voyons tous les jours de longues & hautes maſſes de Terres coupées à pic, pour faire des chemins, ou des excavations, dont il ne s'éboule, au bout d'une année, que quelques hottées de Terre. Si des murs euſſent été élevés le long de ces Terres, le poids qu'ils auroient eû à arreſter, auroit égalé à peine celui que peut porter un homme robuſte. Ce poids même n'auroit jamais été à ces hottées de Terre qui ont été détachées; ce n'eſt que par petites parcelles que tombe ſouvent cette Terre qui s'accumule avec le temps à une quantité un peu conſidérable; les ſecondes parcelles qui ſe détachent, ne ſe détachent, & n'ont de diſpoſition à ſe détacher que parce que les premiéres ſont tombées; ſi celles-ci euſſent été ſoûtenuës, les autres n'euſſent jamais fait d'effort pour ſortir de leur place. Cependant, ſi on conſtruit des murs contre de pareilles maſſes de Terre, il leur faut bien une autre ſolidité que celle qui leur eût ſuffi, s'ils euſſent été bâtis en des endroits où ils euſſent été iſolés de toutes parts; ſans quoi ils ne ſubſiſtent pas long-temps dans leur à plomb, bien-tôt quelques-unes de leurs portions ſe renflent, préſentent des ventres. Le peu de Terre qui tend à tomber, ſoit verticalement, ſoit ſelon des lignes inclinées, ne ſemble pas capable de produire de ſi grands effets. Une force autrement puiſſante, n'agit auſſi que trop ſouvent contre ces murs, &

toute

toute sa direction tend à les pousser horizontalement. Cette force est celle qui fait prendre aux Terres séches une augmentation de volume à mesure qu'elles s'imbibent d'eau, qui les contraint de se renfler ; c'est une force pareille à celle qui agit sur les cordes moüillées. Nous avons déja dit que nous ne connoissons pas la mesure de cette derniére, mais nous sçavons qu'elle est prodigieuse, qu'elle met une corde en état d'enlever tout poids qui ne sera pas capable de la rompre ; ou pour comparer la force de nôtre Terre qui se renfle avec une autre qui semble plus analogue, ou plûtôt qui est précisément la même, elle est pareille à celle du bois qui se renfle. Or on sçait que des coins de bois, engagés secs entre d'épaisses roches, lorsqu'ils viennent à être imbibés d'eau, font un effort pour se renfler, qui force les roches à se fendre, à éclater, qui les détache, & les souleve : & c'est l'expédient le plus commode pour détacher ces lourdes masses de Pierres dont on fait les Meules de Moulin. Si donc nous considérons ce qui va arriver à une masse de Terre bien séche, & bien compacte d'ailleurs, appliquée contre un mur, lorsque l'eau la pénétrera, nous devons nous représenter les efforts qu'elle va faire pour s'étendre, comme capables de vaincre les plus puissants obstacles.

Il est vrai que ce qu'il n'est pas permis, à la Terre qui s'imbibe, de prendre d'accroissement, de dimensions dans un sens, elle le prend dans un autre. Si la Terre, qui séche, remplissoit un vase, vient à s'humecter, en se gonflant elle s'élévera au dessus des bords du vase, qui est le seul côté où il lui soit permis de s'étendre : de même si les obstacles qui contiennent une masse de Terre, des murs, par exemple, s'opposent à l'extension qu'elle veut prendre dans une direction horizontale, elle sera forcée à s'élever. Mais aussi quels terribles efforts le mur a-t-il à soûtenir dans quelques circonstances ! Qu'un lit de Terre séche, posé à 10 pieds de profondeur, vienne à être pénétré par l'eau, l'effet de la force qui le porte à s'étendre horizontalement, ne sera détruit que quand l'obstacle qui s'oppose à cet effet sera plus fort que la

réſiſtance de la maſſe de la Terre ſupérieure à être ſoulevée. Il faut donc que cette réſiſtance du mur tienne alors contre le poids d'une couche de Terre de 10 pieds d'épaiſſeur ſur une longueur égale à la ſienne, & ſur une largeur plus ou moins grande, ſelon l'étendüe du lit de Terre dans ce ſens.

L'action de la couche de Terre, qui ſe dilate, contre le mur, n'eſt pas ſeulement proportionnée au poids de la maſſe qu'il lui faut ſoulever pour ſe dilater, elle eſt encore augmentée par la réſiſtance qui vient de la tenacité des parties de la Terre les unes avec les autres. La force des coins moüillés, qui enleve des portions d'un rocher, n'eſt pas ſeulement égale au poids de ces portions ; avant de commencer à les ſoulever, elle a eu à vaincre l'engrénement, l'adhéſion de cette partie avec le reſte, il a fallu la détacher dans le premier inſtant qu'elle a été ſoulevée. Les parties de la Terre ne ſont pas liées entr'elles auſſi ſolidement que le ſont celles d'une roche, leur tenacité eſt pourtant conſidérable dans certaines Terres. D'ailleurs la couche qui commence à ſe renfler, ne ſe renfle pas par-tout également, dès-lors elle ſouleve plus la maſſe qu'elle porte, en certains endroits que dans d'autres, & de-là il ſuit qu'il faut vaincre la réſiſtance de la tenacité de la Terre en bien des endroits. Une expérience, que je vais rapporter, prouve combien il faut avoir de conſidération à cette tenacité, & que le poids à ſoulever n'eſt pas à beaucoup près la meſure de l'effort néceſſaire.

J'ai fait une lame de Terre glaiſe, qui, quand elle a été ſéche, a eu environ 9 pouces de longueur, un de largeur & 5 lignes d'épaiſſeur en quelques endroits, & dans d'autres 6. Je l'ai poſée à plat ſur le mur d'appuis d'une fenêtre, de façon qu'un de ſes bouts touchoit un des murs montants de la même fenêtre. J'ai appliqué contre ſon autre bout une maſſe de Fer, dont il eſt inutile de déterminer le poids abſolu ; mais ce que j'ai cherché à déterminer, & qui étoit néceſſaire, c'eſt le poids capable de faire gliſſer cette maſſe horizontalement. L'expérience m'apprit qu'il devoit être de 10 livres.

Contre les côtés de la lame de Terre j'ai posé deux barres de Fer, qui comme deux regles les touchoient tout du long. Ainsi cette lame de Terre étoit arrêtée par les deux côtés & par les deux bouts, le dessus seul étoit libre & à découvert. En cet état je l'ai arrosée d'eau, qui n'a pas été long-temps à la pénétrer. Je voulois éprouver si l'augmentation du volume se feroit toute en hauteur, lorsque dans les autres sens il y avoit des obstacles à vaincre plus considérables que le poids de la Terre. Je n'ai point été attentif à observer l'augmentation qui auroit pû se faire en largeur, une lame si étroite, eût-elle été libre, n'en eût pas pris une bien sensible en ce sens; mais j'ai observé soigneusement s'il s'en feroit en longueur, & j'ai vû qu'il s'y en est fait une. La masse de Fer, qui résistoit de 10 livres, a été portée à environ 2 lignes $\frac{1}{2}$ par de-là l'endroit où je l'avois placée. Cependant cette résistance de 10 livres étoit une force beaucoup plus considérable que celle qu'il eût fallu pour soulever toute la Terre qui avoit agi; cette Terre ne pouvoit pas peser plus de quelques onces. L'engrénement des parties les unes dans les autres, leur disposition à s'étendre dans une certaine direction, a donc mis la force dilatative en état d'agir efficacement contre le poids qui s'opposoit à l'allongement. Il est vrai pourtant que l'allongement n'a pas été aussi considérable qu'il l'eût été, si la bande n'eût pas trouvé d'obstacle à repousser; elle se fût alors allongée de plus de 4 lign. $\frac{1}{2}$, au lieu qu'elle ne s'est allongée que de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Quand des murs sont appuyés contre des Terres compactes, séches, & que l'eau parvient à les pénétrer jusqu'à une certaine profondeur, ces murs ont donc besoin d'une prodigieuse force pour se soûtenir. Aussi l'expérience a-t-elle appris que les temps à craindre pour les murs de Terrasses sont les temps de pluyes abondantes; alors les Terres sont imbibées à une profondeur considérable d'une eau qui met en action des forces immenses. Les pluyes d'orage qui viennent après une longue sécheresse, sont par-là extrémement à craindre.

Si la force de la dilatation de la Terre va jusqu'où nos

Mm ij

raiſonnements & l'expérience précédente ſemblent la porter, on ſera étonné qu'il y ait des murs de revêtements qui puiſſent ſe ſoûtenir pendant une année entiére. Il eſt vrai auſſi qu'il leur faudroit une épaiſſeur prodigieuſe pour ſoûtenir la pouſſée des Terres qui ſe dilatent, ſi bien des cauſes ne concourroient à en affoiblir l'effet. Les Terres qu'ils ont à arrêter ſe dilatent d'autant moins qu'elles ſont plus ſablonneuſes; pendant qu'il eſt ordinaire de trouver des Terres graſſes, qui étant ſéches, ont dans chaque dimenſion $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{12}$ de moins que lorſqu'elles ſont humides; c'eſt-à-dire, des Terres que l'humidité étend de $\frac{1}{13}$, ou même de $\frac{1}{12}$ en tout ſens; il eſt ordinaire auſſi de trouver des Terres ſablonneuſes que l'humidité n'allongera que de $\frac{1}{29}$, ou $\frac{1}{30}$, & quelquefois moins.

Les Terres les plus graſſes & les plus compactes, celles dont l'eau peut augmenter le plus les dimenſions, lorſqu'elle les pénétre, ſont auſſi les plus difficiles à pénétrer; & lorſqu'elles ont été une fois imbibées d'eau, elles la laiſſent échapper difficilement; de ſorte que celles qui ſe trouvent à une certaine profondeur, ne deviennent jamais ſéches à un point où leur force de ſe dilater puiſſe enſuite être miſe en jeu dans toute ſon étendüe.

Il eſt ſur-tout à remarquer que ſi un mur de revêtement étoit conſtruit dans une circonſtance où la maſſe de Terre qu'il a à arrêter, eſt auſſi imbibée d'eau qu'elle le peut être, qu'il n'auroit jamais rien à craindre des effets de cette Terre pour ſe dilater, ſi cette maſſe de Terre reſtoit préciſément la même. Quand cette Terre ſe ſécheroit, elle ſe retireroit un peu du mur; il s'y feroit des fentes, des crevaſſes en une infinité d'endroits, qui feroient les places néceſſaires pour la recevoir, lorſqu'elle viendroit à ſe gonfler de nouveau : mais malheureuſement les vuides des fentes, des crevaſſes, faites par la Terre qui ſe retire, ne ſe conſervent pas dans leur entier. Les mouvements des hommes & des animaux, le vent, la pluye, y portent des corps qui les rempliſſent en partie; de ſorte que quand la Terre vient à être imbibée d'eau, elle

ne trouve plus pour ſe loger ces mêmes places qu'elle avoit abandonnées en ſe ſéchant, ou au moins elle ne les trouve plus en leur entier; & c'eſt proportionnellement à ce qu'elle eſt miſe plus à l'étroit qu'elle fait des efforts contre les murs qui s'oppoſent à ſa dilatation. Il réſulte pourtant de-là que la circonſtance la plus avantageuſe pour conſtruire des murs de Terraſſe, eſt celle où les Terres, le long deſquels ils ſont élevés, ſont le plus abreuvées d'eau qu'il eſt poſſible.

Tout ce que nous venons d'obſerver prouve que l'épaiſſeur qui ſuffiroit à des murs de revêtements oppoſés à certaines Terres, ne ſuffiroit pas à ceux qui ſeroient oppoſés à d'autres Terres. Les Terres les plus à craindre pour eux, ſont celles qui joignent à la qualité de ſe dilater beaucoup, celle de ſe laiſſer aiſément pénétrer par l'eau, & de laiſſer évaporer aiſément l'eau dont elles ont été pénétrées. Elles ſont alors ſujettes à de plus fréquentes alternatives de contraction & de rarefaction, & à des alternatives plus conſidérables. Les différentes épaiſſeurs qui conviennent à différents murs de revêtements, ſelon la qualité des Terres qui agiſſent contre eux, ne ſeroient peut-être pas aiſées à déterminer. Des expériences ſur les extenſions dont ſont ſuſceptibles différentes Terres, aideroient pourtant à établir quelques regles, à donner des limites entre leſquelles on pourroit ſe tenir. Nous rapporterons dans la ſuite un grand nombre d'expériences ſur les dilatations des différentes Terres, qui pourront aider à établir ces regles qui nous paroiſſent à deſirer.

Une remarque, qui d'avance me paroît eſſentielle, c'eſt que plus il y aura de gravois, de pierrailles amoncellées entre le mur & la maſſe de Terre, & moins la pouſſée de la Terre ſera à craindre; on lui ménagera par-là des vuides qu'elle pourra occuper lorſqu'elle ſe gonflera: des gravois amoncellés dans la maſſe même de la Terre n'y pourroient produire qu'un utile effet. Du reſte je ne me ſuis pas propoſé de rechercher ici tout ce qui conviendroit pour aſſûrer la durée des murs de revêtements, j'ai ſeulement voulu faire remarquer qu'il importoit, quand on les conſtruit, de faire attention à la

propriété qu'ont les Terres de ſe gonfler, lorſqu'elles s'imbibent d'eau, & que c'eſt une attention, toute importante qu'elle eſt, que je ne ſçache point qu'on ait eûë juſqu'ici.

Nous ne nous ſommes attachés encore qu'à conſidérer les deux propriétés de la Terre qui la diſtinguent des Sables & de tous les Minéraux qui nous ſont connus, auſſi ne l'avons-nous encore regardée que ſelon des vûës très-générales. Nous en ferons dans la ſuite un examen plus particulier; les variétés qu'elle nous offre, méritent chacune de l'attention; elles nous montrent de la Terre ſous bien des apparences différentes. La plûpart de ces variétés ont été remarquées par ceux qui aiment l'Hiſtoire naturelle, mais on a négligé d'en faire uſage pour bien caractériſer les différentes ſortes de Terres; dans les ouvrages où il eſt fait mention de quelque eſpece de Terre, il nous eſt ordinairement difficile de démêler à laquelle de celles que nous connoiſſons, elle doit être rapportée. Nous avons donc crû qu'il ſeroit utile à l'Hiſtoire naturelle, à la Phyſique & aux Arts, de diſtribüer les différentes Terres en claſſes, ou en genres premiers, en genres ſeconds & en eſpeces. Les premiéres diviſions doivent être tirées en partie des deux premiéres propriétés qui nous ont tant arrêté. Mais les caractéres des genres ſubalternes & des eſpeces ſeront fournis par des différences propres à chacun de ces genres, ou à chacune de ces eſpeces.

Des ſources de différences ſe preſenteront en nombre ſelon les rapports ſous leſquels nous conſidérerons les Terres. Quoique communément elles ſoient faites par grains, elles ne ſont pas compoſées de grains également fins. Il y en a qui au lieu d'être un amas de grains, dont on n'apperçoit pas l'arrangement, ſont compoſées de feüilles auſſi diſtinctes que celles des Ardoiſes. Les Peintres ſçavent combien eſt grande la variété des couleurs des Terres, & c'eſt une connoiſſance qu'ils mettent à profit. L'action du feu ſur les Terres nous fait voir combien elles différent les unes de autres. Il y en a qui ſe vitrifient plus aiſément qu'aucune matiére à nous connüe; d'autres ne ſont preſque pas vitrifiables, elles ſe

ſoûtiennent contre la plus violente action du feu de nos fourneaux : il y en a que le feu calcine, au lieu de les vitrifier. Quand quelques-unes ont ſouffert le feu, qu'elles ſont devenuës ce que nous appellons de la *Terre cuite,* elles ſont rouges; d'autres alors ſont blanches, d'autres ſont griſes. Il nous ſuffit d'indiquer actuellement ces ſources de variétés, mais il y en a deux autres auſquelles nous nous arrêterons un peu plus, parce qu'on ne les a pas, ce me ſemble, aſſés bien remarquées.

Je veux d'abord parler de l'effet des Acides ſur les Terres. En général elles ſont regardées comme des matiéres très-alkalines, & des plus alkalines. Auſſi des acides foibles, tels que le Vinaigre, verſés ſur quantité de Terres, y excitent une fermentation ſubite, accompagnée d'une ébullition conſidérable. J'ai obſervé que ces mêmes acides, & même les plus violents, tels que l'Eſprit de Nitre, l'Eſprit de Sel, &c. verſés ſur d'autres Terres, n'y cauſent pas plus d'ébullition que l'eau ſimple y en cauſeroit ; au lieu qu'alors les premiéres Terres ſe couvrent ſur le champ d'une écume épaiſſe, qui s'éleve haut, à peine peut-on obſerver quelques petites bulles d'air qui s'échappent des derniéres. Les Eſprits acides ne viennent gueres à bout de ramollir plus vîte les Terres avec leſquelles ils ne boüillonnent pas, que feroit l'eau commune.

La maniére dont les Acides agiſſent ſur la plûpart des Terres ſur leſquelles ils peuvent le plus, eſt différente de celle dont ils agiſſent ſur les Métaux. Ils produiſent dans les Terres de plus promptes ébullitions, mais leur action ſe termine preſque là ; je veux dire, qu'au lieu que les liqueurs acides ſe ſaiſiſſent des Métaux avec qui elles ont fermenté, qu'au lieu qu'elles les tiennent ſuſpendus, qu'elles ſe les approprient, que les Acides n'enlevent la Terre que pour la laiſſer précipiter peu-après.

Il nous reſte encore à examiner une propriété des Terres qu'on ne trouve ni aux Criſtaux, ni aux Talcs, ni aux Gyps, ni aux Sables parfaits, c'eſt-à-dire, comme nous l'expliquerons ailleurs au long, aux Sables qui ſont purement Sables,

qui ne ſont pas des composés, où la Terre entre pour quelque choſe. Cette propriété eſt d'avoir de l'odeur. Toutes les Terres ſont capables de faire une impreſſion ſenſible ſur nôtre odorat, & il y en a de très-communes qui en peuvent faire une extrémement forte. Cependant c'eſt une propriété de la Terre à laquelle on ne paroît avoir fait aſſés d'attention, & à laquelle même on n'a preſque pas pris garde ; auſſi ne ſe fait-elle appercevoir que dans quelques circonſtances, qui ſont rarement celles où ceux même qui ſont capables d'obſerver éxaminent la Terre. Quand on en prend un morceau entre les mains pour l'éxaminer, il eſt ordinairement ſec ; alors les Terres les plus capables de donner de l'odeur, ne ſentent rien, ou preſque rien. Mais qu'on moüille légerement ce morceau de Terre, qu'on ne le moüille qu'autant qu'il faut pour le pétrir en pâte ferme, & que quelques inſtants après on l'approche du nés, il y a telle Terre alors qui fera ſentir une odeur forte & pénétrante. Si au lieu d'humecter ſimplement la même Terre, on la noye d'eau, ſi on en fait une pâte trop liquide, elle ne donnera qu'une odeur beaucoup plus foible : l'odeur qui s'en exhalera, n'aura de la force que quand la pâte, devenüe épaiſſe, commencera à ſécher. Une autre circonſtance encore a empêché de faire attention aux odeurs des différentes Terres, c'eſt que leur atmoſphere ne s'étend pas loin. Un morceau de Terre qui eſt capable d'affecter, même trop fortement, nôtre odorat, n'étant éloigné du nés que de deux ou trois pouces, n'y fera aucune impreſſion ſenſible, ſi on l'en éloigne d'un pied, ou davantage.

Si la propriété de répandre de l'odeur eſt commune à la Terre avec un grand nombre d'autres corps, la circonſtance où elle en donne le plus, lui eſt particuliére, ou preſque particuliére. Quantité de corps n'ont de l'odeur pour nous que quand ils ſont échauffés, & quelques-uns en ont d'autant plus qu'ils ſont plus échauffés ; il faut que le feu aille juſqu'à en détruire d'autres pour en faire ſortir des odeurs. Les Cheveux, la Corne, le Cuir, répandent quand ils ſe brûlent des odeurs très-fortes ; la Corne & les Cheveux ne ſentent rien en toutes
autres

autres circonſtances; les Pyrites, le Cobolt, & bien d'autres matiéres minérales, réduites ſimplement en poudre, ne ſentent rien, ou ſentent peu. La poudre des premiers, jettée ſur des charbons allumés, répand une forte odeur de Soufre, & celle de la ſeconde matiére répand une deſagréable & dangereuſe odeur d'Ail. Les Terres qu'on fait cuire donnent auſſi de l'odeur, mais une odeur très-différente de celle qu'elles ont étant humectées, & bien moins forte. Il y a des fleurs dont l'odeur eſt plus ſenſible pendant la fraîcheur du ſoir & du matin que pendant la chaleur du midi; mais ſi on excepte les farines, il y a peu de matiéres qui répandent plus d'odeur, quand elles ont été réduites en pâte au moyen de l'eau, que quand elles ſont en une poudre preſque ſéche.

Nous ne ſçavons exprimer l'eſpece de ſentiment que produit en nous une Roſe, un Oeillet, une Jonquille, que par les termes d'odeur de Roſe, d'Oeillet, de Jonquille : il ne nous eſt pas poſſible de faire connoître autrement ce qui ſe paſſe chés nous à l'occaſion de l'approche d'une Roſe, d'un Oeillet ; nous ne ſçaurions décrire nos ſentiments, nous ne pouvons qu'indiquer en quels cas ils naiſſent, & nous penſons qu'il en naît de ſemblables dans les autres en pareilles circonſtances, quoiqu'il nous ſoit impoſſible de reconnoître ſi le ſentiment dont ils ſont affectés eſt préciſément ſemblable au nôtre. En un mot on ne ſçauroit donner idée de l'odeur d'une Roſe, à qui n'auroit jamais ſenti de Roſes. Les odeurs de nos différentes Terres ont entr'elles des différences comme en ont celles de différentes fleurs, mais de même il eſt difficile, & ſouvent impoſſible, de les caractériſer. On ne peut gueres les faire connoître que par le nom de l'odeur de la Terre même qui les donne, c'eſt-à-dire, en renvoyant à ſentir cette Terre, comme nous renvoyerions à ſentir une Roſe celui à qui nous voudrions faire connoître ſon odeur. Les odeurs des Terres, en général, ſont des odeurs particuliéres ; il y en a pourtant quelques-unes qui reſſemblent aſſés à d'autres qui nous ſont connües. Il y a, par exemple, des Terres dont l'odeur approche de celle du Poivre.

Lorſqu'il ſurvient en Eté une petite pluye, qui humecte légerement des Terres qui avoient été deſſéchées pendant une ſuite de jours chauds, nous ſentons dans toutes les campagnes une odeur qui nous plaît. On l'attribüe ordinairement aux Plantes des Bois ou des Jardins où l'on ſe promene. Mais ſi on fait attention que les champs les plus arides, que ceux qui ne ſont couverts que d'un chaume ſec, ou de Plantes auſſi séches, en répandent alors une ſemblable, on penſera que la Terre même eſt la ſource de cette odeur, qui ne fait ſur nous qu'une légere & douce impreſſion, parce que nôtre tête eſt à une diſtance où l'atmoſphere de cette odeur ne s'étend qu'à peine, & ou au moins elle eſt très-affoiblie ; ſi on ſe couche ſur la Terre, on ſera bien frappé d'une odeur autrement forte.

Quand un morceau de Terre a été légerement humecté, & quand l'eau dont il a été pénétré s'évapore, elle emporte donc avec ſoi, de l'intérieur de la Terre, de petits corps capables d'affecter nôtre odorat. J'ai voulu voir s'il ſeroit poſſible d'épuiſer cette odeur de la Terre. J'ai arroſé & fait ſécher ſucceſſivement de petits gâteaux de Terre pendant plus de quinze jours, & cela à diverſes repriſes chaque jour : à la derniére de ces expériences je n'ai point remarqué qu'aucun des gâteaux donnât moins d'odeur qu'à la premiére. S'il y a des corps dont l'odeur ſe diſſipe aiſément, il y en a d'autres qui la conſervent, & qui en fourniſſent bien au de-là de ce qu'on pourroit imaginer. Des corps parfumés de Muſc en conſervent l'odeur pendant des ſiécles.

Au reſte, de ce que les différentes Terres ne donnent de l'odeur qu'après qu'elles ont été humectées par l'eau, il ſemble qu'on en doive conclurre que la matiére qui fait les odeurs des Terres eſt trop peſante pour être élevée par la ſimple chaleur de l'air, qu'il eſt néceſſaire que l'eau la diſſolve, qu'elle s'en charge, qu'elle l'emporte enſuite avec ſoi. Peut-être même que l'eau ne peut pas l'emporter bien-loin, & de-là vient que l'atmoſphere de l'odeur des Terres n'eſt pas fort étendu. Il réſulte encore de-là que quand l'eau pénétre les

grains de Terre, qu'elle y occaſionne quelque altération. Les bulles d'air qui ſortent alors, diſpoſent à penſer qu'il s'y fait une fermentation. On pourroit cependant croire que ces bulles ne s'échappent que comme l'air s'échappe d'une bouteille qu'on remplit d'eau. Mais ici il y a quelque choſe de plus: dès que l'eau qui ſort de la Terre eſt en état d'affecter nôtre odorat autrement qu'elle l'affectoit avant d'y être entrée, il ſemble qu'elle y a occaſionné quelque fermentation; & ſi cette fermentation étoit bien prouvée, on auroit une cauſe très-probable de l'augmentation de volume qui ſurvient à chaque grain de Terre pendant que l'eau le pénétre. C'eſt ce que nous examinerons ailleurs.



SUITE DES OBSERVATIONS DE LA COMETE

Qui a commencé à paroître à la fin de Juillet de l'année 1729.

Par M. CASSINI.

19 Avril 1730.

NOUS avons déja rendu compte à l'Académie des Obſervations d'une Comete qui avoit commencé à paroître le 31 Juillet de l'année 1729 entre la Conſtellation du petit Cheval & celle du Dauphin, & que nous avions continué d'obſerver juſqu'au 10 Novembre de la même année.

Son mouvement propre, qui étoit contre la ſuite des Signes de l'Orient vers l'Occident, ſemblable à celui des Planetes ſupérieures, lorſqu'elles ſont en oppoſition avec le Soleil, nous fit juger d'abord que cette Comete, qui ſe trouvoit auſſi dans la même ſituation à l'égard de la Terre & du Soleil, avoit réellement, de même que toutes les autres Planetes, un mouvement de l'Occident vers l'Orient ſuivant la ſuite des Signes, & que ſon mouvement, rétrograde en apparence, n'étoit que l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil, qui étant plus prompt que celui de la Comete, la laiſſoit en arriére, quoiqu'elles s'avançaſſent toutes les deux du même ſens. Que par conſéquent le mouvement rétrograde de cette Comete paroîtroit ſe rallentir juſqu'à ce qu'il ceſſa entiérement, de même qu'on l'obſerve dans les Planetes ſupérieures après qu'elles ont paſſé leurs oppoſitions ; qu'on la verroit enſuite ſe mouvoir dans une direction contraire, & aller, ſuivant la ſuite des Signes, avec une vîteſſe proportionnée à la diſtance & à la ſituation où elle ſe trouveroit à l'égard de la Terre & du Soleil.

Toutes ces apparences arriverent ſucceſſivement comme

nous les avions prévûës ; car cette Comete, après avoir passé près de la queüe du Dauphin, s'avança vers l'Aigle avec un mouvement rétrograde qui se rallentit insensiblement jusqu'au 19 Octobre, après lequel on la vit aller suivant la suite des Signes, ayant parcouru 13 minutes de l'Occident vers l'Orient dans l'espace de 8 jours, depuis le 19 Octobre jusqu'au 27 du même mois.

On ne pouvoit appercevoir alors cette Comete que par le secours des Lunettes, où on la voyoit en forme d'une Etoile nébuleuse dont la lumiére étoit très-foible, mais dont le diametre ne laissoit pas d'occuper au moins une minute & demie de degré de la circonférence du Ciel, c'est-à-dire, qu'elle étoit encore plus grande en apparence qu'aucune des Planetes que nous appercevons dans le Ciel, à la réserve de la Lune.

Il est vrai que l'on peut attribuer la grandeur apparente de cette Comete à la chevelure qui l'environnoit, & qui se confondant avec son disque, en augmentoit considérablement l'étendüe.

Le mauvais temps qu'il fit ensuite, joint au clair de la Lune, nous fit cesser de voir cette Comete pendant près de quinze jours. Cependant comme par la comparaison des Observations précédentes, nous sçavions à peu-près l'endroit du Ciel où elle devoit se trouver chaque jour, & que sa grandeur, qui étoit encore fort sensible dans le temps que nous l'avions perdü de vûë, nous faisoit esperer qu'elle seroit encore visible pendant quelque temps, nous essayâmes de la chercher le 10 Novembre, jour auquel le Ciel fut serein, ce qui nous réüssit, & nous la trouvâmes plus avancée que le 27 Octobre d'un degré & quelques minutes, suivant la suite des Signes, avec un mouvement direct qui avoit accéléré depuis les derniéres Observations que l'on en avoit faites.

Dans le compte que nous en rendîmes à l'Académie dans la derniére Assemblée publique, nous promîmes de donner la continuation des Observations que nous espérions d'en faire dans la suite. En effet, quoiqu'elle eût déja paru l'espace

de trois mois dix jours, qui eſt un intervalle plus grand que celui d'aucune Comete qui ait été obſervée depuis plus d'un ſiécle, nous avons continué de l'appercevoir encore plus de deux mois & demi juſqu'au 21 Janvier de cette année 1730, après quoi le mauvais temps & le clair de la Lune qui ſurvinrent, ne nous permirent plus de l'obſerver.

Elle étoit alors au deſſus des Etoiles ſeptemtrionales de la tête du Dauphin, & répondoit au 18me degré du Signe du Verſeau, le Soleil étant au premier degré du même Signe; ainſi elle ne ſe trouvoit éloignée en longitude que de 17 degrés du Soleil dont elle s'approchoit continuellement, ce qui ôtoit toute eſpérance de pouvoir encore l'appercevoir, parce qu'elle ſe devoit trouver alors près des rayons du Soleil où les Etoiles les plus éclatantes diſparoiſſent.

La route qu'elle avoit faite depuis que ſon mouvement apparent étoit direct, étoit à peu-près égale à celle qu'elle avoit parcouru étant rétrograde, de ſorte qu'elle ſe trouvoit répondre au même degré de l'Ecliptique où on avoit commencé à l'appercevoir, mais avec une latitude qui dans l'intervalle de 5 mois & 22 jours avoit augmenté de 14 degrés vers le Nord.

Après les premiéres Obſervations que nous fîmes de cette Comete, nous nous contentâmes de faire voir le rapport de ſon mouvement avec ceux des Planetes ſupérieures dans le temps de leurs oppoſitions avec le Soleil. Nous eſſayâmes même de démontrer que cette Comete étoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter, en ſuppoſant que ſon mouvement étoit réellement de l'Occident vers l'Orient ſuivant la ſuite des Signes.

La ſuppoſition du mouvement de cette Comete de l'Occident vers l'Orient, ſur laquelle nôtre démonſtration étoit fondée, pouvoit n'être pas reçûë généralement de tous les Philoſophes, puiſqu'il s'eſt trouvé de nôtre temps, de très-habiles & grands Géometres, qui ont crû que les Cometes faiſoient leur mouvement autour du Soleil indifféremment de tous les ſens. En effet on ne peut douter qu'on n'en

ait obſervé pluſieurs, dont le mouvement apparent ait paru contre la ſuite des Signes, telles que celles de 1698, 1702 & 1706.

La Comete du mois d'Avril de l'année 1702 eſt remarquable entre les autres, en ce que ſon mouvement journalier étoit au commencement de ſon apparition de 15 degrés contre la ſuite des Signes, le lieu de la Terre étant éloigné de celui de la Comete d'environ trois Signes, qui eſt la ſituation où les Planetes paroiſſent ſtationaires.

On peut repréſenter cependant avec aſſés de préciſion ſon cours, & lui attribuer un mouvement réel ſuivant la ſuite des Signes, en ſuppoſant qu'elle étoit placée au commencement de ſon apparition beaucoup plus près de la Terre que du Soleil, ce qui d'ailleurs s'accorde aſſés bien à la rapidité de ſon mouvement apparent, qui étoit quinze fois plus grand que celui de la Terre. Car cette Comete étant au moins auſſi éloignée du Soleil que la Terre l'eſt de cet Aſtre, comme il eſt aiſé de le démontrer, il y a lieu de ſuppoſer que ſon mouvement réel à l'égard du Soleil n'étoit pas à beaucoup près ſi grand que celui que l'on y a obſervé, & que ſa rapidité apparente n'étoit cauſée que par ſa proximité de la Terre, ce qui ſe trouve d'ailleurs confirmé par la Parallaxe que M.rs Bianchini & Maraldi y ont obſervée de 13 minutes.

On trouvera de même qu'on peut repréſenter également bien les mouvements rétrogrades des autres Cometes dont nous venons de parler, en leur donnant un mouvement réel ſuivant la ſuite des Signes. Mais on n'a pas jugé devoir entrer dans ce détail, qui demande trop de diſcuſſion, & qui excéderoit les bornes que nous nous ſommes preſcrites pour ce Mémoire.

Ce que l'on vient d'expoſer ſuffit pour faire voir que les mouvements de diverſes Cometes qui ont paru rétrogrades, ne peuvent point ſervir pour combattre le ſyſtême de Deſcarte & celui des Tourbillons, ſuivant leſquels les Corps céleſtes doivent ſe mouvoir tous dans le même ſens ſuivant la ſuite des Signes.

Pour nous renfermer dans ce qui regarde cette derniére Comete, nous ferons voir d'abord que le mouvement direct que nous lui avons attribué comme étant le plus vrai-semblable, s'eſt trouvé par la ſuite de nos Obſervations, ſuſceptible d'une démonſtration exacte que nous tâcherons d'expliquer, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y employer de Figures.

On ſuppoſe pour cela que les Etoiles fixes, avec leſquelles on compare les Cometes pour déterminer leur ſituation dans le Ciel & à l'égard de l'Ecliptique, ſont à une diſtance ſi grande, que le chemin que la Terre parcourt ſur ſon orbe dans l'eſpace de pluſieurs jours n'y a aucun rapport ſenſible.

Cette ſuppoſition doit être admiſe, puiſque dans les recherches les plus exactes qui ont été faites pour déterminer la diſtance des Etoiles fixes à la Terre par le moyen de ſon mouvement ſur ſon orbe annuel, l'angle que font entr'elles deux lignes tirées d'une Etoile fixe à la Terre placée aux deux extrémités de cet orbe à la diſtance de plus de 60 millions de lieües, a été trouvé à peine d'une minute de degré.

Suivant ce principe, on peut conſidérer toutes les lignes tirées de la Terre en différents endroits de ſon orbe à une même Etoile fixe, comme des paralleles éloignées l'une de l'autre d'un intervalle meſuré par la quantité du mouvement de la Terre de l'Occident vers l'Orient.

S'il ſe trouve donc qu'une Comete, après avoir paſſé près d'une Etoile fixe, retourne à cette Etoile après quelque eſpace de temps, ou, ce qui revient au même, ſi elle retourne au même point de l'Ecliptique, où elle étoit quelques jours auparavant, il en réſulte néceſſairement qu'elle s'eſt avancée, de même que la Terre, de l'Occident vers l'Orient, d'une quantité compriſe entre les deux paralleles tirées de la Terre au même point de l'Ecliptique, qui ſera plus ou moins grande, ſuivant la différente direction & inclinaiſon de l'orbe de la Comete.

C'eſt ce qui eſt arrivé dans le cours de nos Obſervations, pendant lequel nous l'avons vûë répondre ſucceſſivement aux mêmes lieux de l'Ecliptique, où elle s'eſt trouvée dans les

précédentes

précédentes Obſervations. Ainſi il eſt démontré que cette Comete, rétrograde en apparence, avoit un mouvement réel de l'Occident vers l'Orient, & que par conſéquent, ſuivant ce que j'avois expoſé dans le Mémoire précédent, elle ſe trouvoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter.

Pour déterminer préſentement avec plus d'exactitude ſa diſtance au Soleil & à la Terre, de même que la quantité, la direction de ſon mouvement propre & les autres éléments de ſa Théorie, nous pourrions employer la Méthode générale que nous avons propoſée dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1727. Mais comme les circonſtances de cette Obſervation nous fourniſſent une Méthode nouvelle, beaucoup plus ſimple & plus aiſée pour déterminer ces éléments, nous l'employerons ici, après en avoir donné une idée la plus ſenſible qu'il nous ſera poſſible.

On choiſira pour cette recherche trois Obſervations exactes, dont deux ont été faites, lorſque la Comete s'eſt trouvée répondre à un même point de l'Ecliptique, & la troiſiéme à un autre lieu quelconque. Si ces trois Obſervations avoient été dirigées à un même lieu de l'Ecliptique, il eſt clair, par les raiſons que nous avons rapportées ci-deſſus, que le mouvement de cette Comete auroit été meſuré par l'intervalle compris entre les lignes tirées de la Terre, à ce même point, que l'on peut regarder comme paralleles entre elles; ainſi connoiſſant la direction & l'inclinaiſon de la route de la Comete, de même que l'intervalle entre ces paralleles, qui eſt meſuré par le mouvement de la Terre ſur ſon orbe, on trouveroit la quantité du mouvement de la Comete, mais non pas ſa diſtance à la Terre, que l'on pourroit ſuppoſer telle que l'on voudroit.

Mais ſi la ligne tirée de la Terre dans une troiſiéme Obſervation ne ſe rapporte pas au même lieu de l'Ecliptique, où étoient les deux autres, mais qu'elle leur ſoit inclinée, il eſt évident que la Comete a dû paſſer en de-çà ou au de-là du point du concours de ces lignes, & que par conſéquent

ſon inclinaiſon plus ou moins grande doit déterminer ſa véritable diſtance à la Terre.

Soit dans la Figure ci-jointe *T* & *B*, le vrai lieu de la Terre ſur ſon orbe annuel dans deux différentes Obſervations. *TC*, *BR*, deux lignes tirées de la Terre au vrai lieu de la Comete que l'on ſuppoſe répondre au même point de l'Ecliptique, & que l'on peut regarder comme paralleles entre elles. *PC* la ligne tirée de la Terre à la Comete dans une Obſervation précédente. Du point *T* ſoit menée la ligne *TD* perpendiculaire à *BR* que l'on prolongera en *G*, enſorte que *TG* ſoit à *TD*, comme l'intervalle entre le temps de l'Obſervation de la Comete, lorſque la Terre étoit aux points *T*, & *B* eſt à l'intervalle entre le temps de l'Obſervation, lorſque la Terre s'eſt trouvée aux points *T* & *P*. Du point *G* ſoit menée la ligne *GL* parallele à *BR* & *TF* qui rencontre *PC* au point *L*. Je dis que ſuppoſant que la Comete ait parcouru des eſpaces égaux en temps égaux ſur une ligne ſenſiblement droite, le point *L* marque le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique, lorſque la Terre étoit au point *P*. Car ſi l'on tire du point *L* une ligne quelconque *LFR* compriſe entre les lignes tirées de la Terre au lieu de la Comete dans les trois Obſervations, à cauſe des paralleles *GL*, *BR*, *TF*, on aura *LF* à *RF*, comme *TG* à *TD*, c'eſt-à-dire, par la conſtruction comme l'intervalle entre la premiére & la ſeconde Obſervation eſt à l'intervalle entre la ſeconde & la troiſiéme, & par conſéquent le point *L* marquera le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique dans toutes les directions qu'on ait pû lui attribuer.

Si l'on choiſit preſentement une autre Obſervation où la Terre étant, par exemple, au point *A*, la ligne *AI* détermine ſon vrai lieu ſur l'Ecliptique. On prolongera *TD* en *H*, enſorte que *DH* ſoit à *DT* comme l'intervalle de temps entre la troiſiéme & la quatriéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme ; & du point *H*, on tirera la ligne *HI* parallele à *BR*, qui rencontrera *AI* au point *I*.

Ce point repréſentera le lieu de la Comete dans la quatriéme Obſervation, & la ligne *LI* tirée du point *L* au point *I*, meſurera la quantité du mouvement de la Comete réduit à l'Ecliptique depuis la premiére juſqu'à la quatriéme Obſervation. Car *IR* eſt à *RF* comme *DH* eſt à *DT*, c'eſt-à-dire, par la conſtruction comme l'intervalle entre la troiſiéme & la quatriéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme. Mais nous venons de démontrer que *LF* eſt à *FR* comme l'intervalle entre la premiere & la ſeconde Obſervation eſt à celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme. Donc la ligne *LI* eſt telle que ſes portions *LF*, *FR*, *RI*, compriſes entre les lignes *PC*, *TC*, *BR* & *AI*, tirées de la Terre au lieu de la Comete dans ces différentes Obſervations, ſont entr'elles comme les intervalles de temps entre ces Obſervations, c'eſt-à-dire, comme les eſpaces parcourus, & par conſéquent la ligne *LFRI* repréſente le cours véritable de la Comete réduit à l'Ecliptique. Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer en nombres tous ces éléments, on trouvera par la théorie du Soleil, les diſtances *SP*, *ST*, *SB*, *SA*, de la Terre au Soleil dans le temps de ces quatre Obſervations, & les angles *PST*, *TSB*, *BSA*, compris entre ces lignes ; & dans les triangles *PST*, *TSB* & *BSA*, dont les côtés ſont connus & les angles compris entre ces côtés, on aura la valeur des cordes *PT*, *TB*, *BA*, & des angles *SPT*, *STP*, *STB*, *SBT*, *SBA* & *SAB*. Retranchant l'angle *STP* de l'angle *STC* qui meſure la diſtance de la Comete au Soleil au temps de la ſeconde Obſervation, on aura l'angle *CTP* & dans le triangle *CTP*, dont le côté *TP* eſt connu, de même que l'angle *CTP* & l'angle *PCT*, différence entre le vrai lieu de la Comete dans les deux premiéres Obſervations, on aura la valeur du côté *CP*.

Retranchant pareillement l'angle *SBT* de l'angle *SBR*, diſtance de la Comete au Soleil au temps de la troiſiéme Obſervation, on aura l'angle *TBD*, & dans le triangle *BDT* rectangle en *D*, l'angle *DBT* & l'hypothénuſe *BT* étant

connus, on trouvera la valeur de *DT*. On fera enſuite comme l'intervalle de temps entre la ſeconde & la troiſiéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la premiére & la ſeconde, ainſi *DT* eſt à *TG* ou *LK* & dans le triangle *CKL* rectangle en *K*, dont le côté *LK* eſt connu, & l'angle *PCT* ou *LCK*, on trouvera le côté *CL*, qui étant retranché de la ligne *CP*, déterminée ci-deſſus, donne la valeur de *LP*, diſtance de la Terre à la Comete dans la premiére Obſervation réduite à l'Écliptique. On trouvera de la même maniére la diſtance *AI* de la Terre à la Comete dans la quatriéme Obſervation. Car ſi l'on retranche de l'angle *SAB* connu, l'angle *SAI* qui meſure la diſtance de la Comete au Soleil dans cette Obſervation, on aura l'angle *EAB*, & dans le triangle *EAB* dont le côtés *AB* eſt connu, de même que l'angle *EAB* & l'angle *AEB*, différence entre le vrai lieu de la Comete dans les deux derniéres Obſervations, on trouvera le côté *AE*.

On fera enſuite comme l'intervalle de temps entre la ſeconde & la troiſiéme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la troiſiéme & la quatriéme. Ainſi *DT* eſt à *DH* ou *IZ*; & dans le triangle *EZI* rectangle en *Z*, dont le côté *IZ* eſt connu & l'angle *IEZ* ou *AEB*, on trouvera la valeur de l'hypothénuſe *EI*, qui étant ajoûtée à *AE*, donne la diſtance *AI* de la Comete à la Terre dans la quatriéme Obſervation réduite à l'Écliptique.

Ayant employé la Méthode que nous venons d'expoſer dans les Obſervations qui ont été faites le 2 & le 26 Septembre, & le 18 Novembre 1729, on trouve que ſuppoſant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil de 22 mille demi-diametres de la Terre, ou 33 millions de lieües, telle qu'on l'a déterminée par les Obſervations de ſa Parallaxe, la diſtance véritable de la Comete à la Terre étoit le 2 Septembre 1729 de 113 millions & 372 mille lieües.

Par d'autres Obſervations des 20 Septembre & 18 Novembre, on trouve la diſtance véritable de la Comete à la Terre le même jour 2 Septembre 1729 de 113 millions 413 mille lieües, qui comparée à la premiére détermination,

eſt environ comme 900 à 901; ainſi ces deux diſtances trouvées par des Obſervations différentes, ne ſont éloignées l'une de l'autre que d'un milliéme, ce qui eſt une préciſion beaucoup plus grande que celle que l'on oſeroit eſpérer dans de pareilles recherches.

Comme nôtre Méthode & les calculs qui en réſultent ſont fondés ſur la ſuppoſition que la Comete a décrit pendant l'intervalle entre les Obſervations que l'on a comparées enſemble, des eſpaces égaux en temps égaux ſur une ligne ſenſiblement droite, la conformité qui ſe trouve entre ces diſtances eſt une preuve que les inégalités apparentes, cauſées par la courbure de ſon orbe, ont été compenſées par celles de l'augmentation ou de la diminution de ſon mouvement.

A l'égard de la diſtance de la Comete à la Terre dans les derniéres Obſervations que nous en avons faites, nous la trouvons par celles du 18 Janvier de cette année 1730 de 171 millions 206 mille lieües; ainſi elle s'eſt éloignée de la Terre, dans l'eſpace de quatre mois & demi, d'environ 58 millions de lieües, la moitié de la diſtance où elle étoit le 2 Septembre; d'où il ſuit, par les regles de l'Optique, que ſon diametre ne devoit être diminué que d'un tiers, & ſa lumiére d'un peu plus de la moitié de celle qu'elle avoit au commencement que nous l'avons apperçûë, de ſorte qu'il n'eſt point ſurprenant que l'on ait continué à l'obſerver pendant ſi longtemps, quoiqu'elle ait paru fort petite dès le commencement qu'on l'a apperçûë.

Après avoir déterminé la diſtance de la Comete à la Terre dans les différentes Obſervations que nous en avons faites, nous avons crû devoir chercher ſa diſtance au Soleil, que l'on peut regarder comme le principe de ſon mouvement. Car quoique l'on puiſſe ſuppoſer que les Cometes ſont des Planetes qui ont pour foyer des Soleils différents du nôtre, & que quelques Auteurs ayent crû que ce pouvoient être des Satellites de quelque Planete principale de nôtre Tourbillon, mais ſi éloignée de nous, qu'elle eſt toûjours inviſible à nos yeux, & que les Satellites ne deviennent viſibles que lorſqu'ils

ſont par rapport à nous dans la partie la plus baſſe de leur cercle. Cependant en attendant que ces ſuppoſitions ſoient confirmées par des Obſervations qui ayent quelque évidence, nous avons eſtimé qu'il étoit convenable de déterminer le mouvement des Cometes par rapport au Soleil, que preſque tous les Philoſophes conſiderent comme le centre du mouvement des autres Planetes.

Nous avons donc calculé la diſtance de cette Comete au Soleil ſuivant nôtre théorie, & nous avons trouvé qu'elle étoit le 2 Septembre de 139 millions 667 mille lieües, le 22 Novembre de 144 millions 126 mille lieües, & le 18 Janvier 1730 de 148 millions 89 mille lieües.

La moyenne diſtance du Soleil à la Terre eſt à celle de cet Aſtre à Jupiter comme 100 à 521; d'où il ſuit que la diſtance de cette Comete au Soleil étoit le 2 Septembre 1729 à celle de Jupiter au même Aſtre, environ comme 4 à 5, de ſorte que cette Comete étoit alors, comme nous l'avions ſuppoſé dans le Mémoire précédent, entre les orbes de Mars & de Jupiter, où elle eſt reſtée pendant tout le temps que nous l'avons apperçûë.

A l'égard de la quantité de ſon mouvement, nous trouvons que depuis le 2 Septembre juſqu'au 22 Novembre 1729 dans l'intervalle de 81 jours, elle a décrit par rapport au Soleil 13 degrés & 3 minutes ſur ſon orbe, ce qui eſt à raiſon de 9′ 40″ par jour, & que depuis le 22 Novembre 1729 juſqu'au 18 Janvier 1730, dans l'intervalle de 57 jours, elle a parcouru 8^d 11′ 20″, ce qui eſt à raiſon de 8′ 37″ par jour; nous trouvons auſſi que ſon mouvement réel ſur ſon orbe dans le premier intervalle de temps eſt à ſon mouvement dans le ſecond comme 1215 à 1140, de ſorte que la diminution de ſa vîteſſe réelle ſur ſon orbe eſt comme 15 à 14, moindre à peu près de la moitié de celle de ſa vîteſſe apparente qui eſt comme 18 à 16; ce qui eſt conforme à ce que l'on obſerve dans les Planetes, lorſqu'elles s'éloignent du Soleil, où l'on remarque deux ſortes de diminutions; l'une apparente, qui n'eſt que l'effet de leur plus

grande diſtance au Soleil, & l'autre réelle ſur leur orbe, à cauſe qu'elles s'éloignent de plus en plus du principe de leur mouvement.

Il faut préſentement examiner ſi les degrés de vîteſſe que l'on a remarqué dans cette Comete s'accordent à la regle de Kepler, qui s'obſerve non-ſeulement dans les Planetes autour du Soleil, mais même dans les Satellites autour des Planetes principales. Suivant cette regle, une Planete éloignée du Soleil quatre fois plus que la Terre, doit faire ſa révolution dans l'eſpace de 8 années, qui eſt la racine quarrée du cube de ſa diſtance au Soleil, ſon mouvement réel ſur ſon orbe doit être deux fois plus lent que celui de la Terre, & ſon moyen mouvement journalier de 7′ 30″.

Quoique cette Comete, dans le temps que nous l'avons apperçûë, ſe ſoit trouvée éloignée un peu plus de quatre fois du Soleil que la Terre ne l'eſt de cet Aſtre, cependant ſon mouvement journalier a été déterminé de 9′ 40″, plus grand de près d'un quart qu'il n'auroit dû l'être, ſuivant cette regle, à laquelle il s'accorderoit plus parfaitement, en ſuppoſant que cette Comete, après avoir paſſé par ſon Périhélie, n'étoit pas encore arrivé à ſes moyennes diſtances, où ſa vîteſſe qui alloit en diminüant, devoit être plus petite que celle que l'on avoit obſervée.

En effet, ſi l'on conſidere la direction de la route de cette Comete, & ſa diſtance à la Terre dans les différentes Obſervations, dont le rapport a augmenté continuellement, pendant que ſon mouvement diminüoit continuellement de vîteſſe, il réſulte de la figure elliptique, qu'au temps de ſon apparition elle devoit être près de ſon Périhélie, d'où elle s'éloignoit en s'approchant de ſes moyennes diſtances.

Ainſi la regle de Kepler reçoit un nouveau degré de confirmation de la théorie de cette Comete dans le rapport des diſtances des corps céleſtes aux divers degrés de leur vîteſſe, puiſqu'outre les Planetes principales & leurs Satellites, elle repréſente aſſés éxactement la quantité du mouvement & de la vîteſſe de cette Comete, qui eſt peut-être la ſeule dont la

diſtance au Soleil & à la Terre ait été déterminée avec preſque autant d'exactitude que celle des autres Planetes.

Connoiſſant la diſtance de cette Comete au Soleil & la quantité de ſon mouvement en divers endroits de ſon orbe, on pourroit déterminer géométriquement la figure de l'Ellipſe ſur laquelle elle fait ſa révolution ; mais comme cette recherche, pour être exacte, demande que l'on connoiſſe avec une très-grande préciſion ſa diſtance au Soleil dans les diverſes Obſervations que l'on y employe, nous nous contenterons de remarquer que l'on peut repréſenter aſſés exactement ſon cours, en ſuppoſant que ſa moyenne diſtance au Soleil eſt à celle de la Terre au Soleil comme 4800 eſt à 1000. D'où il ſuit, ſuivant la regle de Képler, que ſa révolution ſur ſon orbe doit être d'environ dix années, & ſon moyen mouvement journalier de 6 minutes.

Par ce moyen, attribuant à l'orbe de cette Comete une excentricité de 1000 parties, enſorte que la proportion de ſon grand axe à celle du petit ſoit comme 5800 à 3800, on aura ſon mouvement vrai dans ſon Aphelie de près de 4 minutes, & dans ſon Périhélie de plus de 9 minutes, conformément à celui que nous avons obſervé dans cette ſituation.

A l'égard du lieu du Nœud de cette Comete, nous l'avons trouvé par les premiéres Obſervations à $10^d\ 16'$ du Verſeau, & par les derniéres à $10^d\ 6'$ du même Signe, éloigné ſeulement de 6 degrés du lieu où nous avons commencé à l'appercevoir. Nous avons auſſi trouvé l'inclinaiſon de l'orbite de cette Comete à l'Ecliptique par les premiéres Obſervations comparées enſemble, de $76^d\ 56'$, & par les derniéres, de $76^d\ 34'$, avec une différence ſeulement de $22'$ de l'une à l'autre, ce qui eſt bien différent de celles des autres Planetes, dont la plus grande, qui eſt celle de Mercure, n'eſt au plus que de 7 degrés ; mais comme l'on ne connoît point encore, du moins avec évidence, la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes à l'Equateur du Soleil, & la raiſon pour laquelle ces inclinaiſons ſont différentes entr'elles, peut-être que les Traités que l'on compoſera pour le Prix que l'on vient

vient de proposer, nous donneront quelque éclaircissement sur la cause d'une si grande inclinaison.

Il nous reste présentement à déterminer les lieux par où cette Comete a dû passer depuis que nous avons cessé de la voir, ceux où elle se trouve présentement, & où on pourra l'appercevoir dans la suite, afin de la pouvoir chercher dans le Ciel au temps qu'elle sera dans la situation la plus convenable.

Elle étoit à la fin de Janvier 1729 au dessus de la Constellation du Dauphin, d'où elle s'est avancée vers le Pégase, & elle doit se trouver présentement dans l'aîle du Cygne avec une latitude septemtrionale de près de 50 degrés, elle passera ensuite vers la queüe de cette Constellation, & se trouvera dans le mois de Septembre en opposition avec le Soleil, qui sera la situation la plus propre pour la voir, parce qu'elle sera alors plus près de la Terre que dans toute autre saison de cette année. Il sera cependant alors très-difficile à la découvrir, parce que sa distance sera encore plus grande que lorsqu'on a cessé de la voir à la vûë simple.

Longitude & Latitude de la Comete qui a paru en 1729 & 1730.

1729.			Longitude.	Latitude Boréale.
Août	31	à $9^h 34'$	≈ $8^d 34' 0''$	$28^d 48' 9''$
Sept.	2	9 25	8 3 10	29 6 30
	3	9 28	7 48 42	29 14 4
	10	8 6	6 18 34	29 55 7
	11	7 59	6 6 49	30 4 35
	12	7 33	5 55 20	30 9 32
	15	8 28	5 21 29	30 24 45
	16	8 24	5 11 22	30 29 0
	18	7 55	4 50 51	30 39 25
	19	7 7	4 42 58	30 43 50
	21	7 8	4 25 50	30 51 48
	23	7 0	4 8 36	31 0 17
	26	7 0	3 48 39	31 13 57

1729					Longitude.			Latitude Boréale.		
Octob. 10	à 7h	10'		≈	2d	38'	1"	31d	54'	29"
11	7	5			2	36	5	31	56	10
12	7	8			2	34	32	31	59	19
14	7	48			2	30	20	32	3	1
19	6	40			2	26	13	32	15	13
22	7	7	Directe		2	33	42	32	21	31
24	6	15			2	34	17	32	23	8
26	6	32			2	36	46	32	28	0
27	8	33			2	39	43	32	30	0
Nov. 10	8	24			3	42	37	32	57	17
14	6	12			4	8	27	33	3	9
16	7	40			4	23	5	33	6	2
17	6	37			4	29	55	33	10	0
18	5	38			4	38	14	33	11	40
20	9	12			4	54	33	33	16	30
12	6	28			5	10	31	33	18	40
24	5	54			5	29	29	33	26	0
30	7	55			6	27	23	33	39	34
Dec. 2	6	54			6	50	20	33	43	58
3	6	19			6	59	13	33	45	45
9	6	17			8	6	41	34	1	52
14	6	0			9	7	11	34	18	10
19	5	32			10	6	46	34	32	38
20	5	29			10	19	16	34	37	24
24	6	34			11	14	52	34	45	32
27	5	36			11	57	32	35	1	39
1730										
Janv. 7	5	35			14	41	31	35	44	34
8	6	10			14	57	23	35	48	50
16	5	48			17	1	29	36	27	30
17	5	51			17	16	12	36	33	22
18	5	57			17	34	16	36	38	50

ANATOMIE DE LA POIRE.

Par M. DU HAMEL.

IL n'eſt guére poſſible de raiſonner juſte ſur un corps organiſé, & de décider des uſages des parties qui le compoſent, ſans avoir auparavant une connoiſſance éxacte de leur ſtructure, de leur ſituation, & de la connexion qu'elles ont les unes avec les autres. 19 Juillet 1730.

C'eſt la voye qu'ont tenu juſqu'ici tant d'habiles Anatomiſtes pour débroüiller le méchaniſme prodigieux qui ſe trouve dans le corps des Animaux. C'eſt à cet ordre, qu'ils ont gardé dans leurs recherches, que nous ſommes redevables de tout ce que nous avons aujourd'hui de plus certain ſur l'œconomie du Corps humain, & cet ordre ne peut être changé, ſi l'on veut réüſſir dans l'examen de quelque corps organiſé que ce ſoit.

Il arrive cependant aſſés ſouvent que cet éxamen ſcrupuleux des parties rend la connoiſſance des uſages très-difficile.

A force de travail & de recherches, on découvre une ſtructure fine, délicate & compoſée. Les deſſeins ſur leſquels elle a été formée ſont incertains, & les effets qu'elle doit produire, bien différents de ceux que nous attribuons (par conjecture ſeulement) à une organiſation ſimple & unie, dont nous nous étions formé une idée peu conforme à la réalité.

C'eſt ce que m'a fait connoître le travail que j'ai fait ſur la Poire. La ſtructure d'une pelote de coton, ou, ce qui eſt la même choſe, d'une éponge, d'un parenchyme, chargé des ſucs du Poirier, me paroiſſoit d'abord ſuffiſante pour ſatisfaire à l'explication de tout ce que je connoiſſois de ce fruit; mais depuis qu'en y prêtant plus d'attention, j'y ai découvert des parties ſolides, & d'autres molles, des vaiſſeaux contournés de différentes maniéres dans le même fruit, & toûjours

uniformément dans les différents fruits du même genre ; depuis que j'ai obſervé des eſpeces de membranes, de cartilages, de glandes, de ligaments, & de pores, j'ai bien reconnu que les explications ſimples n'étoient pas toûjours les meilleures en Phyſique, & qu'il falloit abandonner les préjugés que j'avois ſur la nature de la Poire : pour y parvenir, je réſolus de m'attacher uniquement à la ſtructure & à la ſituation de ſes parties, & de mettre après cet éxamen celui de leurs uſages.

Sur ce projet, il y a environ trois ans que j'eſſayai de diſſéquer pluſieurs fruits mols, pourris ou cuits de différente maniére. Mais après ces préparations, à peine les parties les plus groſſiéres ſe trouverent-elles conſervées; mon travail ne ſervit donc qu'à me faire entrevoir un nombre d'organes, ſans en pouvoir reconnoître aucun un peu clairement.

Il eſt vrai qu'on employe même avantageuſement ces ſortes de préparations dans l'anatomie des Animaux, mais ce n'eſt que ſur certaines parties ; la cuiſſon, par exemple, fait appercevoir bien clairement la direction des fibres d'un muſcle, mais elle détruit entiérement les vaiſſeaux & les membranes, elle les réduit en gélées.

Les macérations conviennent en plus d'occaſions, elles ne détruiſent que les parties extrêmement fines qui lient & uniſſent les autres qu'on ſe propoſe de connoître ; par ce moyen on eſt donc en état d'en éxaminer la ſtructure, ce qui me détermina à mettre tremper dans différentes liqueurs pluſieurs eſpeces de Poires que je choiſis à deſſein, les unes fort mûres, & les autres encore vertes.

Je n'ai pû retirer aucun avantage des Eaux fortes, elles détruiſent tout, & lorſque les fruits y ont trempé long-temps, ils deviennent d'une ſubſtance qui paroît uniforme & preſque comme de la pâte.

Ce que j'ai remarqué ſeulement, c'eſt que les fruits caillent fort promptement l'Eau-forte, & la rendent comme de la gelée, qui ſe réduit enſuite, quoique difficilement, en une eſpece de *Serum*. . . . .

Les fruits acides & les doux produiſent également cette coagulation, j'en ai fait l'expérience ſur les Oranges douces & aigres, ſur les Ceriſes & les Groſeilles, ſur les Poires & les Pommes, &c.

On ne tire pas non plus un grand avantage de la macération des fruits dans l'Eau-de-vie & le Vinaigre diſtillé; ces liqueurs, au lieu de commencer la deſunion des parties, les racorniſſent, & les rendent ainſi plus difficiles à diſſéquer.

C'eſt de la macération dans l'eau commune dont j'ai retiré le plus d'avantage, elle pénetre petit-à-petit, elle s'inſinüe entre les parties des fruits, elle en détruit un nombre d'infiniment fines, & épargne les autres, elle en augmente ſeulement un peu le volume, ce qui les fait plus aiſément appercevoir, mais elle agit très-lentement, de ſorte que quelques-uns n'ont été dans l'état où je les demandois qu'au bout de deux ans.

Par les macérations j'étois donc parvenu à attendrir mes Poires, mais cela ne ſuffiſoit pas, il falloit achever la deſunion d'un nombre de parties qui par leur entrelaſſement forment la ſubſtance de ce fruit. Voici comme je m'y ſuis pris.

Je les ai toûjours diſſéqué nageant dans l'eau, quelquefois avec une Lancette ou un petit Scapel, d'autres fois avec la pointe d'un Canif très-délié ou une érigne très-fine; ſouvent même la délicateſſe des parties eſt ſi grande, que la ſeule pointe d'un curedent m'a fort bien ſervi, mais rien ne m'a mieux réuſſi que de darder de l'eau chaude avec une Seringue à injection ſur les endroits difficiles à ſéparer, ou de ſouffler ſimplement avec un tuyau ſur ces endroits, cependant cela n'a quelquefois pas ſuffi, & j'ai été obligé de preſſer mollement entre les doigts ou avec des petites pinces, & de ſecoüer & agiter dans l'eau la piéce que je préparois pour occaſionner avec douceur & ménagement la deſunion que je ſouhaitois; mais ce qu'il eſt important de remarquer, lorſqu'on veut préparer proprement une partie, c'eſt de ne pas entreprendre de la diſſéquer tout de ſuite, il faut, après l'avoir travaillée un temps, la laiſſer repoſer & ſe macérer encore pendant une quinzaine de jours.

Ces préparations, si nécessaires en Anatomie, dépendent d'un grand nombre de précautions qui paroissent quelquefois dégénérer en scrupules, elles n'en sont cependant pas moins importantes, c'est ce qui m'a engagé à détailler les moyens que j'ai employés pour reconnoître les parties que je me suis proposé de décrire, afin que ceux qui voudront perfectionner cette recherche, puissent profiter des mêmes secours qui m'ont été si utiles.

Après m'être suffisamment étendu sur ces sortes de préparations en général, je crois qu'il sera plus utile de joindre à la description de chaque partie la maniére de la découvrir, ainsi je passe à la division générale de la Poire.

La Poire, comme l'a décrite M. de Tournefort, est un fruit charnu, plus mince ordinairement vers la queüe que vers l'autre bout, où il est garni d'un nombril formé par les découpures du calice, on trouve dans son intérieur cinq loges remplies de pépins, c'est-à-dire, des semences couvertes d'une peau cartilagineuse.

PL. I. Fig. 1. PL. II. Fig. 1. & 2.

Cette définition, qui suffisoit à cet Auteur pour caractériser la Poire, peut bien nous servir à faire la division de ce fruit en trois parties, qui sont, la tête ou l'ombilic, la queüe ou le pédicule, & le corps, parties à décrire chacune en particulier : mais comme actuellement ma vûë est différente de celle de cet illustre Botaniste, & que l'éxamen que je me propose de ce fruit est plus intime que celui qu'il avoit pour but, il m'a paru que j'étois obligé de le considérer dans ses téguments, dans ses vaisseaux & dans les organes qui appartiennent à ses pépins ; trois objets assés considérables pour donner de l'étendüe à autant de parties de mon Mémoire. Je commence par celle qui est extérieure.

DES TEGUMENTS.

On retranche de dessus ces fruits une peau qui est ordinairement dure & desagréable. Par l'examen que j'en ai fait, j'ai reconnu que ce qu'on enleve avec le couteau est composé de quatre substances différentes qui s'étendent sur tout

le fruit, & le recouvrent en entier, c'eſt pourquoi je les nomme ſes *téguments* ou ſes *enveloppes communes*, dont la premiére, en commençant par l'extérieur, peut s'appeller l'*épiderme*, la deuxiéme le *corps muqueux*, la troiſiéme le *tiſſu pierreux*, & la quatriéme la *peau*. J'ai crû devoir diſtinguer ainſi ces quatre téguments, par la reſſemblance qu'ils ont avec ceux du Corps humain, comme il ſera aiſé de s'en convaincre par l'éxamen que nous allons faire de chacun d'eux en particulier.

DE L'E'PIDERME.

L'orſqu'on éxamine avec une Loupe la ſuperficie de la plûpart des Poires, elle paroît chagrinée, & on découvre deſſus, outre des petites gales dont nous parlerons dans la ſuite, une quantité de petits points blancs, qui examinés avec un bon Microſcope, ne paroiſſent être qu'une membrane mince, tranſparente & blancheâtre qui s'eſt détachée du fruit, & s'eſt relevée, comme on le voit dans la Fig. 2. Pl. I. Pl. I. Fig. 3. Figure 2.

De plus j'ai encore remarqué ſur l'écorce de quelques fruits macérés, qu'il reſtoit de petits morceaux de membranes qui ſe diſtinguoient du reſte en ce qu'ils étoient bruns, brillants, gerçés, & qu'ils ne ſe détachoient que par écailles.

Je crûs d'abord que ces morceaux de membrane appartenoient à une cinquiéme enveloppe très-mince, délicate, fort adhérente, & que je ne pouvois à cauſe de cela appercevoir que dans quelques endroits, quoiqu'elle recouvrît toute la Poire, cela paroiſſoit probable ; cependant par les moyens que j'ai employés pour m'en aſſûrer, j'ai reconnu parfaitement que ce que j'avois apperçû tant ſur les fruits verts que ſur les macérés, n'étoit que des parcelles d'épiderme qui s'étoient deſſéchées, & ſous leſquelles il s'en étoit régénéré un nouveau.

Pour éxaminer la ſtructure de ces parcelles d'épiderme, j'en mis de très-petits morceaux au foyer d'un Microſcope à liqueur, ils me parurent d'une ſubſtance très-uniforme, & je n'y reconnus ni ramification de vaiſſeaux ni pores (peut-être

à cauſe de leur deſſéchement) je remarquai ſeulement qu'ils étoient très-tranſparents : mais une membrane ſi mince peut-elle être opaque?

On a coûtume d'employer un fer rouge ou l'eau boüillante pour détacher l'épiderme des Animaux ; ces mêmes ſecours m'ont été auſſi très-utiles pour reconnoître celui de nôtre fruit, de ſorte que par leur moyen je l'ai apperçû auſſi clairement dans les jeunes fruits que je l'avois fait dans les fruits mûrs à l'aide des macérations, & dans les mols ſans aucune préparation.

Pl. I. Fig. 1. Cette membrane ſe trouve par tout le fruit, je l'ai obſervée à la queüe, au corps & dans l'ombilic, elle eſt mince, d'un tiſſu uni, qui ne paroît point compoſé de vaiſſeaux, mais elle eſt ferme, & fortement attachée au corps muqueux.

Fig. 4. Le Microſcope nous la fait encore appercevoir percée d'une infinité de pores qui ne ſont pas tous de la même groſſeur, les uns ſont très-fins, & forment comme un fond de ſable, les autres ſont plus conſidérables, & arrangés de telle ſorte, qu'ils imitent en quelque maniére un réſeau.

La couleur de l'épiderme eſt incertaine, quelquefois elle paroît tranſparente comme de l'écaille blonde ; pour lors elle prend, ou plûtôt elle laiſſe appercevoir la couleur du corps muqueux, mais d'autres fois, & ſur-tout dans les endroits où le fruit a été le plus expoſé au Soleil, elle paroît rouge.

On pourroit donc à cette occaſion faire la queſtion, ſi la couleur des fruits réſide dans l'épiderme ou dans le corps muqueux.

Je ſçais que dans les fruits qui ſont colorés naturellement comme la Pomme de calville, pluſieurs Pêches, la Poire ſanguinole, &c. la couleur réſide non ſeulement dans le corps muqueux, mais même dans les vaiſſeaux, & ſur-tout dans leur épanoüiſſement aux approches du tiſſu pierreux.

Mais dans les Poires qui ne ſont pas rouges naturellement, & qui ne prennent cette couleur que par l'action du Soleil, elle ne paſſe jamais le corps muqueux, & paroît ſouvent ne réſider que dans l'épiderme, ou du moins dans la ſurface externe

externe du corps muqueux, ce qui n'eſt pas aiſé à vérifier, car la couleur rouge diſparoît, ſoit qu'on mette les fruits dans l'eau boüillante, ſoit qu'on eſſaye d'en détacher l'épiderme avec un fer rouge ; ainſi pour conſerver la couleur, on n'a d'autre moyen de détacher l'épiderme qu'avec la pointe du Scalpel. Qui ſçait pour lors ſi on n'emporte pas une partie du corps muqueux avec l'épiderme ? ces deux membranes ſont fort minces, avec cela très-intimement unies, ainſi elles ſont très-difficiles à ſéparer l'une de l'autre : je ſuis cependant venu à bout de le faire dans quelques eſpeces, ce qui paroîtroit décider la queſtion ; mais comme cette obſervation a beaucoup de rapport avec celle que j'ai été obligé de faire pour reconnoître ce corps muqueux, je n'en parlerai que lorſque j'examinerai cette membrane.

Les petits points blancs que j'ai remarqués être des petits morceaux d'épiderme deſſéchés, & qui tombent par écailles, font voir qu'il ſe détruit petit à petit comme dans les Animaux ; & ce qui eſt encore admirable, c'eſt que ſa régénération ſe fait auſſi de la même maniére ; car ſi, comme je l'ai déja remarqué, l'on examine le deſſous de ces écailles blanches dont je viens de parler, on y trouve un nouvel épiderme tout régénéré ſans aucune cicatrice. En effet comme l'épiderme ſe détruit peu-à-peu, & ſe régénere de même, la ſuperficie des fruits ne ſeroit-elle pas toute galeuſe, ſi ſa régénération ſe faiſoit avec cicatrice. Pl. I. Fig. 2.

Le rapport & la conformité eſt ſi exacte entre l'épiderme de nôtre fruit & celui de l'Homme, que je ſerois fort porté à lui attribuer une pareille origine : mais comment l'épiderme de l'Homme eſt-il produit ? eſt-ce par une liqueur, par un ſuc, ou une roſée qui ſe condenſe & s'épaiſſit ſur la peau, ou par l'expanſion de quelques vaiſſeaux ? Si c'eſt une roſée, s'échappe-t-elle des nerfs ou des vaiſſeaux ſécrétoires, ou indifféremment de tous les vaiſſeaux ? Si c'eſt plûtôt par l'expanſion de quelques vaiſſeaux, eſt-ce par celle des papilles nerveuſes, des vaiſſeaux ſécrétoires ou des lymphatiques, ou ſans diſtinction de tous les vaiſſeaux ? Quoique la production

de cette membrane ait été un point fort diſcuté, il eſt cependant encore très-incertain, chaque Anatomiſte a preſque eu ſon ſentiment particulier, & chaque ſentiment a encore ſes partiſans.

En attendant que nôtre travail ſur l'anatomie des Végétaux nous ait fourni quelques lumiéres ſur ce ſujet, je me contenterai de remarquer que les nerfs étant les organes de la ſenſation & du mouvement, nôtre Poire qui n'a point de mouvement, & qui ne nous donne aucune marque de ſenſibilité, n'a probablement point de nerfs, d'ailleurs les diſſections les plus éxactes ne nous y ont rien fait découvrir qui en eût le caractere, ainſi l'épiderme de nôtre Poire n'eſt probablement formé ni par l'épanoüiſſement des houppes nerveuſes, ni par l'épaiſſiſſement du ſuc nerveux.

Mais ce fruit tranſpire (nous nous en ſommes aſſûrés par des expériences particuliéres) ainſi il y a des vaiſſeaux excrétoires; d'un autre côté il eſt recouvert par un corps muqueux (comme nous allons le voir) ainſi ſon épiderme pourroit être formé ou par l'épanoüiſſement des vaiſſeaux ſécrétoires, ou par l'épaiſſiſſement de la ſuperficie extérieure du corps muqueux. Je ſerois fort porté à embraſſer ce dernier ſentiment, ſur-tout ſi cette muquoſité qu'on remarque en touchant ce corps, qu'on appelle à cauſe de cela *muqueux,* vient d'une eſpece d'extravaſion de la lymphe glutineuſe qui ſert à la réparation des vaiſſeaux & des membranes; mais encore un coup la nature de l'épiderme n'eſt gueres plus éclaircie par l'anatomie de la Poire que par celle des Animaux, ainſi j'attends, pour embraſſer un ſentiment, que l'anatomie de quelques autres fruits m'ait été plus favorable.

Enfin, pour dire un mot des uſages de cette membrane, il me paroît probable que ſa ſituation, ſa ſolidité, & les autres caracteres que nous avons remarqués en elle, ſont des preuves manifeſtes que la Nature l'a deſtinée à défendre des injures de l'air les autres parties de la Poire qui ſont tendres, molles & délicates.

La fermeté de l'épiderme peut encore écarter quantité de

petits inſectes, qui ſans cela détruiroient toutes les Poires, comme il arrive au Beurré & au Doyenné. Lorſque leur épiderme eſt fort éminci par une grande maturité, cette membrane peut encore diminuer la tranſpiration, qui étant trop abondante, deſſécheroit les fruits dans les grandes chaleurs.

Je finis cet article ſans parler des maladies de l'épiderme, parce que je crois qu'on lui attribüe mal-à-propos celles du corps muqueux.

Quand, par exemple, on voit l'épiderme ſe détacher preſque entiérement, & tomber par grandes piéces, il m'a toûjours paru que c'étoit le corps muqueux, qui étant attaqué, laiſſoit l'épiderme ſans ſoûtien; & ſi quelquefois après cette maladie il ne reſte point de cicatrice ſur la Poire, c'eſt que quand le corps muqueux n'eſt pas détruit dans toute ſon épaiſſeur, mais ſeulement dans ſa partie externe, ou qui eſt contigüe à l'épiderme, il peut alors ſe réparer ſans cicatrice.

DU CORPS MUQUEUX.

Quand par les macérations on eſt parvenu à enlever l'épiderme ſeul, on apperçoit une membrane fort mince, déliée & très-délicate, qui demeure attachée au tiſſu pierreux qu'elle couvre immédiatement & dans toute l'étendüe de la Poire. PL. I. Fig. 5.

En la touchant, on remarque une certaine douceur ou une viſcoſité qui nous la fait appeller le *corps muqueux,* nom qui convient encore par la place qu'elle occupe entre l'épiderme & la peau.

Cette membrane reſte communément adhérente, tantôt à l'épiderme, & tantôt au tiſſu pierreux, ce qui prouve bien ſon éxiſtence & ſon caractere de membrane; mais pour obſerver ſa tiſſure, il falloit la voir ſeule & détachée de toute autre partie. Elle eſt ſi délicate, que je n'ai pû en avoir que de petits morceaux: ainſi ſéparés, je les ai éxaminés avec un Microſcope à liqueur, qui me les a fait appercevoir très-tranſparents, & percés comme l'épiderme de quantité de pores, quoique moins apparents.

Le corps muqueux de beaucoup de Poires eſt vert, cela

ne fait pas de difficulté. Il n'en eſt pas de même aux endroits expoſés au Soleil, comme je l'ai fait ſentir en parlant de l'épiderme, & il n'eſt pas aiſé de décider à laquelle de ces deux membranes appartient cette couleur rouge. Voici quelques obſervations qui tendent à éclaircir la queſtion.

Ayant eſſayé pluſieurs fois, & ſur différents fruits, d'emporter avec un Scalpel très-fin l'épiderme d'une petite partie de Poire que j'avois expoſé à une Loupe de trois à quatre lignes de foyer : J'ai remarqué,

Que quelquefois je n'ai pû enlever l'épiderme, ſans être teint de rouge, & d'autres fois je l'ai détaché clair & tranſparent, ſans être teint en aucune maniére; lorſque j'ai gratté pour enlever le corps muqueux, tantôt la couleur rouge s'eſt conſervée juſques ſur les pierres, & tantôt je l'ai apperçûë ſuperficielle, de ſorte que la partie interne du corps muqueux étoit encore verte.

Ces obſervations me font croire que la couleur rouge réſide dans le corps muqueux, mais qu'elle l'affecte diverſement, de ſorte que tantôt elle ne paroît que ſur la ſurface externe ou voiſine de l'épiderme, & tantôt toute la ſurface en eſt teinte.

Si quelquefois je n'ai pû détacher l'épiderme, ſans être coloré, ſa grande délicateſſe ou ſon adhérence au corps muqueux pouvoient bien en être la cauſe.

Quoique je n'aye rien de bien certain ſur la nature de cette membrane, je crois cependant qu'elle eſt formée d'un laſſis de vaiſſeaux infiniment fins, baignés d'une liqueur mucilagineuſe qui lui donne ſa douceur.

Pour ce qui eſt de ces uſages, la maniére avec laquelle elle embraſſe les pierres du tiſſu pierreux, m'a fait conjecturer qu'elle ſert à les aſſujettir & les tenir dans une même ſituation; il arrive peut-être encore qu'elle ſert à la régénération de l'épiderme, mais il eſt bon de remarquer que la ſurface chagrinée que nous avons obſervée ſur beaucoup de Poires, leur vient de cette ſorte d'adhéſion du corps muqueux au tiſſu pierreux.

J'ai dit que beaucoup d'Animaux s'accommoderoient fort

de cette membrane pour leur nourriture, si l'épiderme ne la mettoit à couvert. Cette défense n'empêche pas qu'une espece de Mites très-petites, que je n'ai observées que confusément, ne mangent le corps muqueux sous l'épiderme, qu'elles laissent en son entier : il y a encore quelquefois une troupe de ces Chenilles, qu'on appelle des *Livrées,* qui après avoir détruit l'épiderme, mangent entiérement le corps muqueux, ce qui produit ces petites gales fines qu'on remarque si souvent sur les Poires ; car lorsque le corps muqueux est détruit en entier, il ne se régénére plus, mais il se forme à la place une espece de gale gommeuse.

Le corps muqueux est encore sujet à bien des accidents, qui presque tous altérent sa couleur.

Les meurtrissures, comme les coups de grêles, le desséchent, & font des taches noires sur les Poires.

Les humidités, quand elles sont longues & froides, interrompant la transpiration, occasionnent sa corruption, qu'on reconnoît à la couleur grise & livide qu'elle prend alors. J'observerai à cette occasion, que quelques Auteurs recommandent, pour faire grossir les fruits, de les mettre, lorsqu'ils sont encore petits, tremper dans l'eau jusqu'à ce qu'ils ayent acquis leur maturité. J'ai fait cette expérience, & mes fruits ont été d'abord attaqués de la maladie dont je viens de parler, se sont ensuite fendus, & enfin se sont détachés de l'arbre presque pourris & avant leur maturité.

La trop grande ardeur du Soleil quelquefois le desséche petit à petit, mais assés souvent produit cette maladie, qu'on appelle les *coups de Soleil,* qui n'est autre chose que la rupture des vaisseaux & des sacs aëriens, occasionnée par la trop grande raréfaction de l'air & des liqueurs, comme on peut s'en assûrer en approchant un fer chaud d'une Poire encore verte, car alors on entend une espece de décrépitation & un craquement considérable qui change sur le champ la couleur du corps muqueux.

DES PIERRES.

Pl. I. Fig. 6. Les deux enveloppes dont je viens de parler, étant levées, on découvre une quantité de corps ſolides, qui ſont tellement arrangés ſur toute la ſuperficie de la Poire, qu'ils lui en forment une troiſiéme que nous nommerons l'*enveloppe pierreuſe,* parce qu'on a coûtume d'appeller des pierres, les petits corps dont il s'agit *.

Je mets ce tiſſu pierreux au nombre des enveloppes, quoique dans la Poire il ſe trouve des pierres ailleurs que ſous ſon corps muqueux, mais cet ordre n'eſt point oppoſé à celui que les Anatomiſtes obſervent à l'égard des Animaux, puiſque le corps graiſſeux, qui eſt mis au nombre de leurs téguments, ſe trouve encore répandu dans toutes les parties de leur corps.

Les pierres de la ſuperficie, & celles qui ſe rencontrent dans les différentes parties de la Poire, m'ont paru, tant par leur ſolidité que par les organes qui les accompagnent, d'une nature aſſés ſemblable pour n'être point ſéparées; ainſi j'ai crû qu'il ſeroit plus à propos, même plus conforme à l'uſage des Anatomiſtes, d'éxaminer dans un ſeul & même article les pierres qui ſont arrangées ſous le corps muqueux, & celles qui ſont répanduës dans la ſubſtance de la Poire, quoique je me fuſſe propoſé, dans cette premiére Partie, de n'éxaminer que ce qui concerne les téguments.

Les pierres ſont donc répanduës dans toute la ſubſtance de la Poire, mais elles n'y ſont pas jettées tout-à-fait au hazard.

Pl. II. Fig. 1. Elles ſont amoncelées auprès de l'ombilic, & y forment une eſpece de roche.

Pl. I. Fig. 6. Pl. II. Fig. 1. Sous le corps muqueux, elles ſont arrangées aſſés réguliérement à côté les unes des autres, ce qui m'a fait nommer cet aſſemblage, le *tiſſu* ou l'*enveloppe pierreuſe.*

Le long de l'axe du fruit, excepté dans le centre, elles forment par leur diſpoſition une eſpece de canal; ce canal eſt diviſé en deux parties par les pépins. Dans l'éxamen que je

* M. Ruich a parlé des pierres, & les a nommés *corps aciniformes,* M.rs Grew & Malpighi en ont auſſi parlé.

ferai de ces deux parties, j'appellerai la ſupérieure, ou celle qui eſt proche de l'ombilic, le *canal pierreux*, & l'inférieure, ou celle qui eſt proche de la queüe, la *gaine pierreuſe ;* car pour reconnoître ces parties, il faut leur donner des noms. Pl. II. Fig. 1.

Il n'y a point d'endroit dans le fruit où les pierres ſoient plus groſſes qu'aux environs des pépins, elles y ſont plus écartées les unes des autres que par-tout ailleurs, & les eſpaces qui ſont entr'elles ſont remplis par une ſubſtance fine & ordinairement bien différente, à la vûë & au goût, de la ſubſtance propre de la Poire, mais elle eſt aſſés ſemblable à celle qui unit les grains du tiſſu pierreux; c'eſt cette eſpece d'enveloppe des pépins que j'ai appellé la *ſubſtance pierreuſe.* Fig. 1. 2. & 3.

Depuis cette ſubſtance juſqu'au tiſſu pierreux, il ſe trouve répandu dans la ſubſtance propre de la Poire un nombre de petites pierres très-écartées les unes des autres, & qui, à cauſe de cela, ne ſe remarquent pas aiſément : j'ai obſervé qu'elles vont toûjours diminüant en nombre & en groſſeur depuis le centre juſqu'à la circonférence. Fig. 1. & 2.

Enfin, il y en a encore une grande quantité de très-fines qui ſont répanduës par toute la Poire entre les pierres dont j'ai parlé, on ne peut cependant les y découvrir qu'à l'aide d'une Loupe, & après de longues macérations.

Mais une choſe ſinguliére, c'eſt que toutes ces pierres qui ſont, comme nous venons de le voir, ſituées ſi différemment dans nôtre fruit, ont cependant une grande connexité les unes avec les autres, & forment toutes enſemble une continuité que nous allons ſuivre dans toute ſon étenduë.

D'abord elles ſont ſituées tout le long de la queuë entre les téguments & un faiſceau de vaiſſeaux qui en occupent le centre. Fig. 1.

A l'inſertion de la queuë au corps de la Poire, elles ſe diviſent en deux portions, dont une qui eſt le tiſſu pierreux, s'épanoüit ſur la ſurface de la Poire, & l'autre qui eſt la gaine pierreuſe, ſe prolonge encore ſelon ſon axe, enveloppant, comme dans une eſpece de gaine, un gros faiſceau de vaiſſeaux que tout le monde connoît en cet endroit. Fig. 1.

Un peu au-deſſous de la baſe des pépins, cette gaine

PL. II. Fig. 1. 2. & 3. s'épanoüit, & c'eſt en cet endroit que commence la ſubſtance pierreuſe que je regarde comme le foyer de toutes les pierres qui ſont répanduës dans la ſubſtance propre du fruit, de ſorte que je crois que par les pierres intermédiaires, il y a une eſpece de communication entre cette ſubſtance pierreuſe & le tiſſu pierreux : quoiqu'il en ſoit, elle forme autour des pépins une enveloppe ſenſible, épaiſſe, & de figure à peu-près ovoïde, qui par ſon retréciſſement devient ce que nous avons appellé le *canal pierreux*, qui s'étend juſqu'à l'ombilic ; la longueur de ce canal varie beaucoup, ſuivant les différentes eſpeces de Poires. Dans les Bergamottes & les autres Poires qui ont la tête renfoncée, il eſt fort court, au lieu que dans le Bon-chrêtien & beaucoup d'autres eſpeces il eſt aſſés long : les Pierres dans cet endroit ſont ordinairement groſſes, très-ſerrées les unes contre les autres, de ſorte que ſouvent elles s'uniſſent pluſieurs enſemble, quelquefois même j'ai trouvé le canal tout d'une piéce. (Fig. 1. — Fig. 8.)

Fig. 1. 4. & 5. J'ai dit que le canal pierreux ſe terminoit à l'ombilic, c'eſt auſſi en cet endroit que vient finir le tiſſu pierreux, & la réünion de l'un & de l'autre y forme ce que nous avons appellé *la roche*.

Fig. 4. & 5. Cette roche a la figure d'un cone renverſé, de maniére que la baſe répond à l'ombilic, & la pointe qui, à la vérité eſt tronquée, regarde les pépins. Elle ne paroît d'abord compoſée que d'un amas de pierres ſoudées fort irréguliérement enſemble, cependant elle ſe diviſe fort aiſément, & d'une maniére très-diſtincte en deux parties, une extérieure, & l'autre intérieure; celle-ci, qui en eſt comme le noyau, a auſſi la figure d'un cone tronqué, & c'eſt la continuation du canal pierreux, qui en s'épanoüiſſant par ſon extrémité en maniére de trompe, forme à l'endroit de l'ombilic la baſe du cone. (Fig. 4. — Fig. 9.)

Pour ce qui eſt de la partie extérieure de la roche, c'eſt un prolongement du tiſſu pierreux qui fournit une eſpece d'enveloppe au noyau dont je viens de parler, de maniére cependant qu'elle eſt beaucoup plus épaiſſe du côté de l'ombilic que de l'autre, ce qui augmente la largeur de la baſe du cone.

Enfin,

Enfin, je crois que par ce prolongement le tiſſu pierreux communique encore avec la ſubſtance pierreuſe.

L'on connoît par cet éxamen général, que les pierres affectoient de certaines poſitions conſtantes, quoique différentes preſque dans chaque partie de la Poire. Ces poſitions ne ſont certainement pas inutiles, mais avant de former aucune conjecture ſur leur uſage, il faut bien connoître la nature de ces pierres; pour cela, j'ai commencé par les conſidérer ſeules & détachées de toutes les parties qui les environnent, & enſuite je les ai examinées jointes avec les parties qui s'uniſſent à elles.

Suivant mes obſervations, il ſeroit inutile de chercher des pierres dans les fruits nouvellement noüés; cette partie du fruit qui doit s'endurcir, ne m'a paru dans ce temps qu'une maſſe blanche, compacte, à la vérité, mais toute tendre & toute pleine d'eau. Dans la ſuite cette ſubſtance paroît ſe diviſer par grains blancs qui n'ont encore guéres de ſolidité, & qui font preſque toute la ſubſtance intérieure du fruit. Enfin ces grains groſſiſſent & durciſſent peu à peu, de ſorte que les fruits étant encore fort petits, ſont tous remplis de pierres: ces pierres ne ſont cependant pas ſi dures que dans les fruits parvenus à leur maturité, & elles conſervent une legére tranſparence, qui donne lieu d'appercevoir quelques vaiſſeaux qui vont s'inſérer & ſe ramifier dans leur ſubſtance. A meſure que les Poires approchent de leur maturité, les pierres diſparoiſſent en quelque maniére, & il ſemble que la meilleure partie s'en détruiſe; nous verrons cependant par la ſuite de ce Mémoire, qu'elles ne diminuënt ni en nombre ni en groſſeur, bien-loin de cela elles deviennent plus dures & plus opaques, ſur-tout celles du tiſſu pierreux.

PL. II. Fig. 7.

C'eſt dans cet état que ces pierres éxaminées au Microſcope, ne m'ont jamais paru formées par couches, ou par l'union de pluſieurs lames pierreuſes, mais ſeulement par l'aſſemblage de pluſieurs grains, ou ſi l'on veut, par l'union de pluſieurs pierres beaucoup plus petites, qui communiquent les unes avec les autres par des vaiſſeaux.

Pl. II. Fig. 11. J'ai outre cela quelque fois apperçû dans ces grosses pierres, qui forment la gaine pierreuse, une espece de lassis de la même substance que la pierre, qui imite assés bien les cellules de la moëlle des os, & qui est formé par des vaisseaux endurcis.

Il est encore bon d'observer que ces pierres brûlent au feu, & exhalent une odeur pénétrante assés semblable à celle du pain brûlé.

Enfin il y en a beaucoup qui par une forte ébullition se dissolvent entiérement dans l'eau commune, ou encore plus aisément dans les liqueurs spiritueuses.

Pour éxaminer les pierres nües & détachées des parties qui les environnent, j'ai eu besoin d'une bonne Loupe & d'un Microscope à trois verres; mais pour les observer avec toutes leurs dépendances, il m'a fallu d'autres secours, car étant ordinairement accompagnées de vaisseaux d'une finesse extrême, ces vaisseaux s'affaissent les uns sur les autres, si-tôt qu'on les tire de l'eau, & ne forment alors qu'un peloton auquel on ne peut rien connoître, ce qui m'obligea de chercher un moyen commode pour les éxaminer flotant dans l'eau : rien ne m'a mieux réüssi que de border une glace avec de la cire, & de mettre la piéce que je voulois observer nageant dans l'eau avec laquelle j'avois rempli ce petit bassin. Il est bon de remarquer en passant que les liqueurs flegmatiques, pourvû qu'elles soient bien claires, sont préférables aux spiritueuses, parce que ces derniéres s'évaporant aisément, sur-tout lorsqu'elles sont exposées au Soleil, forment par une partie de ces exhalaisons qui se condensent sur la lentille du Microscope, une espece de broüillard qui nuit beaucoup à l'observateur.

Ayant donc éxaminé de la maniére dont je viens de parler, quelques pierres garnies de la matiére qui les environnoit, & que j'avois tirées des fruits qui avoient maceré fort longtemps, j'apperçus un nombre prodigieux de fibres que je Fig. 6. crois être des vaisseaux très-fins, qui étoient disposées en maniére de rayons autour de chaque pierre, avec quelqu'autres

vaiſſeaux beaucoup plus gros, qui quelquefois venoient ſe terminer & ſe perdre, pour ainſi dire, à une pierre; d'autrefois ils en ſortoient, ou ſans s'y être diviſés, & preſque auſſi gros qu'ils y étoient entrés, ou après s'y être diviſés en trois ou quatre branches.

J'ai remarqué que pour faire ces obſervations, il falloit prendre des fruits qui euſſent atteint leur groſſeur, car on ne pourroit pas découvrir cet épanoüiſſement de vaiſſeaux dans les jeunes fruits; ces vaiſſeaux ne ſe développent pas tout d'un coup, il eſt même un temps où on ne peut preſque les y appercevoir.

Immédiatement après que les Poires ſont noüées, je n'ai pû découvrir dans leur intérieur, comme je l'ai remarqué, qu'une ſubſtance blancheâtre & uniforme où les principes des pierres & des vaiſſeaux ſont confondus.

Quelque temps après, lorſque les pierres commencent à ſe diviſer par grains, ces petits vaiſſeaux ne ſont guéres apparents.

Enfin on commence à les appercevoir lorſque les pierres prennent une certaine ſolidité, mais c'eſt encore bien confuſément, ils ſont courts, gros, & aſſés ſolides, de la même couleur que les pierres, ce qui fait qu'on a bien de la peine à les diſtinguer d'avec elles; mais peu à peu, & à meſure que la Poire approche de ſa maturité, ces vaiſſeaux s'empliſſent de liqueur, s'émınciſſent, s'allongent, s'attendriſſent & blanchiſſent, pendant que les pierres durciſſent, deviennent opaques, & rougiſſent un peu, ce qui fait qu'on peut alors diſtinguer beaucoup plus aiſément ces deux parties. C'eſt dans ce temps que par le ſecours des macérations, on découvre la route, la multitude & la diſpoſition des vaiſſeaux, tels que nous venons de les décrire.

On voit encore aſſés diſtinctement ce même arrangement dans un petit morceau de Poire coupé très-mince, en l'éxaminant avec un Microſcope à trois verres. Pl. II. Fig. 12.

Il ne faut pas croire que ce que je viens de dire de ces pierres ſe rencontre ſeulement dans les Poires qu'on appelle

communément *pierreuſes*, je les ai trouvées dans la Magdelaine d'Eté, la Virgouleuſe & l'Ambrette, qui ſont des fruits fondants, auſſi-bien que dans le Bon-chrêtien & le Saint-Martial, qui en ſont de caſſants, cependant elles ſont plus groſſes & plus ſenſibles dans les derniéres que dans les premiéres.

On ſouhaitera peut-être ſçavoir comment ſe forment certaines groſſes pierres qui ſe trouvent par accident dans quelques Poires; mais comme je crois qu'à cela près qu'elles prennent plus de nourriture, elles croiſſent de la même maniére que les autres pierres, je me réſerve à en parler, lorſque je donnerai mes conjectures, qui s'étendront ſur les unes & les autres en même temps.

Ainſi, pour le préſent, je me contenterai de remarquer qu'il ne manque preſque jamais de s'y aboucher un, deux, ou trois gros vaiſſeaux, quand même ces pierres ſe trouveroient dans le tiſſu pierreux, lieu où les vaiſſeaux ſont ordinairement très-fins.

A cette occaſion on peut encore obſerver que quand les pierres ſe trouvent dans le tiſſu pierreux, il n'y a ordinairement en cet endroit ni épiderme, ni corps muqueux, mais ſeulement une eſpece de gale qui eſt fortement attachée aux pierres, ce qui n'eſt pas ſurprenant; car ces groſſes pierres, qui ſont de la nature des exoſtoſes, ou de quelque autre concrétion oſſeuſe, ſont occaſionnées ordinairement par un coup de grêle, la picqueure d'un inſecte, ou quelques autres cauſes extérieures qui détruiſent l'épiderme & le corps muqueux : or, comme nous l'avons remarqué en parlant de ces membranes, elles ne ſe régénérent point, quand le corps muqueux a été détruit juſques ſur le tiſſu pierreux.

Depuis que nous parlons de ces petits corps durs qui ſont répandus en ſi prodigieuſe quantité dans les Poires, je leur ai toûjours donné le nom de *pierres*, mais ce n'eſt que pour me conformer au langage ordinaire, je n'ai garde de les confondre avec les pierres minérales ou foſſiles, ni même avec les pierres qu'on trouve dans les reins & la veſſie des

Animaux; elles se forment bien différemment.

Les pierres minérales ne sont point des corps organisés qui reçoivent leur nourriture par l'entremise des vaisseaux.

Un suc pétrifiant peut être de la nature du cristal ou de la sélénite, pénetre de la terre, du bois, des coquillages, & ces corps deviennent ainsi des pierres.

Ce n'est point non plus une cause intérieure qui les fait grossir, la chose est bien plus simple, ce sont des incrustations de la même matiére à peu-près que celles du noyau de la pierre, & qui s'endurcissent de la même maniére, ainsi le volume de la pierre augmente à mesure qu'il s'en forme de nouvelles.

Pour peu qu'on fasse attention à nos observations, on reconnoîtra que les pierres de nos Végétaux (car je conserve le terme en faveur de l'usage) ne grossissent point par des incrustations, mais par les sucs que leur charrient le nombre prodigieux de vaisseaux qui viennent y aboutir. Pourquoi en effet tant & de si gros vaisseaux qui aboutissent principalement à ces pierres monstrueuses, qui les pénétrent, & en sortent divisés en trois ou quatre ramifications, s'ils ne servoient en rien à leur accroissement?

Pourquoi ce nombre prodigieux de petits vaisseaux qui forment des rayons autour de ces pierres, sinon pour charrier la liqueur de quelques sécrétions?

Enfin si ces pierres étoient formées par incrustations, pourquoi n'apperceverions-nous pas ces lames qui en font le caractere?

Pour établir encore plus la différence entre nos pierres & les minérales, nous pourrions dire que celles-ci brûlent au feu, & se dissolvent pour la plûpart par l'ébullition, ce qui n'arrive pas ordinairement aux pierres minérales.

Il paroît donc probable que les pierres de nos Poires sont des corps organisés.

Il reste encore deux questions aussi curieuses & aussi embarrassantes l'une que l'autre : comment ces pierres ont-elles été formées, & pourquoi l'ont-elles été?

Nous avons remarqué que les Poires, immédiatement après être noüées, n'avoient point de pierres, que peu de temps après elles en étoient toutes remplies, & qu'enfin, lorſqu'elles étoient groſſes & approchantes de leur maturité, ces pierres diſparoiſſoient preſque entiérement. Ces circonſtances rendent la premiére queſtion embarraſſante ; car enfin d'où viennent-elles, quand elles commencent à paroître ? & que deviennent-elles, quand on ne les apperçoit plus ? D'un autre côté les uſages deviennent ainſi compliqués pluſieurs enſemble ; car eſt-il probable qu'un corps qui change ſi viſiblement de conſiſtance & de nature, produiſe conſtamment les mêmes effets.

Pour eſſayer de ſatisfaire à l'une & à l'autre queſtion, je commence à éxaminer les pierres dès leur origine, dans le temps qu'elles n'ont pas encore cette ſolidité qui les rend ſi ſenſibles & ſi aiſées à découvrir, lorſqu'on ne les diſtingue encore que parce qu'elles ſont d'une ſubſtance plus ſerrée que le reſte de la Poire, en un mot telles qu'elles paroiſſoient dans les fruits nouvellement noüés. Que ſont-elles alors ? pour moi je les regarde comme des pelotons de vaiſſeaux ou des glandes ; leur figure & leur tiſſu ſemblent en être des caracteres bien marqués, auſſi-bien que leur ſituation par rapport aux autres vaiſſeaux : mais de plus les différentes liqueurs qui doivent ſervir à la formation de l'amande n'en ſuppoſent-elles pas, puiſque la préparation des liqueurs eſt du reſſort des glandes ? J'ajoûterai encore, ſi l'on peut ſe ſervir de comparaiſon, que la matrice des Animaux en eſt toute tapiſſée intérieurement.

Ces petits grains, dans le temps qu'ils ſont mols, ſont donc des glandes qui doivent préparer quelques liqueurs dans leſquelles par conſéquent les ſucs du Poirier doivent circuler.

Or ces ſucs ſont viſqueux & très-tartareux, & les vaiſſeaux dans leſquels ils doivent circuler, ſont d'une fineſſe extrême & fort repliés, ce qui me fait ſoupçonner qu'un ſédiment analogue au Tartre, s'attache peu-à-peu aux parois intérieurs de ces petits vaiſſeaux, en diminüe le diametre, & commence

à leur donner cette ſolidité que nous remarquons dans les jeunes fruits. Pour lors les liqueurs, qui ne peuvent paſſer en ſi grande abondance, refluent en quelque maniére ſur elles-mêmes, dilatent les vaiſſeaux, & ſe forment de nouvelles routes par des vaiſſeaux latéraux qu'elles dilatent auſſi, leur donne plus de volume en longueur & en diametre, ce qui les rend plus aiſés à appercevoir, & augmente conſidérablement la groſſeur du fruit.

J'ai dit encore que lorſque les Poires approchoient de leur maturité, les pierres devenoient preſque inſenſibles, quoiqu'elles fuſſent en auſſi grand nombre, auſſi groſſes & plus dures : la cauſe en eſt la même.

L'obſtruction * produit le reflux des liqueurs dans les vaiſſeaux, le reflux augmente le volume des vaiſſeaux : par l'augmentation du volume des vaiſſeaux, les pierres ſe trouvent plus écartées les unes des autres, ce qui fait qu'elles ſont moins ſenſibles, quoique par le progrès de cette obſtruction elles ſe ſoient conſidérablement endurcies.

Toutes les pierres n'acquiérent cependant pas la même dureté, car on en trouve qui ſont très-dures, d'autres qui ne le ſont que médiocrement, pendant que quelques-unes ſont tout-à-fait molles, comme dans les fruits nouvellement noüés. C'eſt de ce plus ou moins de pierres endurcies que vient la différence des Poires pierreuſes d'avec celles qui ne le ſont pas, & le plus ou moins de pierres endurcies dépend peut-être du plus ou moins de Tartre qui eſt charrié avec les liqueurs, comme le prouvent les obſervations ſuivantes.

Premiérement, les pierres conſidérablement endurcies ſont en plus grand nombre dans les Poires caſſantes que dans les fondantes, parce que le Tartre y eſt diſſous dans moins de fluide, & par conſéquent s'arrête plus aiſément dans les petits vaiſſeaux qui formoient les glandes.

* Il ne faut pas prendre le terme d'*obſtruction*, comme on le prend ordinairement, pour exprimer un effet contre nature, ou, ce qui eſt la même choſe, une maladie, car je ne lui fais ſignifier autre choſe que la diminution du diametre des vaiſſeaux, telle qu'elle arrive dans les os, lorſqu'ils s'endurciſſent.

2.° C'eſt pour cette même raiſon que les fruits dans les terrains ſecs ſont plus pierreux que dans d'autres.

3.° Les coups de grêle peuvent occaſionner en quelques endroits une groſſe pierre, parce que l'obſtruction étant une fois commencée, le Tartre s'y arrête plus aiſément.

4.° Les Poires d'Eté ſont moins ſujettes à avoir des pierres que celles d'Automne, parce que les liqueurs circulant avec plus de rapidité, le Tartre ne s'y dépoſe pas ſi aiſément.

J'ai conſidéré les pierres dans deux états; ſçavoir, lorſqu'elles ſont encore molles, & j'ai commencé à prouver qu'elles faiſoient alors la fonction de glandes.

Le ſecond état où je les ai conſidérées, c'eſt lorſqu'elles commencent à s'obſtruer, & j'ai dit qu'alors elles occaſionnoient un reflux qui ſervoit beaucoup à augmenter le volume des fruits. Lorſque je parlerai des vaiſſeaux, j'aurai occaſion de juſtifier les uſages que j'ai attribué à nos pierres dans l'un & l'autre état, mais on peut encore les conſidérer dans un troiſiéme, c'eſt-à-dire, lorſqu'elles ſont tout-à-fait obſtruées, car je crois qu'elles ne ſont pas alors tout-à-fait inutiles dans la Poire, & après avoir fait dans le jeune fruit l'office de glande, elles peuvent faire enſuite celui d'os, & ſervir de points d'appui aux fibres, qui ſans cela n'auroient point eu de ſoûtien à cauſe de leur longueur.

Par exemple, les fruits qui n'ont point ces ſortes de points d'appui, comme les Pêches, les Abricots & les Pommes, n'ont pas la ſolidité des Poires.

Dans les Poires même, celles qui n'ont qu'une petite quantité de pierres qui s'endurciſſent, comme les Poires fondantes, n'ont pas la ſolidité des autres, qu'on appelle à cauſe de cela les *Poires caſſantes*.

Encore une choſe qu'il eſt bon d'obſerver, c'eſt que dans le temps que l'arbre eſt le plus occupé à la formation du pépin, c'eſt-à-dire, lorſque le fruit noüe, & un peu après, les glandes ſont molles, & rempliſſent preſque tout le fruit, elles ne s'obſtrüent & ne durciſſent que peu-à-peu, de ſorte qu'elles n'ont

n'ont acquis leur parfaite ſolidité que lorſque le pépin eſt preſque parvenu à ſa groſſeur, & c'eſt alors que le fruit prend la ſienne.

Je ne prétends pas dire qu'il ne circule plus de liqueur dans les pierres, lorſqu'elles ont une fois acquis une certaine ſolidité ; il faut bien que les liqueurs circulent dans les os, qui ſont infiniment plus durs, puiſqu'ils croiſſent dans les jeunes gens, & ſe régénerent à tout âge à l'occaſion des fractures.

Nous nous ſervirons de cette circulation pour expliquer la formation de ces pierres monſtrueuſes, qui comme des eſpeces d'anquiloſes, ſont produites par une trop grande affluence de ce ſuc tartareux auquel nous attribuons la formation des pierres.

Il eſt naturel que les glandes que nous avons fait remarquer dans les différentes parties de la Poire, operent des ſécrétions particuliéres ſuivant les places qu'elles occupent dans le fruit ; par exemple, celles du tiſſu pierreux, la liqueur de la tranſpiration, celles de la ſubſtance pierreuſe, les liqueurs qui ſervent à la formation du pépin : mais nous avons crû plus à propos de remettre à en parler, lorſque nous éxaminerons les parties auxquelles elles ſont jointes le plus immédiatement.

DES E'CHANCRURES DU CALICE.

Le calice de la fleur du Poirier a dans la circonférence de ſon bord, cinq échancrures ou découpures, qui ſubſiſtent ordinairement autant que le fruit ; elles forment à l'extrémité de ſon axe, oppoſée à celle qui s'unit avec la queüe, une eſpece de couronne à l'antique, qui entoure & borde en quelque maniére la partie du fruit que nous avons appellée l'*ombilic*.

Par l'éxamen particulier que j'ai fait de ces eſpeces d'appendices, j'ai reconnu qu'elles ſont formées des trois téguments, dont l'anatomie a fait le ſujet du commencement de ce Mémoire, & c'eſt leur dépendance des enveloppes de nôtre fruit, qui m'a fait juger qu'il ſeroit à propos d'en faire la Pl. I. Fig. 1.

deſcription dans la partie même de mon Mémoire, où je me ſuis propoſé d'éxaminer les téguments.

Pl. II. Fig. 9. J'ai fait remarquer, en parlant des pierres, que la partie intérieure de la roche étoit formée par l'allongement du canal pierreux, qui s'épanoüit par ſon extrémité en maniére de trompe, c'eſt des bords de cet évaſement que partent les eſpeces d'apophyſes ou allongements pierreux, qui étant recouverts par une duplicature de l'épiderme & du corps muqueux, forment les appendices de l'ombilic, ou, ce qui eſt la même choſe, les échancrures du calice.

Si les pierres ſont l'office de glandes avant qu'elles ſoient endurcies, la grande quantité qu'on en trouve à l'ombilic de la Poire mûre, nous indique qu'il y avoit beaucoup de glandes en cet endroit, lorſque le fruit étoit encore fort jeune. En ſera-t-on ſurpris, ſi l'on fait attention que dans le temps de la fleur, c'eſt en cet endroit que toutes les étamines & les pétalles prenoient leur naiſſance, mais lorſqu'après le deſſéchement des étamines & des pétalles, ces glandes s'endurciſſent, devenuës alors des corps ſolides ou des eſpeces, d'où elles communiquent leur ſolidité aux appendices du calice; aſſés ſouvent même cet endurciſſement eſt ſi grand que le ſuc nourricier ne pouvant paſſer au corps muqueux, cette membrane devient comme caleuſe, & s'attache ſi fortement aux pierres & à l'épiderme, que ces trois téguments ne ſont qu'un corps qui devient coriace à peu-près comme des ongles.

J'ai encore remarqué que quelques-uns des pédicules des étamines s'endurciſſent quelquefois, & pour lors ils ſont beaucoup plus gros que dans le temps de la fleur, & reſtent attachés aux parois de l'ombilic juſqu'à l'entiére deſtruction du fruit.

DU TISSU FIBREUX DE LA PEAU.

Sous le tiſſu pierreux, on apperçoit une ſubſtance plus ferme que le reſte de la Poire, & dans laquelle les pierres ſont enchaſſées à peu-près de la même maniére que quelques Anatomiſtes ont prétendu que le ſont ſur le cuir, les glandes milliéres des Animaux.

Pour découvrir la ſtructure de cette ſubſtance, il faut après avoir levé l'épiderme, le corps muqueux & le tiſſu pierreux d'une Poire macerée, ſéringuer de l'eau ſur ſa ſuperficie, mais il faut que cette Poire nage dans l'eau, & en ſoit même couverte de deux à trois lignes, afin que les vaiſſeaux qu'on veut appercevoir ne s'affaiſſent pas les uns ſur les autres, & que ceux qu'on détruit ſe détachent & ſe dégagent plus aiſément d'entre les gros.

De cette maniére je l'ai reconnuë formée d'un laſſis d'aſſés gros vaiſſeaux qui s'anaſtomoſent fort ſouvent les uns avec les autres, & qui pour cette raiſon ne peuvent être détachés ni épanoüis comme ceux du reſte de la Poire, ce qui fait qu'on eſt obligé de détruire toute cette ſubſtance, lorſqu'on veut éxaminer les vaiſſeaux. Pl. I. Fig. 8.

Par cet éxamen, on reconnoît donc dans cette ſubſtance une ſtructure aſſés particuliére, pour être diſtinguée du reſte de la Poire : j'ai crû ne pouvoir mieux la comparer qu'au cuir des Animaux, ou, ce qui eſt la même choſe, à la peau proprement dite, ou encore au tiſſu fibreux de la peau, parce que cette enveloppe dans les Animaux, comme dans nôtre fruit, eſt un laſſis & un entrelaſſement très-ſerré de vaiſſeaux.

Il y a cependant cette différence, que la pierre n'ayant pas, à beaucoup près, tant d'eſpeces de vaiſſeaux que les Animaux, ſon tiſſu fibreux & ſon cuir ne peuvent être ni ſi forts, ni ſi diſtincts.

J'aurois encore pluſieurs choſes à faire remarquer ſur la ſtructure de ce tégument, mais c'eſt un détail dans lequel on ne peut bien entrer, ſans avoir donné une idée des vaiſſeaux; c'eſt pourquoi il ſuffit pour le preſent d'avoir caractériſé cette quatriéme & derniére enveloppe que j'ai appellée le *tiſſu fibreux de la peau* de la Poire.

Il eſt bon, avant de terminer cette premiére Partie, d'obſerver encore que les quatre téguments dont nous avons donné la deſcription, compoſent la peau de la Poire de telle ſorte, que par ſa partie, que nous avons appellée l'*épiderme*,

elle met le fruit à couvert de plusieurs accidents auxquels sans cela il seroit exposé.

Par son corps muqueux & son tissu pierreux ou glanduleux elle opere la transpiration, qui est une des principales opérations de la peau.

Enfin par cet entrelassement de vaisseaux que nous avons appellé son *tissu fibreux*, elle peut retenir le fruit dans les bornes de sa crûë, & c'est peut-être lorsque ce tissu est attaqué de quelques maladies d'un côté, qu'en ne prenant sa nourriture que du côté opposé il devient contrefait.

REMARQUE.

M.[rs] Malpighi, Grew, Leuvenock & Ruich, ces illustres Observateurs, ont travaillé sur l'anatomie de la Poire, & leurs recherches m'ont été d'une grande utilité.

Je voudrois qu'il me fût possible de rendre justice à leurs découvertes dans le corps de mon Mémoire; mais comment (dans un Mémoire qui ne peut avoir qu'une certaine étendüe, pour être inséré dans ceux de l'Académie) entreprendre de faire, pour ainsi dire, la concorde de ces quatre grands observateurs, ou même la critique des uns par les observations des autres? La chose m'a paru impossible, c'est pourquoi je me suis contenté de les citer dans les principaux endroits, en mettant par renvoi au bas des pages le nom de celui de ces Auteurs qui m'a paru avoir le mieux observé la partie dont il s'agira dans chaque article, sans cependant prétendre indiquer par-là qu'il y ait une conformité parfaite entre ce qu'a observé l'Auteur cité, & ce que je rapporte dans mon Mémoire; il pourroit bien cependant m'échapper quelques endroits remarquables des Observations de M. Grew, parce que comme son Ouvrage est écrit en Anglois, je n'ai pû avoir qu'une legére idée de ce qui est contenu dans son Livre *in-folio*.

EXPLICATION DES FIGURES.

PREMIÉRE PLANCHE.

Figure 1re. La Poire en entier, où l'on peut remarquer,

a, ſa queüe, ou ſon pédicule.

b, ſon corps.

c, ſa tête, ou ſon nombril, ou ſon œil.

Fig. 2. Un petit morceau de Poire où l'on voit

a, des petites élevures d'épiderme groſſies au Microſcope.

Fig. 3. Un petit morceau de la pelure d'une Poire, pour faire voir les inégalités qu'on apperçoit ſur la ſuperficie de la plûpart des Poires, quand on les éxamine avec la Loupe.

Fig. 4. Un morceau d'épiderme vû au Microſcope, où l'on apperçoit de deux eſpeces de trous pour laiſſer paſſer la tranſpiration; les uns plus grands, qui font comme un réſeau, & les autres plus fins, qui font comme un fond de ſable.

Fig. 5. Le corps muqueux vû au Microſcope, où l'on apperçoit,

a, les mêmes trous qu'à l'épiderme, mais moins apparents.

b, quelques glandes du tiſſu pierreux.

Fig. 6. Le tiſſu pierreux ou glanduleux qui eſt ſous le corps muqueux.

Fig. 7. Le même tiſſu pierreux vû au Microſcope, où l'on peut remarquer de gros vaiſſeaux qui vont répondre à quelques-unes de ces pierres, ou qui paſſent des unes aux autres.

Fig. 8. Une Poire dépoüillée de toutes les membranes dont je viens de parler, & ſur laquelle on peut remarquer,

a, les gros vaiſſeaux qui vont rendre au tiſſu pierreux.

b, l'entrelaſſement des vaiſſeaux que j'ai appellé le *tiſſu fibreux de la peau.*

c, un tuyau ou une ſéringue qui eſt néceſſaire pour découvrir cet entrelaſſement.

SECONDE PLANCHE.

Figure 1[re]. Une Poire coupée ſuivant ſa longueur, où l'on peut remarquer,

a, les téguments dont je viens de parler.
b, la roche.
c, les piſtils deſſéchés.
d, le canal pierreux.
e, la gaîne pierreuſe.
f, la ſubſtance pierreuſe.
g, les loges des pépins.
h, un pépin dans ſa loge.
i, l'inſertion de la queüe au corps de la Poire.
l, le pédicule de la Poire.
m, une cavité qui eſt entre les loges des pépins.

Fig. 2. Une Poire coupée de travers dans laquelle on voit,

a, les téguments.
b, la ſubſtance pierreuſe.
c, la coupe de pluſieurs gros vaiſſeaux, qui ſont aſſés ſouvent au nombre de dix, & quelquefois on n'en apperçoit que cinq, mais dans l'un & l'autre cas ils vont ſe rendre à la roche.
d, les loges des pépins où il y en a deux dans chaque loge.
e, la cavité qui eſt entre les loges des pépins, & qui eſt fort grande dans quelques eſpeces, & très-petite dans d'autres.
f, une ſubſtance particuliére qui eſt entre les loges des pépins.

Fig. 3. La ſubſtance pierreuſe ſéparée de toutes les autres parties, & dans laquelle les pépins ſont renfermés.

Fig. 4. La roche vûë à la Loupe.

a, la partie de la roche qui eſt formée du tiſſu pierreux.
b, un ſtilet qui eſt paſſé dans l'ouverture par où les piſtils doivent paſſer.
c, l'inſertion d'un des dix gros vaiſſeaux à la roche.

d, d'autres vaiſſeaux plus petits qui partent de la roche pour ſe diſtribüer dans la ſubſtance charnüe de la Poire.

e, la portion interne de la roche, qui eſt ſormée par un épanoüiſſement du canal pierreux.

Fig. 5. La même roche, pour faire voir qu'elle reſſemble aſſés bien à un cone tronqué *a, b, c.*

Fig. 6. Une pierre de la ſubſtance pierreuſe, vûë au Microſcope avec les vaiſſeaux qui l'accompagnent.

a, les vaiſſeaux capillaires.

b, les gros vaiſſeaux.

Fig. 7. Une pierre pareille, tirée d'un jeune fruit, vûë au Microſcope.

a, les vaiſſeaux qui ſont fort courts.

b, la pierre, qui n'eſt pas encore bien endurcie.

Fig. 8. Le canal pierreux, qui eſt quelquefois tout d'une piéce.

a, ce canal.

b, un ſtilet qui paſſe dans l'ouverture par laquelle les piſtils doivent paſſer.

Fig. 9. La continuation de ce canal, qui fait la portion interne de la roche.

a, le noyau de la roche.

b, un des piſtils deſſéché qui paſſe au travers.

Fig. 10. Le même noyau coupé ſuivant ſa longueur, pour faire voir

a, les piſtils deſſéchés qui le traverſent.

Fig. 11. Une groſſe pierre du canal pierreux vûë au Microſcope.

a, des vaiſſeaux devenus pierreux, & qui joignent enſemble les différentes pierres *b, b, b, b.*



OBSERVATION ANATOMIQUE SUR UNE ALTÉRATION SINGULIÉRE DU CRISTALLIN ET DE L'HUMEUR VITRÉE.

Par M. MORAND.

UN Homme de quarante ans, mort à l'Hôpital de la Charité le 31 Juillet de la preſente année, d'une Hidropiſie aſcite, avoit à l'Oeil gauche une Cataracte jaune, qui paroiſſoit vieille, & faiſoit une grande difformité; je fus curieux d'éxaminer cet Oeil, dans lequel je croyois trouver un Criſtallin opaque, comme dans les Cataractes ordinaires; mais lorſqu'il fut détaché de l'orbite & diſſéqué éxactement, j'y trouvai pluſieurs choſes ſi ſinguliéres, qu'elles me parurent mériter la deſcription que j'en donne.

Cet Oeil détaché de l'orbite, & dépoüillé des muſcles & des graiſſes qui l'environnent *(Fig. A)* n'étoit point de la forme ordinaire ; vû pardevant, il étoit plus quarré que rond; il avoit ſur ſa ſurface quatre enfoncements ou ſillons paralleles au plan des quatre muſcles droits. Comme tout le globe étoit maigre & atrophié, je jugeai que la contraction de ces muſcles avoit fait ces enfoncements, faute de réſiſtance de la part des parties intérieures de l'Oeil. Au travers de la Cornée tranſparente, l'Iris paroiſſoit plus large en haut qu'en bas, & l'ouverture de la Prunelle preſque réguliérement quarrée.

Après l'éxamen ſuperficiel de cet Oeil, je fis une coupe circulaire du globe, à deux lignes au de-là du rebord de la Cornée tranſparente, pour partager tout l'Oeil en deux hémiſpheres, dont l'antérieure ſeroit plus petite. La Sclérotique & la Choroïde étant entamées par cette coupe, je fus ſurpris de voir qu'il ne s'écoulat ni humeur aqueuſe, ni rien qui pût reſſembler à quelque portion de l'Humeur vitrée ; je fis de tout

tout le globe de l'Oeil deux piéces *(Fig. B. C.)* la piéce *B* me donna la face postérieure de l'Iris & du Cristallin ; le Cristallin étoit d'une couleur blanche tirant sur le jaune, & de la consistance de la pierre la plus dure.

Il me parut plus ovale que rond *(Fig. D.)* A une partie de son bord supérieur, il étoit comme usé en quelques endroits; ayant essayé de l'ôter de sa place, je le trouvai retenu à sa partie inferieure par la membrane cristalline qui étoit transparente, & qui adhéroit à l'Iris dans presque toute sa circonférence *(Fig. E.)* je détachai le Cristallin de cette membrane pour voir sa face antérieure *(Fig. F.)* sur laquelle étoit une pellicule membraneuse & opaque que j'enlevai aisément.

Cette pellicule recouvroit une petite cavité *(Fig. G.)* située horisontalement, eu égard à la position de l'Oeil dans l'Orbite, & creusée dans l'épaisseur du Cristallin même ; à cette face antérieure le Cristallin étoit plus plat qu'à la postérieure.

La coupe de l'hémisphere postérieure *(Fig. C.)* montroit le chaton de l'Humeur vitrée bien marqué & parfaitement proportionné au Cristallin qui tenoit à l'autre coupe ; mais au lieu de l'Humeur vitrée qui auroit dû remplir cet hémisphere, je vis d'abord une substance gélatineuse, de couleur cendrée, d'une consistance assés ferme, dont la couche étoit épaisse de demi-ligne, & cette matiére *(Fig. L.)* composoit le chaton qui recevoit le Cristallin pierreux. Le chaton étoit entouré des fibres ciliaires, mais fort irréguliérement arrangées *(Fig. C.)* Cette matiére gélatineuse, qui étoit apparemment un reste d'Humeur vitrée, étoit enveloppée d'une membrane très-déliée, & recouvroit un petit Os dont le fond du globe étoit rempli, laissant cependant entre ce petit Os & la Sclérotique un espace auquel il est vrai-semblable d'attribuer la facilité que les muscles droits ont eû de faire sur le globe les quatre dépressions paralleles à leur plan; la Sclérotique, beaucoup plus épaisse & plus dure que dans l'état naturel, étoit intérieurement revêtüe de la Choroïde à l'ordinaire.

L'Os qui tenoit la place de l'Humeur vitrée, avoit du côté du Nerf optique la forme d'un culot moulé dans le fond

du globe *(Fig. H.)* En tenant l'Oeil par le Nerf optique, ce culot étoit suspendu par un petit cordon mollasse que formoit la Rétine avant son épanoüissement, & par une coupe de la Sclérotique on voyoit bien que ce cordon venoit du Nerf optique *(Fig. I.)* Du côté le plus large, & qui regarde le Cristallin, ce petit Os étoit creusé & recouvert de la matiére gélatineuse qui formoit le chaton du Cristallin.

La *Fig. M* représente cette cavité, qui en quelques endroits étoit revêtüe de quelques portions de la Rétine. La *Fig. N* montre la face postérieure du culot, où l'on voit le trou rond dont il étoit percé pour le passage de la Rétine. A une des faces de côté il y avoit un autre trou *(Fig. O.)* par où ressortoient quelques filets de la Rétine, qui s'attachoient à la Choroïde. Ce petit Os est plus épais dans quelques endroits que dans d'autres, & composé de fibres absolument osseuses, dont le tissu est irrégulier, & qu'on a tâché de rendre sensible dans les trois Figures *M. N. O.*

Cette altération du Cristallin & de l'Humeur vitrée étant digne de remarque, j'ai fait tout ce que j'ai pû pour en découvrir la cause, & par les perquisitions que j'ai faites, j'ai appris que le Sujet incommodé étoit borgne depuis plus de vingt ans ; qu'à l'âge d'environ quinze ans il avoit eu sur cet Oeil une fluxion violente, à la suite de laquelle s'étoit formée une Cataracte jaune, & que plusieurs Oculistes lui ayant offert d'en faire l'opération, il n'avoit jamais voulu la souffrir. Un Oculiste, qui au lieu des parties molles & presque fluides, telle que l'Humeur vitrée, auroit rencontré un Os avec son Aiguille, auroit été bien déconcerté. Il ne sera peut-être pas inutile à ceux qui se mêlent de l'opération de la Cataracte, de connoître cet éxemple, quoique rare & peut-être le seul, d'une Ossification dans le globe de l'Oeil.

METHODE

Pour déterminer le ſort de tant de Joüeurs que l'on voudra, & l'avantage que les uns ont ſur les autres, lorſqu'ils joüent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé.

Par M. NICOLE.

DANS le Mémoire que je lûs, il y a quelques jours, j'ai déterminé le ſort de deux Joüeurs, & l'avantage de l'un ſur l'autre, pour tel nombre de parties que ce ſoit. Je me ſuis ſervi dans ce Mémoire de la méthode analytique, & en parcourant toutes les Equations que la nature des différentes queſtions fournit, j'ai fait voir de quelle maniére elles conduiſent à la ſolution de chaque cas. La comparaiſon des grandeurs réſultantes de chaque ſolution de ces différents cas, fait enſuite découvrir la loi ſelon laquelle ces grandeurs croiſſent, & donne la ſolution générale pour un nombre de parties quelconque. 29 Mars 1730.

Dans le Mémoire que je donne aujourd'hui, je me ſers auſſi d'abord de la même méthode analytique, mais les différents cas que l'on eſt obligé d'examiner, devenant bien-tôt fort compoſés, & par-là le nombre des Equations dont il faut faire uſage, devenant très-grand, j'abandonne cette méthode, qui n'a donné la ſolution que de quelques cas particuliers, & en donne une autre beaucoup plus ſimple, & qui ſatisfait à tous les cas poſſibles que l'on peut propoſer ſur cette matiére. Cette nouvelle maniére de proceder, fournit encore une autre utilité, c'eſt une méthode générale pour élever un Multinôme compoſé de tant de parties que l'on voudra, à une puiſſance quelconque, beaucoup plus ſimple, & qui demande conſidérablement moins de calcul que les méthodes ordinaires.

PROBLEME I.

Trois Joüeurs, dont les forces sont entr'elles, comme les grandeurs p, q, m, *joüent ou parient à qui gagnera le plus de fois en un nombre déterminé de parties. On demande le sort de chacun de ces Joüeurs, & l'avantage du Joüeur le plus fort sur chacun des autres.*

SOLUTION.

Si l'on nomme a l'argent qui est au jeu, ou la mise des trois Joüeurs, & si l'on suppose qu'ils joüent en une partie, le sort du 1.er Joüeur sera $\frac{\overset{1.0.0}{p\times a}+\overset{0.1.0}{q\times 0}+\overset{0.0.1}{m\times 0}}{p+q+m}=\frac{ap}{p+q+m}$.

Celui du second. . . . . $\frac{aq}{p+q+m}$.

Celui du troisiéme. . . . . $\frac{am}{p+q+m}$.

Où il faut remarquer que les nombres 1.0.0, 0.1.0 & 0.0.1 qui sont écrits au-dessus de chaque terme de la quantité qui exprime le sort du premier Joüeur, indiquent le nombre de parties que chaque Joüeur a gagné; par éxemple, 1.0.0 exprime que le premier Joüeur a gagné une partie, & les deux autres n'en gagnent point, ce qui doit être entendu pour la suite de ce Mémoire; 3.2.1 exprimera de même que le premier Joüeur a gagné 3 parties, le second 2 parties, & le troisiéme une partie.

Les inconnuës f, x, y, z, t, r, &c. expriment ici le sort du premier Joüeur, dans les différents états indiqués par les nombres dont on vient de parler, ou, ce qui est la même chose, la partie de l'argent qui est au jeu, laquelle appartient à ce Joüeur relativement à chaque état.

Si l'on joüe en deux parties

Le sort du 1.er est $f=\frac{\overset{1.0.0}{p\times x}+\overset{0.1.0}{q\times y}+\overset{0.0.1}{m\times z}}{p+q+m}$; pour déterminer la valeur de f, on a $x=\frac{\overset{2.0.0}{p\times a}+\overset{1.1.0}{q\times\frac{1}{2}a}+\overset{1.0.1}{m\times\frac{1}{2}a}}{p+q+m}=\frac{ap+\frac{1}{2}aq+\frac{1}{2}am}{p+q+m}$,

$$y = \frac{\overset{1.1.0}{p \times \tfrac{1}{2}a} + \overset{0.2.0}{q \times 0} + \overset{0.1.1}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{\tfrac{1}{2}ap}{p+q+m}, \ \& \ z = \frac{\overset{1.0.1}{p \times \tfrac{1}{2}a} + \overset{0.1.1}{q \times 0} + \overset{0.0.2}{m \times 0}}{p+q+m}$$

$= \frac{\tfrac{1}{2}ap}{p+q+m}$. D'où l'on tire $s = \frac{app + \tfrac{1}{2}apq + \tfrac{1}{2}apm + \tfrac{1}{2}apq + \tfrac{1}{2}apm}{\overline{p+q+m}^2}$

$= \frac{app + apq + apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Le sort du second est donc .... $\frac{aqq + apq + aqm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Et celui du troisiéme est .... $\frac{amm + amq + apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

Lesquels sont entr'eux comme pa, qa, ma.

Si l'on joüe en trois parties

Le sort du 1.er est $s = \frac{\overset{1.0.0}{p \times a} + \overset{0.1.0}{q \times y} + \overset{0.0.1}{m \times z}}{p+q+m}$; pour déterminer s,

on a $x = \frac{\overset{2.0.0}{p \times a} + \overset{1.1.0}{q \times u} + \overset{1.0.1}{m \times t}}{p+q+m}$, $u = \frac{\overset{2.1.0}{p \times a} + \overset{1.2.0}{q \times 0} + \overset{1.1.1}{m \times \tfrac{1}{3}a}}{p+q+m} = \frac{ap + \tfrac{1}{3}am}{p+q+m}$

& $t = \frac{\overset{2.0.1}{p \times a} + \overset{1.1.1}{q \times \tfrac{1}{3}a} + \overset{1.0.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{ap + \tfrac{1}{3}aq}{p+q+m}$, donc $x =$

$\frac{app + 2apq + 2apm + \tfrac{2}{3}aqm}{\overline{p+q+m}^2}$. On a aussi $y = \frac{p \times \overset{1.1.0}{\overline{\tfrac{ap + \frac{1}{3}am}{p+q+m}}} + \overset{0.2.0}{q \times 0} + \overset{0.1.1}{m \times r}}{p+q+m}$,

$r = \frac{\overset{1.1.1}{p \times \tfrac{1}{3}a} + \overset{0.2.1}{q \times 0} + \overset{0.1.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{\tfrac{1}{3}ap}{p+q+m}$, donc $y = \frac{app + \tfrac{2}{3}apm}{\overline{p+q+m}^2}$.

On trouvera aussi $z = \frac{p \times \overset{1.0.1}{\overline{\tfrac{ap + \frac{1}{3}aq}{p+q+m}}} + \overset{0.1.1}{\tfrac{q \times \frac{1}{3}ap}{p+q+m}} + \overset{0.0.2}{m \times 0}}{p+q+m}$

$= \frac{app + \tfrac{2}{3}apq}{\overline{p+q+m}^2}$. Si donc on substitüe pour x, y & z, les valeurs que l'on vient de trouver, on aura la valeur de s

pour le sort du 1.er Joüeur... $\frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

pour celui du second....... $\frac{aq^3 + 3aqqp + 3aqqm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

pour celui du troisiéme..... $\frac{am^3 + 3ammq + 3ammp + 2apqm}{\overline{p+q+m}^3}$

Si l'on joüe en quatre parties

Le ſort du 1.er Joüeur ſera $ſ = \frac{\overset{1.0.0}{p \times x} + \overset{0.1.0}{q \times y} + \overset{0.0.1}{m \times z}}{p+q+m}$; pour déterminer $ſ$, on aura toutes les Equations ſuivantes, $x = \frac{\overset{2.0.0}{p \times u} + \overset{1.1.0}{q \times t} + \overset{1.0.1}{m \times r}}{p+q+m}$, $u = \frac{\overset{3.0.0}{p \times a} + \overset{2.1.0}{q \times k} + \overset{2.0.1}{m \times l}}{p+q+m}$, $k = \frac{\overset{3.1.0}{p \times a} + \overset{2.2.0}{q \times \frac{1}{2}a} + \overset{2.1.1}{m \times a}}{p+q+m} = \frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m}$, $l = \frac{\overset{3.0.1}{p \times a} + \overset{2.1.1}{q \times a} + \overset{2.0.2}{m \times \frac{1}{2}a}}{p+q+m}$.

Donc $u = \frac{app + 2apq + 2apm + 2aqm + \frac{1}{2}aqq + \frac{1}{2}amm}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$,

$$t = \frac{\overset{2.1.0}{p \times \overline{\frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m}}} + \overset{1.2.0}{q \times g} + \overset{1.1.1}{m \times h}}{p+q+m},\ g = \frac{\overset{2.2.0}{p \times \frac{1}{2}a} + \overset{1.3.0}{q \times 0} + \overset{1.2.1}{m \times 0}}{p+q+m}$$

$= \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$, $h = \frac{\overset{2.1.1}{p \times a} + \overset{1.2.1}{q \times 0} + \overset{1.1.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{ap}{p+q+m}$, donc

$t = \frac{app + apq + 2apm}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$, $r = \frac{\overset{2.0.1}{p \times \overline{ap + aq + \frac{1}{2}am}} + \overset{1.1.1}{q \times ap}}{\overline{p+q+m}^{\,2}} + \frac{\overset{1.0.2}{m \times f}}{p+q+m}$, $f = \frac{\overset{2.0.2}{p \times \frac{1}{2}a} + \overset{1.1.2}{q \times 0} + \overset{1.0.3}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$, donc $r = \frac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$ & $x = \frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 6apqm + \frac{1}{2}apqq + \frac{1}{2}apmm}{\overline{p+q+m}^{\,3}}$.

Pour déterminer y, on a ces Equations .... $y =$

$$\frac{\overset{1.1.0}{p \times \frac{\overline{app + apq + 2apm}}{\overline{p+q+m}^{\,2}}} + \overset{0.2.0}{q \times d} + \overset{0.1.1}{m \times e}}{p+q+m},\ d = \frac{\overset{1.2.0}{p \times \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}} + \overset{0.3.0}{q \times 0} + \overset{0.2.1}{m \times 0}}{p+q+m}$$

$= \frac{\frac{1}{2}app}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$, $e = \frac{\overset{1.1.1}{p \times \frac{ap}{p+q+m}} + \overset{0.2.1}{q \times 0} + \overset{0.1.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{app}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$;

donc $y = \frac{ap^3 + \frac{3}{2}appq + 3appm}{\overline{p+q+m}^{\,3}}$, & pour déterminer z, on a

$$z = \frac{\overset{1.0.1}{p \times \frac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{\,2}}} + \overset{0.1.1}{q \times \frac{app}{\overline{p+q+m}^{\,2}}} + \overset{0.0.2}{m \times b}}{p+q+m};$$

$z = \frac{p \times \overset{1.0.2}{X} + q \times \overset{0.1.2}{0} + m \times \overset{0.0.3}{0}}{p+q+m}$, $X = \frac{p \times \overset{2.0.2}{\frac{1}{2}a} + q \times \overset{1.1.2}{0} + m \times \overset{1.0.3}{0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$, donc $b = \frac{\frac{1}{2}app}{(p+q+m)^2}$, & $z = \frac{ap^3 + 3appq + \frac{3}{2}appm}{(p+q+m)^3}$. Si donc on ſubſtitüe pour x, y & z leurs valeurs, on aura $ſ$, ou le ſort du 1.er Joüeur $= \frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 12appqm + 3appqq + 3appmm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 2.d ... $\frac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 12aqqpm + 3appqq + 3aqqmm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 3.me ... $\frac{am^4 + 4am^3p + 4am^3q + 12ammpq + 3appmm + 3aqqmm}{(p+q+m)^4}$.

Lorſque l'on joüe en une partie

Le ſort du 1.er Joüeur eſt .... $\frac{ap}{p+q+m}$.

Celui du 2.d .... $\frac{aq}{p+q+m}$.

Celui du 3.me .... $\frac{am}{p+q+m}$.

Lorſque l'on joüe en deux parties

Le ſort du 1.er eſt .... $\frac{app + apq + apm}{(p+q+m)^2}$.

Celui du 2.d .... $\frac{aqq + apq + aqm}{(p+q+m)^2}$.

Celui du 3.me .... $\frac{amm + apm + aqm}{(p+q+m)^2}$.

Lorſque l'on joüe en trois parties

Le ſort du 1.er eſt ...... $\frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Celui du 2.d .... $\frac{aq^3 + 3apqq + 3aqqm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Celui du 3.me .... $\frac{am^3 + 3apmm + 3aqmm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Lorſque l'on joüe en quatre parties

Le ſort du 1.er eſt $\frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 3appq^2 + 3appm^2 + 12appqm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 2.d ... $\frac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 3appqq + 3aqqm^2 + 12apqqm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 3.me ... $\frac{am^4 + 4apm^3 + 4aqm^3 + 3appmm + 3aqqm^2 + 12apqm^2}{(p+q+m)^4}$.

Si $p = 6$, $q = 5$, $m = 4$, les ſorts ſeront

pour une partie	6.	5.	4.
pour deux.	90.	75.	60.
ou	6.	5.	4.
pour trois.	1428.	1115.	832.
pour quatre.	22100.	16981.	11754.

REMARQUE.

Si l'on vouloit rechercher le ſort de ces trois Joüeurs, pour 5, 6, 7, 8, &c. parties, le nombre des Équations qu'il faudroit parcourir par cette méthode deviendroit fort conſidérable ; il en faudroit parcourir encore un bien plus grand nombre, ſi au lieu de trois Joüeurs, on en ſuppoſoit quatre, cinq, ſix, &c. car ces Équations exprimant les différents évenements qui peuvent arriver dans le cours du Jeu, le nombre de ces évenements ſera d'autant plus grand, qu'il y aura un plus grand nombre de Joüeurs, & qu'ils joüeront en un plus grand nombre de parties. Dans tous ces cas compoſés, la voye des Équations eſt trop longue & trop pénible. Voici une méthode qui ſatisfait à tous les cas, quel que ſoit le nombre des Joüeurs, & quel que ſoit le nombre de parties que l'on doive joüer.

PROBLEME II.

Soit, par exemple, quatre Joüeurs, dont les forces ſoient exprimées par les grandeurs p, q, m, r. *On demande le ſort de chacun de ces Joüeurs, & l'avantage des uns ſur les autres, lorſqu'ils conviennent de joüer en huit parties ; il ſuffit pour gagner le fond du Jeu, de gagner une partie au moins de ces huit plus qu'aucun des autres Joüeurs.*

SOLUTION.

On ſçait que $\frac{p}{p+q+m+r}$ exprime la probabilité que le premier Joüeur a de gagner la 1.re partie, que $\frac{pp}{\overline{p+q+m+r}^2}$ exprime celle qu'il a de gagner les deux premiéres, & enfin

p^8

$\frac{p^8}{\overline{p+q+m+r}^8}$ exprime la probabilité qu'il a de gagner les huit parties. Si on ajoûte à cette quantité la probabilité que le même Joüeur a de gagner ſept de ces parties, un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant une.

Que l'on ajoûte encore à ces deux quantités, la probabilité que ce même Joüeur a de gagner ſix parties, l'un des trois autres Joüeurs en gagnant deux, ou deux de ces trois Joüeurs en gagnant chacun une.

Qu'à cette ſomme on ajoûte encore la probabilité que le même Joüeur a de gagner cinq parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, ou deux, ou une.

Puis la probabilité que le même Joüeur a d'en gagner quatre, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant quatre, trois, deux ou une.

Et enfin que l'on ajoûte encore la probabilité que ce même Joüeur a de gagner trois parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, deux ou une, & celle que ce même Joüeur a de gagner deux parties, chacun des trois autres Joüeurs en gagnant deux.

Il eſt clair que la ſomme formée par l'addition de toutes ces parties, exprimera le ſort de ce 1.er Joüeur, ou le droit qu'il a à l'argent qui eſt au Jeu : car cette ſomme eſt formée de toutes les maniéres poſſibles que ce Joüeur a de gagner, ou tout ce qui eſt au Jeu, lorſqu'il gagne une partie de plus qu'aucun des autres Joüeurs, ou la moitié de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'un autre Joüeur gagne autant de parties que lui, ou enfin le tiers ou le quart de ce qui eſt au Jeu, lorſque deux ou trois des autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui.

Or, il eſt évident que les nombres qui expriment combien il y a de maniéres de prendre huit choſes, 8 à 8, 7 à 7, 6 à 6, 5 à 5, 4 à 4, 3 à 3, & 2 à 2, expriment auſſi le nombre des maniéres que ce Joüeur a de gagner huit parties, ou ſept, ſix, cinq, quatre, trois, deux.

Or, tout le monde ſçait que la ſeptiéme bande perpendiculaire du Triangle arithmétique de M. Paſcal fournit tous ces

nombres, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. Il ne reſte plus qu'à multiplier ces nombres par ceux qui expriment toutes les variétés qui peuvent arriver aux trois autres Joüeurs, pour le nombre des parties qu'ils peuvent gagner, relativement à chaque cas du premier Joüeur, & qui multiplient chacun de ces cas. Si donc on nomme a l'argent qui eſt au Jeu,

1.° On aura $\frac{1\times p^8\times a}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur gagne les huit parties, $\frac{8\times p^7\times \overline{q+m+r}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour qu'il gagne ſept parties, chacun des autres Joüeurs en gagnant une; car il eſt clair que chacun des autres Joüeurs en peut gagner une en huit maniéres, ſçavoir, ou la 1re partie, ou la 2me, 3me, 4me.... 8me.

2.° On aura $\frac{28\,p^6\times \overline{qq+mm+rr}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur en gagnant ſix, l'un des autres en gagnent deux, car 28 exprime toutes les maniéres de gagner ſix parties de huit, & ſur chacune de ces maniéres, chacun des autres Joüeurs peut gagner les deux autres parties.

3.° On aura $\frac{28\,p^6\times 2\times \overline{qm+qr+mr}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur en gagnant ſix, deux des trois autres Joüeurs en gagnent chacun une; car il eſt clair que ces deux autres peuvent être le 2me & le 3me, le 2me & le 4me, ou le 3me & le 4me, & que dans chaque cas il y a deux maniéres.

4.° On aura auſſi $\frac{56\,p^5\times \overline{q^3+m^3+r^3}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joüeur gagnant cinq parties, l'un quelconque des trois autres en gagne trois.

5.° Puis $\frac{56\,p^5\times 3\times \overline{qq\times\overline{m+r}+mm\times\overline{q+r}+rr\times\overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$, car ce Joüeur a 56 maniéres de gagner cinq parties des huit, & chacun des autres a trois maniéres de gagner deux parties des trois reſtantes.

6.° Puis $\frac{56p^5 \times 6qmr}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur gagne cinq parties des huit, chacun des trois autres en gagnant une: car trois choſes ſe peuvent combiner en ſix maniéres.

7.° On aura auſſi $\frac{70p^4 \times \overline{q^4+m^4+r^4}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur gagnant quatre parties, un quelconque des trois autres en gagne auſſi quatre.

8.° Puis $\frac{70p^4 \times 4 \times \overline{q^3 \times \overline{m+r}+m^3 \times \overline{q+r}+r^3 \times \overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que l'un quelconque des trois autres en gagne trois : car il y a quatre maniéres pour que cela arrive, quatre choſes pouvant être priſes 3 à 3 en quatre maniéres.

9.° On aura encore $\frac{70p^4 \times 6 \times \overline{qq \times \overline{mm+rr}+mmrr}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux.

10.° Puis $\frac{70p^4 \times 6 \times \overline{qq \times 2mr+mm \times 2qr+rr \times 2qm}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que l'un quelconque des trois autres en gagne deux, les deux reſtants en gagnant chacun une : car il y a ſix maniéres de prendre quatre choſes 2 à 2, & les deux Joüeurs reſtants peuvent changer en deux maniéres.

11.° On aura auſſi $\frac{56p^3 \times 10 \times \overline{q^3 \times \overline{mm+rr}+m^3 \times \overline{qq+rr}+r^3 \times \overline{qq+mm}}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois autres en gagne auſſi trois, chacun des reſtants en gagnant deux : car il y a dix maniéres de prendre cinq choſes 3 à 3.

12.° Puis $\frac{56p^3 \times \overline{10q^3 \times 2mr+10m^3 \times 2qr+10r^3 \times 2qm}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois

autres en gagne auſſi trois, pendant que les deux reſtants en gagnent chacun une : or il y a dix maniéres de prendre cinq choſes 3 à 3, & deux maniéres d'en arranger deux.

13.° Puis $\frac{56p^3 \times 10qq \times \overline{3mmr + 3rrm + 10m^2 \times 3rrq}}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur en gagnant trois parties, deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux, pendant que le Joüeur reſtant en gagne une : or il y a dix maniéres de prendre cinq choſes 2 à 2, & trois maniéres de prendre les trois reſtantes auſſi 2 à 2.

14.° On aura enfin $\frac{28pp \times 15qq \times 6mm \times 1rr}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joüeur gagnant deux parties des huit, les trois autres en gagnent auſſi chacun deux : car il y a quinze maniéres de prendre ſix choſes 2 à 2, ſix maniéres de prendre quatre choſes 2 à 2, & une maniére de prendre les deux reſtantes 2 à 2.

Il eſt évident que ce ſont là toutes les maniéres qu'a ce Joüeur de gagner, puiſque dans toute autre maniére de diſtribuer les huit parties, ce Joüeur en gagnera moins que quelques-uns des autres Joüeurs.

Il ne reſte plus qu'à diſtinguer entre tous ces cas quels ſont ceux qui font gagner à ce Joüeur tout l'argent qui eſt au Jeu, & quels ſont ceux qui ne lui en font gagner que la moitié ou le tiers, ou le quart : or il eſt viſible qu'il gagne tout, lorſqu'il a pris plus de parties qu'aucun des autres Joüeurs, qu'il ne gagne que la moitié, lorſqu'un autre Joüeur prend autant de parties que lui, qu'il ne gagne que le tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſque deux autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui, & enfin le quart de ce qui eſt au Jeu, lorſque les trois autres Joüeurs prennent autant de parties que lui. Le ſort de ce Joüeur ſera donc

$$ap^8 + 8\,ap^7 \times \overline{q + m + r} + 28\,ap^6 \times \overline{qq + mm + rr} + 56\,ap^6 \times \overline{qm + qr + mr}$$

$$+ 56\,ap^5 \times \overline{q^3 + m^3 + r^3} + 168\,ap^5 \times \overline{qqm + qqr + m^2q + m^2r + r^2q + r^2m}$$

$$+ 336\,ap^5qmr + 35\,ap^4 \times \overline{q^4 + m^4 + r^4} + 280\,ap^4 \times \overline{q^3m + q^3r + m^3q + m^3r + r^3q + r^3m}$$

$$+ 420\,ap^4 \times \overline{q^2m^2 + q^2r^2 + m^2r^2} + 840\,ap^4 \times \overline{qqmr + m^2qr + r^2qm} + 280\,ap^3$$

$$\times \overline{q^3m^2 + q^3r^2 + m^3q^2 + m^3r^2 + r^3q^2 + r^3m^2} + 560\,ap^3 \times \overline{q^3mr + m^3qr + r^3qm}$$

$$+ 1680\,ap^3 \times \overline{qqm^2r + qqr^2m + m^2rrq} + 630\,appqqmmrr$$

$$\overline{}$$

$$\overline{p + q + m + r}^{\,8}$$

COROLLAIRE I.

Il eſt évident que ſi dans cette formule, on met q à la place de p, & p à la place de q, elle ſe changera en une autre quantité compoſée, qui exprimera le ſort du Joüeur, dont la force ou l'habileté eſt exprimée par q. Car le même raiſonnement qui a été fait pour le premier Joüeur, doit être fait pour chacun des autres Joüeurs, ainſi en ſubſtituant encore ſucceſſivement pour p les grandeurs m & r, & réciproquement, on aura les ſorts des deux autres Joüeurs dont les forces ſont repreſentées par m & r.

COROLLAIRE II.

La quantité compoſée qui a été trouvée pour le ſort du premier Joüeur, & qui exprime dans le cours des huit parties tous les évenements qui lui ſont favorables, cette quantité, dis-je, étant ajoûtée aux trois quantités ſemblables, qui réſultent de la ſubſtitution qui a été faite, leſquelles expriment dans le cours des huit parties, tous les évenements favorables aux trois autres Joüeurs, & qui ſont contraires au premier, la ſomme qui en viendra ſera égale à l'unité ou à l'argent qui eſt au Jeu. Car chacune de ces quantités étant une fraction qui exprime la partie de cet argent qui appartient à chaque Joüeur, ſelon le droit qu'il a à cette partie de Jeu, il eſt néceſſaire que toutes ces portions raſſemblées ſoient égales au tout. Or comme chacune de ces fractions a un dénominateur commun, qui dans cet éxemple eſt la huitiéme puiſſance de $p + q + m + r$, il s'enſuit que les quatre numérateurs

pris enſemble, doivent auſſi être égaux à cette huitiéme puiſſance. Le même raiſonnement aura toûjours lieu, quel que ſoit le nombre de Joüeurs, & la quantité de parties que l'on joüe.

COROLLAIRE III.

Si l'on nomme *A* ce qui a été trouvé pour le ſort du 1.er Joüeur, & *B, C, D,* pour les ſorts des autres Joüeurs, trouvés par la ſubſtitution ſucceſſive de *q, m, r,* à la place de *p,* l'avantage du 1.er Joüeur ſur le 2.d ſera $A - B$, ſur le 3.me $A - C$, & ſur le 4.me $A - D$; & par conſéquent ſon avantage total ſera $3A - B - C - D$. D'où il ſuit que l'avantage du 2.d ſera $3B - A - C - D$, celui du 3.me ſera $3C - A - B - D$, & celui du 4.me ſera $3D - A - B - C$; quelques-unes de ces grandeurs ſeront négatives, & alors elles exprimeront le deſavantage du Joüeur auquel elles appartiennent.

REMARQUE.

Si l'on fait attention à ce qui a été fait pour trouver tous les termes qui compoſent le ſort du premier Joüeur dans l'éxemple que l'on s'eſt propoſé, on verra que dans tous les cas poſſibles que l'on peut propoſer ſur cette matiére, c'eſt-à-dire, quel que ſoit le nombre des Joüeurs dont les forces ſoient *p, q, m, r, ſ, t,* &c. & quel que ſoit le nombre de parties qu'ils doivent joüer, par exemple 20, on verra, dis-je, que le ſort du premier Joüeur ſera compoſé de tous les termes de la vingtiéme puiſſance de $p + q + m + r + ſ +$ &c. dans leſquels la lettre *p* a plus de dimenſions, ou autant que quelques-unes, ou que toutes les autres *q, m, r, ſ, t,* &c. Le premier de ces termes eſt p^{20}, & le dernier eſt $p^4 q^4 m^4 r^4 ſ^4$, dont le coëfficient doit être fait par ces nombres $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ $\times \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Le 1.er facteur exprime en combien de maniéres on peut prendre 20 choſes 4 à 4.

Le 2.d les 16 reſtantes 4 à 4.

Le 3.me les 12 reſtantes 4 à 4.

Le 4.me les 8 reſtantes 4 à 4.

Et le 5.me les 4 reſtantes 4 à 4.

Et leur produit $2845 \times 1820 \times 495 \times 70 \times 1$ exprime le nombre de maniéres dont chacun des cinq Joüeurs peut gagner quatre parties, & dans ce cas chacun des cinq Joüeurs doit retirer $\frac{1}{5}$ de ce qui eſt au Jeu.

Le terme du milieu eſt celui qui exprime le nombre de maniéres que le premier Joüeur a de gagner 12 parties, les autres cinq Joüeurs en gagnant ou 8, ou 7, 6, 5, 4, 3, 2, & 1 de toutes les façons poſſibles.

Il en ſera de même des autres termes dont on ne donne point ici le calcul, que l'on trouvera, ſi l'on veut, en ſuivant les mêmes regles que dans l'exemple réſolu.

COROLLAIRE.

On voit par le Corollaire ſecond & par les ſuivants, que chercher le ſort du premier Joüeur entre pluſieurs, dont les forces ſont p, q, m, r, $ſ$, t, &c. leſquels joüent un nombre n de parties; c'eſt chercher dans le multinôme $p + q + m + r + ſ + t +$ &c. élevé à la puiſſance n, tous les termes où p a plus de dimenſions, ou au moins autant qu'aucune des autres lettres q, m, r, &c. & que cette quantité étant trouvée, on trouve le ſort des autres Joüeurs, en ſubſtituant ſucceſſivement pour p les autres lettres q, m, r, $ſ$, &c. Il eſt donc auſſi évident que les quantités trouvées par ces ſubſtitutions, repreſenteront auſſi ſucceſſivement dans le même multinôme tous les termes où les lettres q, m, r, $ſ$, &c. auront plus de dimenſions, ou au moins autant que toutes les autres lettres, & qu'ainſi la même méthode que l'on a ſuivie, peut ſervir à élever un multinôme quelconque à telle puiſſance qu'on voudra, & qu'il ſuffit pour cela de trouver tout ce qui appartient à une des parties dont le multinôme eſt compoſé.

EXEMPLE.

On demande la ſixiéme puiſſance de $a+b+c+d$. Pour la trouver il ſuffit de chercher tous les termes de cette puiſſance où la lettre a a plus ou autant de dimenſions que chacune des autres lettres b, c, d. Ces termes ſont

$$a^6 + 6a^5 \times \overline{b+c+d} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} \times a^4 \times \overline{bb+cc+dd} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}$$
$$\times a^4 \times 2 \times \overline{bc+bd+cd} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} \times a^3 \times \frac{1}{2} \times \overline{b^3+c^3+d^3}$$
$$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} \times a^3 \times \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} \times \overline{bbc+bbd+ccb+ccd+ddb+ddc}$$
$$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} \times a^3 \times 1.\,2.\,3 \times bcd + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} \times aa \times \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}$$
$$\times \overline{bbcc+bbdd+ccdd} \times \frac{1}{3} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} \times aa \times \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} \times 2$$
$$\times \overline{bbcd+ccbd+ddbc} \times \frac{1}{2}.$$

Si dans tous ces termes qui expriment les parties de la ſixiéme puiſſance, dans leſquelles la lettre a domine, on ſubſtituë ſucceſſivement pour a les grandeurs b, c, d, & réciproquement pour b, c, d, la grandeur a, on aura tous les termes de cette ſixiéme puiſſance où les lettres b, c, d, dominent, & en raſſemblant toutes ces parties, on aura la ſixiéme puiſſance demandée.



SUR

SUR LES MOUVEMENTS DE LA TÊTE, DU COL, ET DU RESTE DE L'EPINE DU DOS.

Par M. WINSLOW.

ON eſt à preſent très-convaincu que les petits mouvements en rond, par leſquels on tourne la Tête réciproquement de côté & d'autre, comme ſur un pivot, n'eſt qu'une eſpece de rotation de la premiére Vertebre ſur la ſeconde. On eſt perſuadé que l'articulation de l'Os occipital n'y a aucune part, & que dans tous les degrés de ce mouvernent, la Tête eſt ſimplement ſoûtenuë par la premiére Vertebre, qui la porte & tranſporte avec elle de côté & d'autre. J'examinerai dans un autre temps les difficultés qui pourroient encore arrêter quelques-uns ſur ce ſecond point. On avance auſſi que les autres Vertebres du Col peuvent contribuer à cette eſpece de rotation, en ce que chacune d'elles prêtent un peu en même temps, de ſorte que par-là elles font toutes enſemble un petit tour gradué, & ainſi augmentent ce mouvement de rotation. 26 Mai 1730.

On ſçait que les petits mouvements de Tête en devant & en arriére, que l'on peut faire en tenant le Col immobile, dépendent uniquement de l'articulation de l'Os occipital avec la premiére Vertebre. On eſt d'accord que les grands mouvements de Tête en devant & en arriére, par leſquels on peut abbaiſſer, relever & renverſer la Tête, ſont executés par le mouvement commun de pluſieurs Vertebres du Col ; & que l'articulation de la premiére Vertebre avec la ſeconde n'y peut rien du tout contribuer, étant uniquement bornée aux petits tours de pivot dont je viens de parler.

A l'égard des infléxions latérales par leſquelles on incline la Tête vers l'une ou l'autre Epaule, il eſt évident que l'articulation de l'Occiput avec la premiére Vertebre, ni celle de

la premiére Vertebre avec la feconde ne les peuvent faire, mais qu'elles dépendent de l'articulation de la feconde Vertebre avec la troifiéme, & de celles des autres Vertebres fuivantes entre elles.

Outre les quatre infléxions directes dont je viens de parler, & que l'on peut appeller *fimples*, il y a quantité d'obliques, que l'on peut nommer *compofés* ou *combinés ;* & outre le mouvement de rotation ou pivot que je viens d'expofer, il s'en trouve un autre qui a beaucoup de rapport avec celui que j'ai appellé dans mon Mémoire de l'année paffée, *mouvement conique,* ou *mouvement en fronde ;* car on peut, en fe tenant debout ou affis, faire un certain tournoyement de Tête par une combinaifon fucceffive de plufieurs infléxions du Col, de maniére que par le chemin de ce mouvement, le haut de la Tête décrit un cercle, & le refte avec le Col trace une efpece de cone.

Je ne m'arrête pas ici à d'autres mouvements plus combinés ; par exemple, quand on fait le mouvement de charniére avec la Tête fur la premiére Vertebre dans le même temps que l'on fait le mouvement de pivot avec la premiére Vertebre fur la feconde.

L'artifice de la ftructure & de la connéxion de ces deux premiéres Vertebres du Col, par rapport aux mouvements de la Tête, eft à préfent prefque affés connu. Il s'y rencontre une circonftance que je n'ai pas encore trouvée éclaircie. C'eft la méchanique de l'articulation des apophyfes inférieures de la premiére Vertebre avec les apophyfes fupérieures de la feconde. J'ai déja fait là-deffus plufieurs tentatives, mais je n'ai encore rien pû trouver d'affés clair pour être propofé avec contentement à la Compagnie. J'ai dit cela exprès, afin de donner à d'autres l'occafion d'en faire auffi la recherche.

A l'égard des cinq Vertebres fuivantes, on fe contente de dire que leurs apophyfes, communément appellées *obliques,* facilitent tous les différents mouvements ordinaires du Col. Mais je n'ai pas été content de ce langage, après avoir fait attention que ces mêmes efpeces de mouvements fe font auffi

par les Vertebres des Lombes, quoique la direction de leurs apophyses obliques soit très-différente de celle des apophyses obliques du Col, & qu'elles ne peuvent pas se faire toutes par les Vertebres du Dos, quoiqu'il y ait des apophyses obliques.

Cela m'a porté à éxaminer de nouveau la conformation & la connéxion des Vertebres du Col, & à comparer leurs apophyses obliques non seulement avec les apophyses obliques des Vertebres des Lombes, mais encore avec les apophyses obliques des Vertebres du Dos.

On sçait que chacune de la plûpart des Vertebres de l'Epine du Dos a quatre apophyses de cette espece. Elles n'ont pas toûjours été appellées *obliques*. Vésale, dans sa grande & excellente Histoire des Os du Corps humain, en parlant de toutes les Vertebres en général, & de leurs différentes apophyses, donne simplement aux deux supérieures des quatre dont il s'agit ici, le nom d'*apophyses ascendantes*, & celui d'*apophyses descendantes* aux deux inférieures. Il y fait observer que dans les Vertebres du Col la direction de ces quatre apophyses est oblique, & que dans les Vertebres du Dos elle est en quelque maniére *(quandantenus)* droite. Il a même eu soin d'exprimer ces deux différences dans la marge de son Livre par deux lignes particuliéres, l'une oblique & l'autre verticale. Il avertit ensuite que dans les Vertebres des Lombes le plan de ces apophyses a aussi une direction droite ou longitudinale. Il y a ajoûté encore que ces différentes directions ont des degrés dans plusieurs Vertebres de la même classe. Riolan a appellé ces apophyses *articulaires*, & c'est ainsi que je les nommerai après ceci plûtôt qu'*obliques*.

Quant à l'usage de ces différentes directions, il n'en parle que comme en passant. Ainsi à l'occasion des Vertebres du Col, ayant fait observer que l'obliquité de leurs apophyses ascendantes & descendantes est toûjours moindre dans les Vertebres qui approchent le plus du Dos: C'est, dit-il, parce « que ces Vertebres ne devant pas avoir un mouvement aussi « lâche que celles qui sont au dessus, leur articulation de même « ne devoit pas être aussi lâche. Ensuite, en parlant des Vertebres «

du Dos, il dit que leurs apophyses ascendantes & descendantes sont presque en ligne droite selon la longueur du Corps, afin que la connéxion de ces Vertebres soit plus ferme, & qu'elle prête moins au mouvement.

Pour mieux exposer ce que je crois avoir remarqué en particulier sur l'usage des différentes directions de ces apophyses, il sera nécessaire de rappeller une idée courte de l'attitude, de l'assemblage & de la connéxion de toutes les Vertebres, dont la colomne pliante, qu'on appelle en général l'*Epine du Dos,* est composée.

Il suffira de faire souvenir, 1.° Que dans la plûpart des Vertebres, ce qu'on appelle le *corps* est une espece de tronçon dont la portion antérieure est en quelque maniére cylindrique, coupée transversalement par les deux bouts, auxquels on donne le nom de *faces*, dont l'une est supérieure, & l'autre inférieure. 2.° Que dans les douze Vertebres dorsales, de même que dans les cinq lombaires, ces faces sont planes, au lieu que dans les Vertebres du Col la face inférieure est en quelque façon convexe, & la supérieure proportionnément concave. 3.° Que les corps de toutes les Vertebres tiennent fermement ensemble par une matiére en partie cartilagineuse, & en partie ligamenteuse, d'une structure très-particuliére, assés ferme pour soûtenir toute la rangée de la colomne vertébrale, & assés souple pour rendre cette colomne plus ou moins fléxible ou pliante en différents sens. 4.° Que les deux apophyses inférieures ou descendantes de chaque Vertebre s'articulent avec les apophyses supérieures ou ascendantes de la Vertebre suivante, & que pour cet effet chacune de ces apophyses a une facette encroûtée d'un cartilage très-poli, proportionnée à la facette cartilagineuse de l'apophyse qui s'articule avec elle ; de sorte que ces facettes glissent très-aisément les unes sur les autres en différents sens, en même temps que les corps ne font que prêter, moyennant l'élasticité de leur symphyse cartilagineuse.

Il faut encore faire attention que dans la plûpart des Vertebres du Col, les facettes des apophyses supérieures sont

tournées obliquement en haut & en arriére, & que celles des apophyſes inférieures ſont tournées obliquement en bas & en devant. Dans les Vertebres du Dos les facettes des apophyſes ſupérieures regardent preſque directement en arriére, & celles des apophyſes inférieures preſque directement en devant. Ainſi dans le Col ces facettes ſe trouvent dans autant de plans diſtingués qu'il y a de Vertebres ; au lieu que dans les Vertebres du Dos les facettes ſe trouvent pour la plûpart à peu-près ou comme dans un même plan. Enfin dans les Lombes, les facettes des apophyſes ſupérieures de chaque Vertebre ſont tournées les unes vers les autres, de maniére qu'elles ſe regardent mutuellement, & embraſſent les facettes inférieures de la Vertebre voiſine, qui ſont proportionnément tournées dans un ſens oppoſé.

L'articulation de ces quatre apophyſes ont en tout temps partagé les Anatomiſtes. Les uns l'ont regardée comme une eſpece de ginglyme ou charniére, qu'ils ont appellée *imparfaite ;* les autres l'ont rapportée à l'arthrodie ou articulation platte, & quelques-uns l'ont nommée *articulation en double genoû.* Je crois avoir remarqué le premier là-deſſus une circonſtance qui eſt particuliére à l'articulation de ces apophyſes, & que je n'ai trouvée dans aucune des autres articulations de tout le Corps humain, ſoit que ces articulations ſoient en boule, ou, comme on dit, en genoû, ſoit qu'elles ſoient en couliſſe, ſoit qu'elles ſoient en charniére.

On ſçait que pendant les douze années de mes Exercices publics au Jardin Royal, j'ai pluſieurs fois fait ſentir ſur le Sujet même l'impoſſibilité de charniére dans cette articulation. Mais n'ayant pas encore aſſés éxaminé la particularité dont je viens de parler, je n'ai pas pouſſé ma démonſtration plus loin. Il eſt vrai que Véſale, dans ſon grand Ouvrage, a ſimplement dit, que cette articulation n'eſt pas ginglyme, comme Galien l'a crû, mais l'a dit ſans en avoir donné aucune preuve ; & comme il l'a rapportée à l'arthrodie ordinaire, il fait aſſés voir qu'il n'a pas fait attention à la circonſtance particuliére dont il s'agit à préſent, & dont voici l'expoſé.

Dans toutes les autres articulations du Corps humain, l'un des os articulés eſt toûjours pouſſé & appuyé contre l'autre os par la contraction des muſcles, & cela dans tous les degrés de mouvement & dans toutes les attitudes. Outre cela dans la ſituation verticale des os articulés, les uns peſent plus ou moins ſur les autres, & les preſſent indépendamment de l'impulſion faite par les muſcles contractés. De plus on convient que quand on meut ou fait joüer l'articulation de deux os, le centre du mouvement ſe trouve toûjours près de leur portion ou extrémité la plus voiſine de cette articulation, & que ce centre eſt éloigné de leur portion ou extrémité oppoſée. Par éxemple, dans l'articulation de l'Humerus avec l'Omoplate le centre du mouvement eſt près de la convéxité de la tête de l'Humerus & de la concavité de la tête de l'Omoplate; il eſt en même temps éloigné de la poulie de l'Humerus & de la baſe de l'Omoplate. C'eſt ſur ce fondement qu'on a regardé les os articulés comme des leviers, & leurs articulations comme des points d'appui.

Ce n'eſt pas ainſi dans les articulations de l'Epine du Dos, excepté celle de la premiére Vertebre avec l'Os occipital, & en partie celle de la même Vertebre avec la ſeconde. Les articulations des quatre apophyſes, dont il eſt queſtion, ſont diſpoſées de façon que dans pluſieurs mouvements du Col, du Dos, & des Lombes, les apophyſes d'une Vertebre ne font que gliſſer très-légérement ſur les apophyſes voiſines d'une autre Vertebre, ſans s'entrepouſſer. Il y a même des mouvements dans leſquels non-ſeulement ces apophyſes ne paroiſſent pas ſe toucher, mais elles paroiſſent encore s'écarter les unes des autres, ou tendre à cet écartement.

On comprend très-aiſément ceci, en faiſant attention que le centre du mouvement des Vertebres n'eſt pas dans leurs apophyſes articulaires, ni auprès, mais uniquement dans la ſymphyſe élaſtique de leurs corps. On le comprendra encore mieux par la ſtructure particuliére de cette ſymphyſe. Elle eſt principalement compoſée de pluſieurs cerceaux cartilagineux, molaſſes, minces & larges en maniére de bandes,

placés les uns dans les autres, comme autour d'un centre commun, & posés de champ, de sorte que l'un de leur bord s'attache à la face supérieure d'un corps de Vertebres, & l'autre bord s'attache à la face inférieure d'un autre corps. Ces bandes ou cerceaux cartilagineux renferment dans leurs intervalles une matiére très-visqueuse, comme une espece de mucilage, & elles sont entourées d'une bande ligamenteuse fort composée, dont les fibres se croisent obliquement, & sont fortement attachées aux bords du corps de chaque Vertebre voisine.

Les bandes cartilagineuses se plient facilement selon leur largeur, dans les différentes infléxions des Vertebres. Ce n'est pas par tout leur contour qu'elles se plient ainsi, ce n'est que par la portion la plus voisine de la cavité de chaque infléxion. Il paroît néantmoins qu'elles peuvent aussi plier également par tout leur contour, sous le poids de la Tête, du Thorax, & des extrémités supérieures, sur-tout quand ces parties sont chargées de quelque fardeau pesant, ou qu'elles soient exposées à quelque résistance considérable. Par-là on pourra encore expliquer comment le corps de l'Homme s'accourcit après avoir été long-temps debout ou en marche, & comment il recouvre sa longueur après avoir été ensuite couché pendant un temps proportionné. La bande ligamenteuse empêche le trop d'écartement, & la rupture des bandes cartilagineuses du côté de la convéxité de l'infléxion des Vertebres; elle aide aussi à borner les mouvements de rotation d'une Vertebre sur l'autre.

Quand on éxamine avec attention, dans un Cadavre, le Col dépoüillé de ses muscles, on verra qu'en le courbant en devant, les cartilages du corps des Vertebres deviennent saillants, & paroissent comme autant de bourlets du côté de l'infléxion; ensuite si on redresse le Col, on verra disparoître ces bourlets. Enfin, si on contourne de côté & d'autre, comme sur un pivot, les Vertebres qui sont au-dessous de la seconde, on verra que les portions ligamenteuses qui couvrent les cartilages, forment des rides obliques, & plus ou moins

croiſées, ſelon qu'on employe plus ou moins d'effort à ces mouvements réciproques.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que quand on s'incline en devant, alors les Vertebres, en approchant les unes des autres par la portion antérieure de leurs corps, font monter les deux apophyſes inférieures d'une Vertebre plus haut que les apophyſes ſupérieures de la Vertebre ſuivante, & en même temps s'en écarter. Au contraire quand on renverſe l'Epine du Dos, alors les Vertebres s'approchent par la portion poſtérieure de leur corps, & font deſcendre en même temps les apophyſes inférieures d'une Vertebre plus bas que les apophyſes ſupérieures de l'autre Vertebre. Si l'on fait des infléxions latérales, les corps des Vertebres s'approcheront enſemble du côté de l'infléxion, & les apophyſes articulaires du même côté ſe croiſeront, en s'avançant les unes ſur les autres, pendant que les apophyſes articulaires de l'autre côté s'éloigneront les unes des autres.

Ainſi il eſt démontré par le mouvement naturel des Vertebres, que la connéxion naturelle de leurs apophyſes articulaires en général, ni eſt, ni peut aucunement être en charniére; car pour cet effet il faudroit que le point d'appui ou le centre du mouvement fût aux apophyſes articulaires, & alors pour mettre les Vertebres en mouvement, il faudroit que d'un côté les corps meurtriſſent leurs cartilages, & que d'un autre côté ces cartilages ſe ſéparaſſent de leurs corps, ce qui ruineroit entiérement la ſymphyſe des Vertebres.

Outre cette preuve tirée du mouvement naturel des Vertebres, j'en trouve encore une autre qui me paroît auſſi pouvoir paſſer pour démonſtration. Elle eſt fondée ſur la ſeule conformation des apophyſes articulaires, car pour peu qu'on l'éxamine avec ſoin, on eſt convaincu, ce me ſemble, qu'elle ne peut admettre ni aſſemblage en charniére, ni mouvement en charniére, même imparfaitement. On ſçait que le mouvement en charniére eſt celui qui ne ſe fait qu'en deux ſens oppoſés, comme autour d'un axe, & que dans le Corps humain, les ligaments tiennent lieu de cheville. Par rapport

à

à l'aſſemblage, il eſt indifférent que chacune des deux pieces aſſemblées ait reciproquement des avances & des enfoncements, ou que l'une des deux ait ſeulement des avances & l'autre ſeulement des cavités; il ſuffit que leur conformation puiſſe permettre un aſſemblage convenable au mouvement en charniére, & permettre ce mouvement, ſans déranger l'aſſemblage. Cela ne ſe trouve pas dans les apophyſes articulaires des Vertebres. Elles ſont, ou trop inclinées comme dans les Vertebres du Col, ou trop plattes, comme dans celles du Dos, ou trop courbes, comme dans celles des Lombes. J'en excepte toûjours les deux premiéres du Col; & à l'égard de la derniére du Dos, de même des premiéres des Lombes, dont les apophyſes articulaires ont paru à quelques-uns avoir une conformation aſſés propre à charniére, j'en rendrai compte dans la ſuite.

Pour revenir aux directions de ces apophyſes & à la différence de ces directions. Voici ce que j'ai crû avoir obſervé là-deſſus dans les Vertebres du Col. Elles y ſont très obliques, non-ſeulement par rapport au corps de chaque Vertebre, mais auſſi par rapport à la rangée entiére de toutes ces Vertebres. Il m'a paru que ſi la direction de toute la rangée vertebrale du Col étoit ſemblable à la direction de tout le Corps de l'Homme conſidéré comme étant étendu, cette obliquité particuliére des apophyſes, ſeroit un obſtacle à quelques-uns des mouvements ordinaires du Col, & qu'elle en rendroit d'autres aſſés difficiles. Car alors on ne pourroit fléchir le Col ſur le devant, ſans trop écarter les apophyſes articulaires d'une Vertebre des apophyſes articulaires d'une autre, & ſans forcer, ou peut-être rompre les ligaments qui les tiennent enſemble. On ne pourroit alors faire les infléxions latérales du Col, ſans cauſer par-là le même inconvénient aux apophyſes articulaires d'un côté, pendant que celles du côté oppoſé compriment trop, ou froiſſent les unes & les autres. Enfin dans une telle attitude ou direction droite de la rangée vertebrale du Corps, on ne pourroit pas faire les mouvements ordinaires en pivot; car alors les apophyſes articulaires

de tout un côté du Col s'oppoſeroient les unes aux autres, & par-là empêcheroient le Col de ſe contourner vers l'autre côté. C'eſt ce que l'on peut expérimenter ſur ſoi-même, en tenant le Col tout droit, roide & rengorgé, car on ſentira que dans cette attitude contrainte, on ne peut pas tant tourner le Col, ni par conſéquent la Tête comme dans l'attitude ordinaire.

Après avoir fait pluſieurs recherches pour trouver le dénoüement de cette difficulté, je crois l'avoir rencontré dans la ſeule direction de toute la rangée vertebrale du Col. Cette direction eſt naturellement très-oblique dans l'Homme vivant. Car quand on ſe tient droit, debout ou aſſis, on trouvera l'extrémité ſupérieure de cette rangée vertebrale beaucoup plus avancée ſur le devant de la Poitrine, que l'on ne ſe l'imagineroit par l'inſpection d'un Squélete ſuſpendu ou redreſſé ſur un piédeſtal. Mais pour m'aſſûrer éxactement du degré de cette obliquité dans l'Homme vivant, où on ne peut voir ni toucher la premiére ou la ſeconde Vertebre, j'ai cherché parmi les parties voiſines expoſées à la vûë & au toucher, ce qui pourroit en donner la marque certaine, & je l'ai trouvé dans les deux apophyſes maſtoïdes de la Tête, qui ſe font aſſés ſentir, même dans les Sujets les plus gras. En éxaminant ces apophyſes dans un Crâne, ſi on tire une ligne droite du bord antérieur de l'une juſqu'au bord antérieur de l'autre, on verra que la partie moyenne de l'un & de l'autre Condyle occipital ſe trouve dans la même ligne, & par conſéquent que les cavités ſupérieures de la premiére Vertebre, qui ſont articulées avec ces Condyles, ſe trouvent auſſi dans cette même ligne. Ainſi en ſe tenant droit, debout ou aſſis, on n'a qu'à appliquer derriére le bas de l'oreille, où on ſent le bord antérieur de l'apophyſe maſtoïde, le bout d'un fil dont l'autre bout ſoit chargé d'un plomb, ou y poſer verticalement un petit bâton droit, & par-là on peut juger ſûrement de l'obliquité naturelle de la rangée vertebrale du Col.

En éxaminant l'attitude particuliére de chaque Vertebre ſelon cette obliquité générale de toute leur rangée, il m'a

paru, que dans plusieurs Vertebres les facettes de leurs apophyses articulaires sont situées presque horisontalement ou transversalement par rapport à la longueur du Corps de l'Homme, se tenant droit, debout ou assis, & que ces facettes sont placées les unes sur les autres dans des plans différents presque paralleles, à peu près comme les marches d'un escalier. Il m'a paru que cette attitude directe des apophyses obliques procurée par l'attitude oblique de la rangée vertebrale, facilite les mouvements de rotation du Col, en ce qu'elles ne font que glisser plus ou moins transversalement les unes sur les autres, sans s'entre-heurter. Il m'a encore paru que par cette attitude les apophyses articulaires se pourroient soûtenir les unes les autres dans certains cas, comme quand on porte des fardeaux sur la Tête, & qu'elles pourroient ainsi en décharger un peu les corps des Vertebres.

J'ai observé que dans quelques Sujets la rangée des trois premiéres Vertebres est comme redressée, & par-là donne au Col osseux une certaine courbure, qui est assés connuë, mais qui n'a pas été assés déterminée par rapport aux Vertebres qui la forment particuliérement. La seconde & la troisiéme Vertebre du Col ainsi redressées, leurs apophyses articulaires se rapprochent plus de la verticale, & peuvent par-là, ce me semble, faciliter les infléxions latérales du Col, quand on panche la Tête vers l'une ou l'autre épaule. Il semble même que plus on tient la Tête droite ou tant soit peu levée en arriére, sans néantmoins rengorger le Col, plus ces infléxions sont aisées. Il ne s'agit point du tout ici de l'articulation de la premiére Vertebre avec l'Os occipital. A l'égard des deux derniéres Vertebres du Col, la direction de leurs apophyses articulaires dégénérent, pour ainsi dire, peu à peu en celle des apophyses articulaires des Vertebres dorsales. Vésale a très-clairement fait cette derniére remarque.

On a déja observé que le peu de volume du corps des Vertebres du Col, joint à l'épaisseur & à la souplesse de leurs cartilages, donnent en général au Col la grande mobilité qu'il a au dessus des autres portions de toute la colomne vertébrale.

La conformation particuliére de ces corps, en ce qu'ils ſont échancrés en haut & ſaillants en bas, a été regardée comme une eſpece d'emboîtement propre à empêcher la luxation de ces Vertebres. Une telle idée ſatisferoit toûjours ceux qui ſe bornent à l'inſpection du Squélete, dont les Vertebres ſont dépoüillées de leur ſymphyſe. Mais un ſeul coup d'œil jetté ſur l'état naturel, dans lequel les corps de ces Vertebres ſont éloignés les uns des autres par leur ſymphyſe cartilagineuſe, en fait voir évidemment la fauſſeté, parce qu'on n'y trouve pas un emboîtement oſſeux. Il me paroît plûtôt que ces échancrures & ces ſaillies augmentent l'étendüe de la connéxion & de l'adhérence des cartilages avec les corps, & que ſans cette augmentation de ſurface ils auroient été trop ſujets à rupture ou à ſéparation par des efforts & des mouvements extraordinaires.



MANIERE DE FAIRE LE SUBLIMÉ CORROSIF EN SIMPLIFIANT L'OPÉRATION.

Par M. BOULDUC.

LA préparation du Vif-argent, qu'on appelle ſouvent tout court, & comme par excellence, du *Sublimé*, & quelquefois par diſtinction, du *Sublimé corroſif*, par rapport aux effets rongeants qu'il produit ſur le corps, eſt devenüe une drogue néceſſaire dans la matiére Médécinale, autant par rapport à elle-même, quand on l'employe ſeule ou dans quelques mêlanges pour l'uſage extérieur, que par rapport à quelques remedes que l'on en prépare enſuite, comme ſont le Mercure doux, la Panacée mercurielle & autres, dont on ſe ſert tous les jours intérieurement : & les Mémoires de l'Académie ont déja propoſé plus de maniéres différentes de la faire, qu'aucun Livre de Chymie Latin ou François qui me ſoit connu. 6 Septembre 1730.

Cependant on a lieu de s'étonner, que parmi le grand nombre des Artiſtes, qui ſont dans cette Ville & dans le reſte du Royaume, il y en ait très-peu, & peut-être pas cinq ou ſix, qui veüillent ſe livrer à préparer cette drogue eux-mêmes ; les uns la prennent des Droguiſtes, les autres des colporteurs, & ces deux-ci s'en rapportent à la bonne foi des étrangers, dont ils la tirent. De quelque part pourtant qu'elle vienne, on fait, à mon avis, également mal de s'y fier, puiſqu'il n'eſt que trop certain, qu'il ſe trouve des mains avides d'un gain criminel, qui la falſifient par le mêlange de l'Arſenic, dont malheureuſement nous n'avons point encore d'épreuve, qui pût d'avance nous faire diſtinguer ſa préſence ; on n'en devient certain que par les funeſtes effets, & c'eſt trop tard.

Pour éviter la tromperie, & des événements fâcheux, il

ſeroit à ſouhaiter, que tous ceux, que leur profeſſion engage à débiter des remedes au Public, n'en donnaſſent aucun de ceux qu'on tire du Sublimé ou par le Sublimé, à moins de les avoir faits de leurs propres mains. La ſûreté des malades eſt inſéparable de la bonté des remedes bien conduits.

Malgré la certitude de cette conſéquence, la répugnance pour l'opération, dont il s'agit, eſt grande & preſqu'invincible chés la plûpart des Artiſtes, & peut rouler ſur différentes raiſons : les uns aiment mieux acheter bon marché ce qui leur coûteroit davantage à faire chés eux; d'autres craignent les vapeurs des Eaux fortes, qu'on reſpire avant & pendant l'opération; & d'autres ont été révoltés par les inconvénients & les incommodités auxquelles la méthode la plus reçûë eſt encore ſujette dans la ſublimation. Cette méthode eſt, comme tout le monde le ſçait, de mêler du Mercure, diſſous par l'Eau forte & réduit en cryſtaux ou évaporé à ſiccité, avec du Vitriol calciné & du Sel commun décrépité; de pouſſer enſuite ce mêlange dans un Matras par un feu convenable.

Ayant fait cette opération tous les ans depuis ma jeuneſſe, j'y ai auſſi trouvé quelquefois à redire : l'Eau-forte, en diſſolvant d'abord le Mercure, & en s'exhalant encore après du col du Matras, quand il eſt ſur le feu, jette des vapeurs deſagréables & nuiſibles, qui ſe répandent par-tout, quelque grand que ſoit le Laboratoire; elles ont chaſſé plus d'une fois les auditeurs de l'Amphithéatre du Jardin du Roy; outre cela, il arrive ſouvent, que nos Matras de verre crêvent ou au commencement ou vers la fin de l'opération, ſur-tout, quand on veut faire pluſieurs livres de Sublimé à la fois; & par cet accident non ſeulement il ſe perd de la matiére, mais auſſi l'Artiſte court riſque d'être maltraité par les vapeurs qu'elle exhale; & enfin les trois Sels, qu'on employe, faiſant un gros volume, ne permettent guéres au feu de les bien pénétrer, ainſi il eſt rare, que la maſſe, qui reſte au fond, comme un *caput mortuum*, ſoit entiérement épuiſée de Mercure, & c'eſt apparemment ce qui a fait, qu'on a pris la coûtume de la jetter comme inutile.

Ces inconvénients m'ont souvent fait souhaiter de trouver une méthode plus commode & plus succincte pour ce travail, & y étant parvenu, je l'ai pratiquée depuis quelques années en mon particulier & en Public : quand on voudra la comparer avec celle, qui est la plus en usage, on s'appercevra aisément de la différence, qu'il y a de l'une à l'autre & pour les vaisseaux & pour l'Artiste. Enfin, croyant de mon côté l'avoir assés éxaminée, je ne hésite plus de la communiquer avec quelques circonstances, que l'on y peut remarquer, afin que ceux, qui voudront l'imiter, partagent avec moi la facilité & les avantages que j'y ai trouvés, & abandonnent dans la suite la répugnance de faire le Sublimé eux-mêmes, en considération des raisons alléguées au commencement.

Je verse sur autant de livres de *Vif-argent*, que je veux employer à la fois, pareil nombre de livres de bonne & forte *Huile de Vitriol*, dont je retire par la Cornüe le phlegme & la portion d'acide, qui ne peut pas rester uni avec le Mercure : l'Huile de Vitriol à l'aide du feu dissout le Mercure, & tous les deux font à la fin une *masse très-blanche*, que je pousse jusqu'au sec : je mêle promptement cette masse retirée de la Cornüe avec parties égales de *Sel commun*, le plus blanc que je puisse avoir, non pas décrépité, mais simplement séché dans quelque endroit chaud, & je pousse ensuite ce mêlange au feu, à la maniére ordinaire, dans un Matras bien enterré dans le sable. Dans le commencement il monte un peu d'humidité en gouttes d'eau dans le col du Matras, après quoi le bouchon de papier prend une barbe de filets ou crystaux blancs ; alors j'augmente le feu, & j'ôte autour de la voûte du Matras le sable peu-à-peu & à mesure que je vois que le Sublimé s'y attache & s'augmente : quand je m'apperçois qu'il ne se sublime plus rien, j'ôte tout le sable d'alentour, & retire le vaisseau encore brûlant, afin qu'il crêvasse par la fraîcheur de l'air ; & dans un temps chaud je facilite ces crêvasses par un linge moüillé, dont je l'enveloppe, pour n'avoir pas besoin de le casser à force de coups, qui feroient retomber du Sublimé sur la matiére qui reste au fond.

Dès cette premiére opération j'ai un Sublimé bien blanc & cryſtallin par-tout, qui aux parois du vaiſſeau eſt épais & compact, & au dedans parſemé de cryſtaux formés en lames ou aiguilles applaties ; & la maſſe du fond eſt une poudre friable, qu'on détache facilement du verre : Si le Sel, que j'ai employé, a été net, cette poudre eſt grisâtre, & s'il a été un peu ſale, elle tire ſur le roux.

Dans ce procédé il n'y a point d'*Eau-forte,* & le Sublimé ne ſe fait pas moins bien; de plus, on évite le *Fer,* qui dans le Vitriol calciné, quand on l'employe, fait la moitié de ſon poids, & embaraſſe les matiéres, qui doivent agir les unes ſur les autres, de ſorte que l'opération ne ſe peut faire que lentement ; au lieu que les deux matiéres, dont je me ſers, ſe touchent immédiatement, & qu'étant plus aiſément pénétrées par le feu, elles agiſſent ſans obſtacle & avec plus de facilité les unes ſur les autres; auſſi l'opération eſt-elle achevée en une fois moins de temps, que ſuivant le procédé ordinaire.

L'*Huile de Vitriol,* qu'il faut employer, n'eſt pas toûjours également forte : ſi elle eſt bonne, elle diſſout ſon poids de Mercure; ainſi, ſi elle eſt foible, on en mettra davantage, ou, ce qui vaut mieux, on la déphlegmera auparavant.

Quelque forte ou déphlegmée que ſoit cette Huile, elle eſt ſans odeur ; auſſi la liqueur, qu'on retire dans le temps qu'elle diſſout le Mercure, a-t-elle toûjours paſſé pour un phlegme ou un eſprit foible : & en effet elle eſt très-foible au goût, légérement aigrelette & âpre, mais en récompenſe elle eſt d'une odeur de Soufre allumé ſi vive, que je n'en ai pas ſenti de pareille ; c'eſt un *Eſprit de Vitriol des plus volatils :* & quoiqu'il paroiſſe preſque impoſſible, que les Auteurs, qui ont propoſé la diſſolution du Mercure par cette diſtillation, pour en faire du Turbith minéral, n'ayent apperçû cette *odeur,* il n'y en a pourtant pas un, que je ſçache, qui en faſſe mention, quoiqu'à mon avis, cette production ſoit la plus forte preuve, que le Mercure eſt chargé de matiére inflammable, qui eſt en état de changer l'acide vitriolique, fixe

&

& ſans odeur, en un eſprit des plus vifs & volatils.

Si on ne veut pas employer cette liqueur dans des Remedes, où les Auteurs demandent ces ſortes d'eſprits, par la crainte qu'elle ne ſoit chargée de Mercure, on peut la garder pour pareille opération. Il eſt vrai qu'au bout de quelque temps elle perd entiérement ſa volatilité & vivacité, & rentre dans un état de fixité; mais dans quelque état qu'on la prenne, elle peut encore diſſoudre, à l'aide du feu, la moitié de ſon poids de Mercure.

Pour ce qui eſt de la *maſſe blanche,* qu'on retire de la Cornüe, il eſt bon de l'employer d'abord, ou du moins de la conſerver bien ſéche par rapport à l'acide vitriolique, qui s'y trouve des plus concentré, car poūr peu qu'elle reſte à l'air, cet acide en attire l'humidité, la maſſe devient molle, & même avec le temps, toute fluide, ce qui rend ſon mêlange avec le Sel commun difficile à manier, outre qu'elle en fait promptement élever des vapeurs incommodes d'Eſprit de Sel, qui peut-être entraînent déja avec elles des parcelles de Mercure.

Pour peu qu'on faſſe réfléxion ſur ce qui a formé cette *maſſe blanche,* on s'étonnera du ſentiment erronné de *Van Helmont,* qui ſoûtient dans pluſieurs endroits de ſes ouvrages, qu'une livre de Mercure peut changer un grand nombre de livres d'Eſprit ou d'Huile de Vitriol (pluſieurs milliers, dit-il) en vrai *Alun,* & bien aiſément, *ſolo contactu,* il faut ſeulement que le Mercure les touche pour en faire de l'Alun. Mais outre que le Mercure reſteroit à jamais dans l'Huile de Vitriol ſans un effet réciproque, ſi la chaleur du feu n'aidoit cet acide à le pénétrer, & à réduire les deux en une conſiſtance ſaline; nous avons des moyens aiſés de diſſoudre de nouveau leur union, & d'en revivifier le Mercure, ſoit par le Sel de Tartre, par la limaille de Fer, ou par le régule d'Antimoine, &c. & l'opération, que je propoſe, eſt encore une preuve convaincante de leur combinaiſon: On voit là, que l'acide vitriolique, qui étoit concentré dans la maſſe blanche, abandonnant le Mercure, ſaiſit l'alkali du Sel commun, &

en dégage l'Eſprit, lequel trouvant le Mercure abandonné, bien diviſé, & comme préparé exprès pour lui, le ſaiſit à ſon tour; les deux premiers s'arrètent au fond, & les deux autres s'élevent, bien unis, en Sublimé corroſif, qu'on ne ſera jamais avec de l'Alun & du Sel, & il y a de l'apparence que la ſeule blancheur de nôtre Vitriol mercuriel a ébloüi le Philoſophe au point, qu'il l'a pris pour de l'Alun.

A l'égard du *Sel commun,* qui eſt indiſpenſablement néceſſaire pour nôtre opération, je ne le fais point décrépiter, mais ſeulement bien ſécher. La décrépitation lui fait perdre de ſon acide, & met par-là une portion de ſa terre alkaline à nud, qui abſorbe alors de l'acide vitriolique, uni au Mercure, dont une portion devient ainſi libre & ſe revivifie.

Si le Sel commun n'eſt pas bien ſec, on peut mettre une once à deux de plus pour chaque livre, qu'on en employe.

Enfin le *Réſidu,* qu'on trouve après la ſublimation comme une poudre friable au fond, contient un Sel, qui ne mérite pas d'être jetté : on peut diſſoudre cette poudre, & filtrer l'eau ; il reſte peu de terre en arriére; & la diſſolution expoſée à ſe cryſtalliſer fournit un auſſi bon Sel & en auſſi beaux cryſtaux, que ſi on l'avoit fait immédiatement & exprès par l'Huile de Vitriol & le Sel commun.

Il eſt pourtant de la prudence de l'Artiſte de bien pourvoir à la pureté de ce Réſidu, c'eſt, *qu'il ſoit bien épuiſé de Mercure.* Pour s'en aſſûrer, on peut voir, ſi l'Huile de Tartre par défaillance précipite quelque choſe de jaune de ſa diſſolution, ou ſi une lame de cuivre, trempée dedans, en blanchit, ou, pour accourcir, ſi un peu de ce Réſidu ſec, frotté ſur un morceau de cuivre poli & moüillé, lui imprime de la blancheur? En ce cas on ne ſçauroit mieux faire que de calciner le tout un peu vivement ſous une cheminée, ou plûtôt dans une place ouverte pour en diſſiper ce qui y peut reſter de Mercure; après quoi on n'a rien à craindre pour le Sel, qu'on en retire.

EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIE'ME ORDRE.

SECONDE PARTIE DE LA SECTION I.

Dans laquelle on traite en général des Lignes du 4me ordre qui ont des points doubles.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON a vû dans la premiére Partie de cette Section, que les Lignes Algébriques ſont ſuſceptibles de différentes eſpeces de points ſimples & de différentes eſpeces de points multiples, ſelon qu'elles ſont d'un ordre plus ou moins élevé; J'ai tâché d'y développer une Méthode générale, pour diſcerner ſi un point donné ſur une Ligne algébrique quelconque eſt ſimple ou multiple, & de quelle eſpece de multiplicité il eſt. Il s'agit maintenant de faire l'application de cette Méthode aux Lignes du 4me ordre, dont les unes peuvent avoir des points doubles de toutes les eſpeces, comme on l'a démontré dans les art. 37 & 56, les autres un point triple formé par l'interſection commune de trois branches de la même Courbe, ou par le rebrouſſement de deux branches par lequel il en paſſe une troiſiéme, ou enfin par l'adhéſion d'une Ovale infiniment petite ſur une des branches de la Courbe, cas ſingulier dont j'ai fait voir la poſſibilité dans les art. 59 & 60 du Mémoire précédent. Nous ne parlerons dans celui-ci que des points doubles, & nous renverrons à une troiſiéme Partie tout ce qui concerne les points triples des Lignes du 4me ordre, le champ étant trop vaſte pour pouvoir être parcouru avec quelque éxactitude dans un ſeul Mémoire.

Il faut ſe ſouvenir qu'on a donné dans l'art. 31 du premier Mémoire une Equation générale pour toutes les Lignes du 4me ordre, ſoit qu'elles s'étendent à l'infini, ſoit qu'elles

rentrent en elles-mêmes ; celles que l'on va donner ici, ſa premiére pour les Lignes du 4me ordre, qui ont un point double à l'origine de leur axe, la ſeconde pour celles qui ont deux points doubles ſur leur axe, & la troiſiéme pour celles qui ont trois points doubles, conviennent auſſi aux Lignes de cet ordre, qui s'étendent à l'infini, & à celles qui rentrent en elles-mêmes, & l'on en fait l'application aux unes & aux autres par des exemples choiſis parmi le grand nombre de Lignes dont le 4me ordre eſt compoſé.

Enfin les Lignes du 4me ordre étant ſuſceptibles des trois eſpeces de points doubles d'interſection, comme on l'a démontré dans l'art. 37, après avoir donné des regles pour reconnoître le point d'interſection d'avec le point de rebrouſſement & le point conjugué, il a fallu en donner, pour reconnoître parmi les points d'interſection des Lignes du 4me ordre, ceux qui étoient de la 1re, 2de ou 3me eſpece ; c'eſt ce qu'on a éxecuté à la fin de cette ſeconde Partie, que l'on termine enfin par démontrer qu'une Courbe du 4me ordre ne ſçauroit jamais avoir plus de trois points doubles.

J'aurois pû commencer mon Mémoire par cette derniére Propoſition, & donner en même temps pluſieurs nouveaux Théoremes ſur les Lignes algébriques des ordres ſupérieurs au quatriéme : Théoremes qui font voir une analogie parfaite entre les Lignes algébriques & les points multiples dont elles ſont ſuſceptibles ; par exemple, on auroit pû démontrer ici, 1.° Qu'une Ligne du 6me ordre ne ſçauroit jamais avoir plus de trois points triples ; Qu'une Ligne du 8me ordre ne ſçauroit avoir plus de trois points quatruples ; Qu'une Ligne du 10me ordre ne ſçauroit avoir plus de trois points quintuples ; Enfin qu'une Ligne d'un ordre pair, exprimé par n, ne ſçauroit avoir plus de trois points multiples, dont la multiplicité ſoit exprimée par $\frac{n}{2}$.

2.° On auroit pû démontrer ici, à l'égard des Lignes d'un ordre impair, que celles du 3me ordre, qui ont un point double, ne ſçauroient avoir d'autres points multiples. Que

celles du 5me ordre, qui ont un point triple, ne peuvent avoir plus de trois points doubles. Que celles du 7me ordre, qui ont un point quadruple, ne peuvent avoir plus de trois points triples. Que celles du 9me ordre, qui ont un point quintuple, ne ſçauroient avoir plus de trois points quadruples, & ainſi des autres Lignes d'un ordre impair à l'infini. Mais la démonſtration de ces Théoremes m'auroit trop écarté de mon ſujet, je me réſerve de la donner dans quelque Ecrit détaché: continuons donc l'éxamen des Lignes du 4me ordre, ſans pouſſer plus loin la Théorie générale des Lignes algébriques d'un ordre ſupérieur. C'eſt ce que l'on trouvera dans ce ſecond Mémoire, dont les articles doivent ſuivre le même ordre que ceux du Mémoire précédent, puiſqu'il n'en eſt que la ſuite.

PROPOSITION III.

THEOREME.

LXI. *Toutes les Lignes du 4me ordre, telles que* MGDGmZEV *, *ou* MGmZEV *, *ou* MDmZEV *, *dont la nature eſt exprimée par l'équation générale marquée ici par* (10), *dans laquelle l'indéterminée* (z) *exprime les abſciſſes* GQ, *& les indéterminées* (u), *les ordonnées* QM, *ont un point double à l'origine* G *de leur axe.* * Fig. 41. * Fig. 42. * Fig. 43.

$$(10)\ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times uu + \overline{Ez^3 + Fzz + Gz} \times u + Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

DÉMONSTRATION.

Lorſque le point *Q* tombe en *G*, alors *z* étant $= 0$, l'égalité marquée par *(L)* dans l'art. 49, eſt telle qu'on la voit ici.

$$(L)\ldots \Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0.$$

Cette égalité ayant deux racines égales & de même ſigne, qui ſont $u = 0$ & $u = 0$, il eſt viſible qu'il y a au point *G* deux ordonnées égales & de mêmes ſignes. Mais quand l'ordonnée *QM (u)* eſt $= 0$, l'égalité marquée par *(A)* dans l'art. 49, qui donne les valeurs des abſciſſes *GQ (z)*, lorſque

les ordonnées $QM(u)$ sont $= 0$, est telle qu'on la voit ici.

$$(A) \ldots Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

Cette seconde égalité ayant encore deux racines égales & de mêmes signes, sçavoir $z = 0$ & $z = 0$, il est visible qu'il y a au point G, non seulement deux ordonnées égales & de mêmes signes, comme on vient de le voir, mais encore deux abscisses égales & de mêmes signes, qui sont $z = 0$ & $z = 0$; donc* il doit y avoir en G un point double de la courbe $MGDGmZEV$, ou $MGmZEV$, ou $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (10).

* *Art. 51.*

Mais les coëfficients Δ, Q, A, B, C, D, E, F, G, K, L, M, de l'équation (10) étant des coëfficients indéterminés, quoique constants, qui portent avec eux leurs signes $+$ & $-$, il est évident que l'équation marquée par (10) exprime la nature de plusieurs lignes du 4me ordre; & comme les différentes valeurs de ces coëfficients ne changent rien à la présente démonstration, il est visible que cette démonstration convient à toutes les Courbes, dont la nature peut être exprimée par l'équation (10), & par conséquent que toutes ces courbes ont un point double à l'origine G de leur axe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

LXII. Donc toutes les lignes du 4me ordre, dont la nature est exprimée par l'équation marquée ici par (20) ont un point double à l'origine G de leur axe.

$$(20) \ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times u^2$$
$$+ \overline{Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}} zz + Gz} \times u + Kz^4$$
$$+ 2\sqrt{MK}\, z^3 + Mzz = 0.$$

Car l'abscisse (z) étant $= 0$, on aura toûjours l'égalité $\Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0$, & l'indéterminée (u) étant $= 0$, on aura toûjours l'égalité $Kz^4 + 2z^3\sqrt{KM} + Mz^2 = 0$; d'où il suit qu'au point G, ou $z = 0$, on aura, comme dans

l'article précédent, deux valeurs de l'indéterminée *(u)* réelles, & l'une & l'autre $=$ o, & deux valeurs de l'indéterminée *(z)* réelles, & l'une & l'autre $=$ o ; ainsi le point *G* sera, comme dans l'article précédent, un point double auquel l'axe *GQ* & l'ordonnée principale *GL* seront sécantes. Donc, &c.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

LXIII. *Toutes choses demeurant les mêmes comme dans la Proposition précédente, déterminer si le point double* G *de la courbe* MGDmZEV *dont la nature est exprimée par l'équation* (10), *déterminer si ce point double* G *est fait par l'intersection de deux branches de la courbe*, ou s'il est un point de rebroussement*, ou enfin s'il est un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée*.* * Fig. 41. * Fig. 42. * Fig. 43.

SOLUTION.

On cherchera d'abord quel est le rapport du *(du)* au *(dz)* dans tous les points doubles de la courbe *MGDGmZEV*, en différentiant deux fois * son équation marquée par *(10)* (dans l'exposé de la Proposition précédente) ; cette double différentiation donnera l'équation irrationnelle que l'on voit ici marquée par Σ. * *Art. 46.*

$$\Sigma \ldots \left\{\begin{matrix} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{matrix}\right\} du^2 \left\{\begin{matrix} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ez^2 \\ +2Fz \\ +G \end{matrix}\right\} dzdu \left\{\begin{matrix} +Bu^2 \\ +3Euz \\ +Fu \\ +6Kz^2 \\ +3Lz \\ +M \end{matrix}\right\} dz^2 = 0;$$

On rendra cette équation différentielle propre au point double *G*, en y substituant, au lieu des indéterminées *(z)* & *(u)*, leurs valeurs en ce point double *G*, qui sont * $z = 0$ & $u = 0$, ainsi l'équation Σ deviendra $Ddu^2 + Gdzdu + Mdz^2 = 0$, d'où l'on tirera par le calcul ordinaire $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$. * *Art. 61.*

Cela posé, je dis que ces deux valeurs $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, & $-\frac{du}{dz} = \frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, feront connoître si le point double G est un point d'interſection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$*, ou s'il est un point de rebrouſſement de la courbe $MGmZEV$*, ou bien s'il est un point double inviſible de la courbe $MDmZEV$*. Car si l'on prend sur l'axe GQ le point Π, tel que $G\Pi = 2D$, & sur l'ordonnée principale GL le point Λ, tel que $G\Lambda = G$: si sur cette même ordonnée principale GL, de part & d'autre du point Λ, on prend les parties $\Lambda\theta$ & $\Lambda\Phi$ égales l'une & l'autre à $\sqrt{GG - 4DM}$: si l'on joint les points Π & θ, Π & Φ, par les droites $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$; & enfin si par le point double G, on tire les droites GT, Gt, paralleles à $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$, il est évident, par la doctrine des tangentes, que ces droites GT, Gt, feront les tangentes de la courbe au point double G. Or il est viſible qu'il peut arriver trois différents cas : car 1.° si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, sont des grandeurs réelles & inégales, ou bien réelles & égales, mais de différents signes, il est clair que les deux tangentes GT, Gt, feront réelles & distinctes l'une de l'autre. 2.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, sont réelles, égales & de mêmes signes, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, se confondront, & par conſéquent les deux tangentes GT, Gt, tomberont l'une sur l'autre, & ne feront plus qu'une même tangente. 3.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ sont imaginaires, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, feront imaginaires, &

* Fig. 41.
* Fig. 42.
* Fig. 43.

& par conséquent les deux tangentes GT, Gt. Mais dans le premier cas, y ayant deux tangentes * qui se coupent au point G, il doit y avoir deux branches de la courbe qui passent en G; donc le point double G sera un point d'intersection, lorsque les deux valeurs $-\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ sont des grandeurs réelles & inégales, ou des grandeurs réelles & égales, mais de différents signes; Dans le second cas, les deux tangentes se confondant en une, le point double G sera un point de rebroussement *, ou une osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée; Enfin dans le troisiéme cas, les deux tangentes GT, Gt, étant imaginaires, le point double G, quoique réel, & faisant partie de la courbe, n'aura point de tangente, & sera par conséquent un point double invisible sur le plan *, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée. Donc par le moyen de l'équation $\frac{du}{dz}=-\frac{G}{2D}\pm\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, on déterminera la nature du point double G, dont on connoît l'éxistence & la position par la proposition précédente. *Ce qu'il falloit trouver.*

* *Art.* 52.

* *Art. id.* *Voyés ce qui est dit en suite sur les Osculations & les Lemniscates infinim. petites.*

* *Art.* 52. & 59.

COROLLAIRE.

LXIV. Donc 1.° lorsque dans l'équation (10) * les coëfficients D & M sont affectés de signes contraires, le point double G est un point d'intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGmZEV$; car il est visible que l'expression $\pm\sqrt{GG-4DM}$ marque alors des grandeurs réelles & de différents signes. 2.° Lorsque dans la même équation marquée par (10) * les coëfficients D & M sont affectés du même signe, si $GG > 4DM$, le point double G est encore un point d'intersection: mais si $GG = 4DM$, ce point double G est un point de rebroussement,

* *Art.* 61.

* *Art. id.*

ou une oſculation, ou bien une Lemniſcate infiniment petite conjuguée : & ſi $GG < 4DM$, le point double G eſt un point conjugué, c'eſt-à-dire, un point double inviſible ſur le plan ; car dans le premier cas les expreſſions $\pm\sqrt{GG - 4DM}$ marquent des grandeurs réelles & de différents ſignes : dans le ſecond cas, ces expreſſions ſont égales à zero, & par conſéquent l'on a $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm 0$: dans le troiſiéme cas, les expreſſions $\pm\sqrt{GG - 4DM}$ ſont l'une & l'autre imaginaires.

EXEMPLE I.

* Fig. 41. LXV. Soit un triangle * quelconque $G\Pi\Lambda$, dont les trois côtés $G\Pi$ *(b)*, $G\Lambda$ *(c)* & $\Pi\Lambda$ *(a)*, ſont donnés ; ſi l'on prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G les deux côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, de ce triangle, & que l'on prenne la droite $G\Pi$ pour l'axe, & la droite $G\Lambda$ pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGDGmZEV$, dans laquelle le rapport des ordonnées QM *(u)* aux abſciſſes GQ *(z)* ſoit exprimé par l'équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = 0$, dans laquelle on

* Art. 61. ſuppoſe $f > 2g$; il eſt viſible, par la troiſiéme Propoſition *, que cette courbe a un point double à l'origine G de ſon axe GQ & de ſon ordonnée principale GL ; car quand GQ *(z)* $= 0$, on a $\overline{QM}^2$ *(uu)* $= 0$: de plus QM *(u)* étant $= 0$, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}gfb^2z^2 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$, & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz + \frac{1}{3}agbz + \frac{1}{2}gfbb - ccbb = 0$: or les deux premiéres égalités font

* Art. 61. connoître * que les droites GQ, GL, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe $MGDGmZEV$ en un point double G.

* Art. 62. Mais, par la quatriéme Propoſition * & le Corollaire qui la ſuit, il eſt clair que ce point double G eſt un point d'interſection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$, qui ſe coupent en G : car en comparant les coëfficients de l'équation générale marquée par *(10)* dans l'art. 61, avec ceux de

l'équation particuliére $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3$ $- \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = 0$, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}ab \times \overline{f+g}$, $M = \frac{2ccbb - gfbb}{2}$, ensorte qu'au point double G le rapport de (du) à $dz)$, c'est-à-dire, $\frac{du}{dz}$ $(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$ $= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4}\sqrt{4c^2b^6 - 4c^2b^6 + 2b^6gf} = -\frac{c}{b}$ $\pm \frac{1}{2b}\sqrt{2gf}$; or ces deux valeurs $-\frac{2c+\sqrt{2gf}}{2b}$ & $-\frac{2c-\sqrt{2gf}}{2b}$ étant réelles & inégales, font connoître * que le point double G est un point d'intersection de deux branches MGD, mGD. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.* * *Art.* 63.

C O R O L L A I R E.

LXVI. Ainsi en prenant sur l'axe la partie $G\Pi = b$, sur l'ordonnée principale GL la partie $G\Lambda = c$, & sur cette même ordonnée principale, de part & d'autre du point Λ, les portions $\Lambda\theta$, $\Lambda\Phi$, égales l'une & l'autre à $\frac{\sqrt{gf}}{\sqrt{2}}$, les droites $\theta\Pi$, $\Phi\Pi$, seront paralleles aux deux tangentes de la courbe au point double G.

E X E M P L E II.

LXVII. Les mêmes choses étant supposées comme dans l'Exemple précédent, soient encore pris les côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, du triangle $G\Pi\Lambda$, prolongés autant qu'il sera nécessaire, le premier pour l'axe des (z), le second pour l'axe des (u), c'est-à-dire, pour l'ordonnée principale d'une courbe MGm ZEV*, dont la nature est exprimée par l'équation b^4u^2 * Fig. 42. $+ 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + c^2b^2z^2 = 0$, il est visible, par la troisiéme Proposition *, que cette courbe a * *Art.* 61. un point double à l'origine G de son axe GQ & de son or-

donnée principale GL. Car quand GQ $(z) = 0$, on a $\overline{QM}^2$ $(uu) = 0$, & la valeur de $u = 0$, étant ſubſtituée dans l'équation, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}aazz + \frac{1}{3}afbz - c^2b^2 = 0$; or les deux premiéres égalités $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoître qu'il y a au point G deux ordonnées égales & deux abſciſſes égales, & par conſéquent que les droites GL, GQ, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe $MGmZEV$ en un point double G. Mais, par la quatriéme Propoſition & les Corollaires qui la ſuivent, il eſt évident que ce point double G eſt ici un point de rebrouſſement : car comparant chaque terme de l'équation donnée, dans cet exemple, avec celui qui lui correſpond dans l'équation générale de l'art. 61, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}afb$, $M = ccbb$, enſorte qu'au point double G le rapport de (du) à dz, c'eſt-à-dire, $\frac{du}{dz}$ $(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$ eſt $= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4}\sqrt{4ccb^6 - 4ccb^6} = -\frac{c}{b} \pm 0$; ce qui fait voir que les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$ & $-\frac{G}{2D} - \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}$, ſont deux racines réelles, égales & de mêmes ſignes, & par

* Art. 63. conſéquent * que le point double G eſt un point de rebrouſſement. Donc avant de ſuppoſer la courbe tracée ſur le plan, on connoît par ſon équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + c^2b^2z^2 = 0$, que cette courbe a un point de rebrouſſement à l'origine G de ſon axe. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXVIII. Donc en prenant ſur l'axe GQ la partie $G\Pi = b$, & ſur l'ordonnée principale la partie $G\Lambda = c$, ſi l'on joint les points Π & Λ, & que par le point G on tire la droite GP parallele à $\Lambda\Pi$, cette droite GP ſera tangente de la courbe $MGmZEV$ au point de rebrouſſement G.

EXEMPLE III.

LXIX. Les mêmes choses étant supposées comme dans le premier Exemple *, à l'exception de ce qu'il y a ici de particulier, soit une courbe *MDmZEV* *, dont le rapport des abscisses *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) est exprimé par l'équation $b^4u^2+2cb^3zu-\frac{1}{4}a^2z^4-\frac{1}{3}afbz^3+\frac{1}{3}agbz^3+\frac{1}{2}fgb^2z^2+c^2b^2zz=0$, dans laquelle $f>g$; il est visible, par la troisiéme Proposition *, que cette courbe a un point double à l'origine *G* de ses abscisses & de ses ordonnées. Car quand *GQ* (z) $=0$, on a $uu=0$, & cette valeur ($u=0$) étant substituée dans l'équation donnée, on a $\frac{1}{4}a^2z^4+\frac{1}{3}afbz^3-\frac{1}{3}agbz^3-\frac{1}{2}fgb^2zz-ccbbzz=0$, d'où l'on tire $zz=0$ & $\frac{1}{4}a^2zz+\frac{1}{3}afbz-\frac{1}{3}agbz-\frac{1}{2}fgbb-ccbb=0$; or les deux premiéres équations $uu=0$ & $zz=0$ font connoître qu'il y a en *G*, origine de l'axe, deux abscisses égales & deux ordonnées égales entre elles, & par conséquent que l'axe *GQ* & l'ordonnée principale *GL* sont l'une & l'autre sécantes de la courbe, en deux points, à leur origine *G*; donc cette origine *G* est un point double de la courbe *MDmZEV*, dont la nature est exprimée par l'équation $b^4u^2+2cb^3zu-\frac{1}{4}a^2z^4-\frac{1}{3}afbz^3+\frac{1}{3}agbz^3+\frac{1}{2}fgb^2zz+c^2b^2zz=0$. Mais par la quatriéme Proposition * & les Corollaires qui la suivent, il est évident que ce point double *G* est ici un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite; car les coëfficients de l'équation marquée (10) * étant ici $\Delta=0$, $Q=0$, $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=b^4$, $E=0$, $F=0$, $G=2cb^3$, $K=-\frac{1}{4}a^2$, $L=\frac{agb-afb}{3}$, $M=\frac{fgbb+2ccbb}{2}$, on voit que les coëfficients *D* & *M* sont affectés des mêmes signes, & que GG ($4c^2b^6$) $<4DM$ ($2fgb^6+4c^2b^6$), ensorte que $\pm\sqrt{GG-4DM}=\pm\sqrt{-2fgb^6}=\pm b^3\sqrt{-2fg}$ sont des expressions imaginaires; d'où il suit que les deux racines $\frac{du}{dz}=(-\frac{G}{2D}\pm\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM})$

* Art. 65.
* Fig. 43.
* Art. 61.
* Art. 63.
* Art. 61.

$= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{-2fg}$ ſont imaginaires, & par conſéquent que le rapport du *(du)* au *(dz)*, au point double *G*, eſt un rapport imaginaire. Donc quoique ce point double *G* ſoit un point de la courbe (puiſque le rapport des coordonnées *(z)* & *(u)* y eſt réel) elle n'y a pas de tangente. Donc * ce point double *G* eſt un point double inviſible, ou, ce qui eſt la même choſe, une ovale infiniment petite conjuguée. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* *Art. 63.*

REMARQUES.

LXX. N'ayant pas établi tous les principes généraux qui ſervent à la connoiſſance des lignes du 4me ordre, ce n'eſt pas encore ici le lieu de faire connoître les différentes propriétés des trois courbes dont nous venons de parler dans les Exemples précédents; cependant il ne ſera pas hors de propos de faire remarquer en paſſant, 1.° Que ces trois courbes* ſont compoſées de quatre branches infinies, dont il y en a deux qui s'étendent du côté des *(z)* poſitifs, & deux autres qui s'étendent du côté des *(z)* négatifs. 2.° Qu'en tirant par le point *G* la droite *GP*, parallele au troiſiéme côté $\Pi\Lambda$ du triangle $G\Pi\Lambda$, & prolongée indéfiniment de part & d'autre du point *G*, cette droite *GP* coupe en deux portions égales toutes les droites, comme *Mm*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, & terminées de part & d'autre par la courbe, enſorte que cette droite *GP* eſt le diametre de la courbe.

* Fig. 41. 42. & 43.

A l'égard du premier Exemple *, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre *GP*, du côté où les *(z)* ſont négatifs, le point *B*, tel que *GB* ſoit $= \frac{2}{3} \times \overline{g+f}$, & ſur ce même diametre, de part & d'autre du point *B*, les parties *BD*, *BE*, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3}\sqrt{4gg-10fg+4ff}$, les points *D* & *E* ſeront les points de la courbe *MGDGmZEV* auxquels les tangentes ſont paralleles à l'ordonnée principale *GL*.

* Fig. 41.

2.° Que toutes les droites, comme *BC*, menées paralle-

lement à cette même ordonnée principale GL entre les points D & E, ne rencontreront la courbe en aucun point. Mais que toutes les droites, comme Mm & ZV, menées parallelement à cette même ordonnée principale [les premiéres au de-là du point D du côté des (z) positifs, les autres au de-là du point E du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelques distances qu'elles soient du point G, ensorte que les deux portions $MGDGm$, ZEV, de cette courbe seront séparées l'une de l'autre de la distance $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg - 10fg + 4ff}$.

3.° Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point F, tel que GF soit $= g$; si par ce point F on tire la droite IFK parallele à l'ordonnée principale GL, & si l'on prend sur cette droite IFK, de part & d'autre du point F, les portions FI, FK, égales l'une & l'autre à $\frac{g\sqrt{fg - gg}}{2a\sqrt{3}}$, les points I & K seront les points de la courbe auxquels les tangentes $I2$, $K3$, sont paralleles au diametre GP, ensorte que FI & FK sont les *maxima* du *folium* $GIDKG$.

4.° Toutes les droites menées parallelement au diametre GP, entre les tangentes $I2$, $K3$, rencontreront la courbe en quatre points, dont il y en aura toûjours deux entre les droites BC, GL, un au de-là de GL, & le quatriéme au de-là de BC; Mais les droites, comme Mz, menées parallelement à ce diametre GP au dessus de la droite $K3$, ou au dessous de la droite $I2$, telles que mv, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au de-là de la droite GL, du côté des (z) positifs, & l'autre au de-là de la droite BC, du côté des (z) négatifs.

5.° Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point H, tel que GH soit double de GB; si par le point H on tire parallelement à l'ordonnée principale GL une droite HZ prolongée de part & d'autre du point H jusqu'à ce qu'elle aille rencontrer en Z & en V les tangentes GT, Gt, du point double G, prolongées autant

qu'il ſera néceſſaire, je dis que ces points Z & *V* ſeront les points où ces tangentes *GT*, *Gt*, rencontreront la portion de courbe *ZζEuV*, enſorte que le *folium GIDKG* ſe trouvera tout entier dans le triangle *GZV*.

* Fig. 42. A l'égard du ſecond Exemple *, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre *GP*, du côté où les (ζ) ſont négatifs, le point *E*, tel que *GE* ſoit $= \frac{4}{3}f$, ce point *E* ſera le point de la courbe *MGmZEV* auquel la tangente eſt parallele à l'ordonnée principale *GL*.

2.° Que toutes les droites, comme *BC*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *E* & *G*, ne rencontreront la courbe en aucun point; mais que toutes les droites, comme *Mm*, *ZV*, menées parallelement à cette même ordonnée principale *GL* [les premiéres au de-là du point *G*, du côté des (ζ) poſitifs, les autres au de-là du point *E*, du côté des (ζ) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelque diſtance qu'elles ſoient du point *G*, enſorte que les deux portions infinies *MGm* & *ZEV* de cette courbe ſeront ſéparées l'une & l'autre de la diſtance $GE = \frac{4}{3}f$.

3.° Que toutes les droites, comme *MZ*, menées parallelement au diametre *GP*, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un deſquels ſera au de-là de la droite *GL*, du côté des (ζ) poſitifs, l'autre au de-là de la droite *BC*, du côté des (ζ) négatifs.

* Fig. 43. A l'égard du troiſiéme Exemple *, on peut remarquer, 1.° Qu'en prenant ſur le diametre *GP*, du côté où les (ζ) ſont négatifs, le point *B*, tel que *GB* ſoit $= \frac{2}{3} \times \overline{f - g}$, & ſur ce même diametre, de part & d'autre du point *B*, les portions *BD*, *DE*, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3}\sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$, ces points *D* & *E* ſeront les points de la courbe *MDmZEV* où les tangentes ſeront paralleles à l'ordonnée principale *GL*.

2.° Que toutes les droites, comme *BC*, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *D* & *E*, ne

ne rencontreront la courbe en aucun point, excepté la droite *GL*, qui paſſera par le point double inviſible, ou ovale infiniment petite *G*; mais que toutes les droites, comme *Mm*, *ZV*, menées parallelement à cette même ordonnée principale *GL*, les premiéres au de-là du point *D*, du côté des *(z)* poſitifs, les ſecondes au de-là du point *E*, du côté des *(z)* négatifs, rencontreront toûjours la courbe en deux points, à quelque diſtance qu'elles ſoient du point *G*, enſorte que les deux portions infinies *MDm*, *ZEV*, de cette troiſiéme courbe ſeront ſéparées & diſtantes l'une de l'autre de la grandeur $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$.

3.° Que toutes les droites, comme *MZ*, menées parallelement au diametre *GP*, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un deſquels, comme *M*, ſera au de-là de la droite *GL*, du côté des *(z)* poſitifs, l'autre au de-là de la droite *BC*, du côté des *(z)* négatifs.

PROPOSITION V.

THEOREME.

LXXI. *Si les indéterminées* (z) *&* (u) *de l'équation marquée ici par* (20) *repréſentent la premiére les abſciſſes* GQ, *la ſeconde les ordonnées* QM *d'une ligne du* 4me *ordre* MGDGARCRm*, *dont la nature ſoit exprimée par l'équation* (20) *(qui ne differe de celle de l'art. 61, marquée par* (10), *qu'en ce que les coëfficients indéterminés* F *&* L *ſont ici déterminés à être l'un* $F = \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, *l'autre* $L = 2\sqrt{KM}$) : *je dis que cette ligne a deux points doubles ſur ſon axe, l'un à l'origine* G *des abſciſſes, l'autre en un point* R *diſtant du point* G *de la grandeur* $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$; * Fig. 44. 45. 46. & 47.

$(20)\ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times u^2$

$$+ Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}} zz + Gz \times u + Kz^4$$

$$+ 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mz^2 = 0.$$

DÉMONSTRATION.

* *Art. 62.* On a déja vû * que toutes ces courbes ont un point double à l'origine *G* de leur axe, ainsi il reste à prouver qu'elles en ont un autre en *R*, ce qui est très-aisé : car, quand $u = 0$, l'équation *(20)* devient $K z^4 + 2\sqrt{KM} \times z^3 + M z z = 0$, égalité du 4me degré, dont les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$; les deux premiéres appartiennent visiblement au point double *G*, origine des indéterminées, & les deux derniéres à un point *R* pris sur l'axe, & distant de *G* de la grandeur $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Donc au point *R* il y a deux abscisses qui se confondent en une. Mais, en ce même point *R*, deux des ordonnées qui y correspondent, sont égales entr'elles : car en substituant dans l'équation *(20)* au lieu de *(z)* la valeur de cette indéterminée au point *R*, c'est-à-dire $-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, au lieu de *(z)* il vient l'égalité marquée ici par *(L)*

(L)... $\Delta u^4 + A u^3 - \frac{Q\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^3 + \frac{PM}{K} u^2 - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^2 + D u^2 = 0$,

dont les quatre racines donnent les valeurs des quatre ordonnees correspondantes au point *R* de l'axe *GQ* : or dans cette égalité il y en a deux réelles & égales entr'elles, qui sont $u = 0$ & $u = 0$; donc au point *R* il y a non seulement deux abscisses qui se confondent en une, mais encore deux ordonnées égales entr'elles & à zero ; donc la courbe

* *Art. 51.* passe deux fois par ce même point *R* *, donc ce point *R* est

un point double de la courbe *MGDGARCRm*, auſſi-bien que le point *G*; donc toutes les courbes, dont la nature eſt exprimée par l'équation marquée par *(20)*, ont deux points doubles ſur leur axe. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

LXXII. *Toutes choſes demeurant les mêmes comme dans le Théor. précédent, déterminer la nature du ſecond point double* R, *c'eſt-à-dire, connoître ſi ce ſecond point double eſt un point d'interſection de deux branches, ou s'il eſt un point de rebrouſſement, ou enfin s'il eſt une ovale infiniment petite conjuguée.* La nature du point double *G* étant déja déterminée par la quatriéme Propoſition, on ne la détermine pas ici.

SOLUTION.

La Solution de ce Probleme ne differe preſque pas de celle de l'art. 63. En effet on cherchera d'abord * quel eſt le rapport du *(dz)* au *(du)* dans tous les points doubles de la courbe, en différentiant deux fois ſon équation, marquée par *(20)*, dans l'expoſé de la Propoſition précédente; cette double différentiation donnera l'équation différentielle, marquée ici par 2Σ. * *Art. 46.*

$$2\Sigma \ldots \left\{\begin{array}{l} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{array}\right\} du^2 \left\{\begin{array}{l} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ezz \\ +\frac{2E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}z \\ +\frac{2G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}z \\ +G \end{array}\right\} dz\,du \left\{\begin{array}{l} +Buu \\ +3Euz \\ +\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u \\ +\frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}u \\ +6Kzz \\ +6z\sqrt{KM} \\ +M \end{array}\right\} dz^2 = 0.$$

On rendra enſuite cette équation différentielle propre au point double *R*, dont on connoît l'éxiſtence & la poſition par l'équation rationnelle, marquée *(20)* *, en ſubſtituant dans l'equation différentielle, au lieu des indéterminées *(z)* * *Art. 71.*

* Art. 71. & (u), leurs valeurs au point R, qui sont * $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$ & $u = 0$, & cette équation différentielle 2Σ deviendra $\overline{\frac{BM}{K} - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + D} \times du^2 + \overline{\frac{EM}{K} - G} \times dz\,du + Mdz^2 = 0$, & ensuite $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}}$, égalité qui exprime les deux rapports de (dz) à (du) au point double R ; or il est visible qu'il peut arriver trois différents cas, car la grandeur $\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}$, qui est sous le signe radical, peut être ou une grandeur positive, ou une grandeur négative, ou bien être $= 0$, selon que le quarré $\overline{EM - KG}^2$ est plus grand, ou plus petit, ou égal à $4KM \times \overline{KD + BM - C\sqrt{KM}}$.

Dans le 1er cas les deux rapports $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}}$ sont réels ; d'où il suit qu'il y a au point double R deux tangentes, & par conséquent * que ce point double R est un point d'intersection de deux branches ARC, CRM, de la courbe $MGDGARCRm$.

* Art. 52.

Dans le second cas, les deux rapports précédents sont imaginaires ; d'où il suit qu'il n'y a point de tangente au point double R, & par conséquent * que ce point double est invisible, c'est-à-dire, qu'il y a en ce point R une ovale infiniment petite qu'on peut nommer le point conjugué de la courbe $MDACm$.*

* Art. id.

* Fig. 46.

Dans le troisiéme cas, les deux rapports précédents sont

l'un & l'autre égaux à $\frac{KG-EM}{2KM} \pm o$; d'où il ſuit que les deux tangentes au point double ſe confondent en une, & par conſéquent que ce point double R eſt ou un point de rebrouſſement * de la courbe $MGDGARm$, ou une oſculation, ou bien une Lemniſcale infiniment petite conjuguée. *Art. 52.

Voyés ce qui eſt dit dans la ſuite de ce Traité ſur les Oſculations & les Lemniſcales infiniment petites conjuguées.

Donc l'équation différentielle, marquée ci-deſſus par 2Σ, fera toûjours connoître la nature du point double R: & avant même de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoîtra ſi ce point double R eſt ou une interſection, ou un point conjugué, ou un rebrouſſement, en ſe ſervant de l'égalité $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM-KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

LXXIII. Soit la courbe $MGDGARCRm$* dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'équation ſuivante *Fig. 44.

$$z = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}.$$

Je dis 1.° que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un à l'origine G de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$; 2.° Que ces deux points doubles ſont des points d'interſection de différentes branches. Car en faiſant évanoüir les ſignes radicaux de l'équation donnée, on a l'équation $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, qui eſt viſiblement un cas particulier de l'équation générale marquée par (20) dans l'art. 71. En effet il eſt viſible par la cinquiéme propoſition, que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ; car quand $uu = o$, on a $zz = o$ & $zz + 2az + aa = o$, les deux premiéres égalités $uu = o$, $zz = o$, font connoître que les droites GQ, GL, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe en un point double G qui

eſt à l'origine des abſciſſes & des ordonnées ; & la premiére & la troiſiéme égalité $uu = 0$ & $zz + 2az + aa = 0$, ſont connoître que l'axe GQ & une droite RC parallele aux ordonnées QM, & diſtante de G de la grandeur $GR = -a$, ſont l'une & l'autre ſécantes de la même courbe $MGDGA$ $RCRm$ en un autre point double R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Mais par les quatriéme & cinquiéme Propoſitions il eſt évident que les points G & R ſont l'un & l'autre des points d'interſection de la courbe $MGDGARCRm$: car en comparant l'équation donnée $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$ avec les équations générales marquées par *(10)* & par *(20)* dans les art. 62 & 71, on trouve $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{4}aa$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$; $L\,(2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$ & $M = -\frac{1}{4}aa$, enſorte

1.° Qu'au point double G, le rapport de (du) à (dz) c'eſt-

* Art. 63. à-dire $\frac{du}{dz}\left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}\right)^* = \pm 1$;

2.° Qu'au point double R, le rapport de (du) à (dz), ou, ce qui revient au même, $\frac{dz}{du}\left(\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}\right.$

* Art. 72. $\left.\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}\right)^*$
$= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa}\sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0 - 0 + \frac{1}{16}aa} = \pm 1$.

Or puiſqu'au point double G, $\frac{du}{dz} = \pm 1$, il s'enſuit qu'il y a deux tangentes en ce point double, & par conſéquent une interſection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGARCRm$; De même, puiſqu'au point double R, $\frac{dz}{du} = \pm 1$, il s'enſuit qu'il y a auſſi deux tangentes en ce point double, & par conſéquent deux branches finies ou infinies, de la courbe $MGDGARCRm$, qui y paſſent. Donc il eſt évident, par les Propoſitions quatriéme

& sixiéme, que les deux points doubles G & R de la courbe *MGDGARCRm*, dont la nature est exprimée par l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}$, sont des points d'intersection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIV. Donc* 1.° si, de part & d'autre du point double G, on prend sur l'axe GQ les parties $G\Pi$, $G\Lambda$, $= 1$; si des points Π & Λ on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites ΠT, Λt, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre aussi $= 1$, les droites GT, Gt, seront visiblement les deux tangentes de la courbe au point double G. 2.° Si, de part & d'autre du point R, on prend sur l'axe GQ les parties Rq, Rf, l'une & l'autre $= 1$, & si des points q & f on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites qT, ft, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre $= 1$, les droites RT, Rt, seront les deux tangentes de la courbe au point double R. * Fig. 44.

EXEMPLE II.

LXXV. Soit la courbe *MGARm**, dans laquelle le rapport des abscisses $GQ\ (z)$ aux ordonnées $QM\ (u)$ est exprimé par l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$; je dis que cette courbe a deux points de rebroussement sur son axe GQ, l'un à l'origine G de ses abscisses, l'autre au point R, distant de l'origine G de la grandeur $GR = -a$; car l'équation donnée étant délivrée des signes radicaux, devient $au^3 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, & sous cette forme elle se rapporte aux équations générales marquées par *(10)* & par *(20)* dans les art. 62 & 71. En effet dans cet Exemple les coëfficients indéterminées Δ, Q, A, B, C, D, E, &c. des art. 62 & 71, sont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right)$ * Fig. 45.

$= 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L\ (2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$; $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $L\ (-\frac{1}{2}a)$ étant $= 2\sqrt{KM}$, & le coëfficient $F(o)$ étant $= \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, il s'ensuit* que la courbe $MGARm$ a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G des abscisses & des ordonnées, l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR = -a = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Mais le rapport de (dz) à (du) au point double G étant toûjours exprimé par $\frac{du}{dz}\ (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$* $= 0 \pm \frac{a}{o}$, il s'ensuit que les deux tangentes de la courbe au point double G se confondent avec l'ordonnée principale GL, & par conséquent que ce point double G est un point de rebroussement auquel l'ordonnée principale GL est tangente : de même le rapport de (du) à (dz) au point double R, étant exprimé par $\frac{dz}{du}\ (\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD})^*$$

$= \frac{o \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa}\sqrt{o + \frac{1}{4}aa \times o} = o \pm \frac{4 \times o}{a} = \pm \frac{o}{a}$, il s'ensuit * que les deux tangentes au point double R se confondent en une & avec une droite RC menée par le point double R parallelement aux ordonnées, & par conséquent que ce point double R est encore un point de rebroussement, auquel la droite RC parallele aux ordonnées QM est tangente. Donc avant de supposer la courbe $MGARm$ décrite sur le plan, on connoît par son équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$ non seulement que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ, mais encore le lieu où ces deux points doubles sont situés, & quelle est leur nature. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* Art. 71.

* Art. 63.

* Art. 72.

* Art. 63. & 72.

EXEMPLE

EXEMPLE III.

LXXVI. Soit la courbe $MDACm$* dans laquelle le rapport des abſciſſes $GQ\,(z)$ aux ordonnées $QM\,(u)$ eſt exprimé par l'équation *Fig. 46.

$$z = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$$

on trouvera que cette courbe a ſur ſon axe GQ deux points doubles inviſibles : ou, ce qui revient au même, deux ovales infiniment petites, qu'on peut nommer, avec M. Newton, *deux points conjugués,* l'un à l'origine G des abſciſſes, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Car, par l'évanoüiſſement des incommenſurables, cette équation devient $au^3 - \tfrac{1}{4}a^2u^2 = \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{2}az^3 + \tfrac{1}{4}aazz$, & ſous cette forme elle ſe rapporte évidemment aux équations (10) & (20) des art. 61 & 71. En effet, dans cet Exemple, les coëfficients des équations (10) & (20) ſont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -\tfrac{1}{4}aa$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0$; $G = 0$, $K = -\tfrac{1}{4}$, $L = -\tfrac{1}{2}a = -2\sqrt{KM}$, $M = -\tfrac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $F = 0$ étant auſſi égal à $\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, & le coëfficient $L = -\tfrac{1}{2}a$ étant auſſi égal à $-2\sqrt{KM}$, il s'enſuit* que la courbe $MDACm$ a deux points doubles ſur ſon axe GQ, l'un à l'origine G de cet axe, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -\frac{L}{2K}$, qui eſt ici $= -a$. *Art. 71.

Mais ces deux points doubles G & R ſont des points conjugués : car 1.° au point double G le rapport de dz à du étant toûjours exprimé par cette fraction $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}$

$\sqrt{GG - 4DM}$, & les coëfficients G & D étant ici égaux, l'un à zero, l'autre à une grandeur négative, on a $\frac{du}{dz} = 0 \mp \sqrt{-1}$. Or ces deux grandeurs $\mp \sqrt{-1}$ étant l'une & l'autre des grandeurs imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes de la courbe au point double G sont imaginaires, tandis que le rapport de l'abscisse à l'ordonnée correspon-
* Art. 63. dante y est réel ; donc * le point double G est un point conjugué. 2.° Au point double R le rapport de dz à du étant toûjours exprimé par $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD},$$

& ces grandeurs étant ici $= \mp \sqrt{-1}$, qui sont des imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes au point dou-
* Art. 72. ble R sont imaginaires, & par conséquent * que ce point double R est un point conjugué aussi-bien que le point double G. Donc avant de supposer la courbe décrite, soit par un mouvement continu, soit par plusieurs points, on connoît par son équation non seulement qu'elle a deux points conjugués sur son axe, mais encore la situation de ces points. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXVII. Il n'est peut-être pas hors de propos de faire remarquer ici, 1.° Que les trois courbes dont on a parlé dans les trois derniers Exemples, sont composées chacune de deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de l'ordonnée principale GL, mais du même côté par rapport à l'axe GQ. 2.° Qu'après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point B on mene une droite BAI parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe, ensorte que cette droite BI sera le

diametre de la courbe. Voilà ce que ces trois courbes ont de commun ; voici maintenant ce qu'elles ont de propre.

Dans le premier Exemple *, si l'on prend 1.° sur le diametre BI, du côté où les (u) sont négatifs, le point E, tel que BE soit $= \frac{1}{6} a$; si par ce point E on mene la droite EH parallele à l'axe GQ, & qu'on prenne sur cette droite EH, de part & d'autre du point E, les parties EH, EF, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{27}}}$, & les parties EK, EO, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{27}}}$, les points H, F, K, O, seront les points de la courbe qui ont des tangentes Hf, Ff, Kf, Of, paralleles aux ordonnées QM. * Fig. 44.

2.° Si on prend sur l'ordonnée principale GL & sur sa parallele RI, du côté où les (u) sont négatifs, les points D & C, tels que GD & RC soient l'une & l'autre $= \frac{1}{4} a$, les points D & C seront deux des points de la courbe MGD $GARCRM$ auxquels les tangentes DT, CT, sont paralleles à l'axe.

3.° Si on prend sur le diametre BI, du côté où les (u) sont positifs, le point A, tel que BA soit égal à la racine réelle de cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, on aura le point où ce diametre est coupé par la courbe parallelement à l'axe, ensorte que la tangente AT en ce point est parallele à l'axe GQ; Sur quoi il faut remarquer que cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu = \frac{1}{64}a^3$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle : D'où il suit que le diametre BI ne rencontre la courbe qu'en un seul point A.

4.° Toutes les droites, comme EH, menées parallelement à l'axe GQ, entre les points A & D, coupent la courbe en quatre points ; Toutes les droites, comme Mm, menées parallelement au même axe GQ au dessus du point A, par rapport au point B, couperont toûjours la courbe en deux points, à quelque distance que le point I soit du point A; Enfin toutes les droites menées parallelement à l'axe au

deſſous du point *D* par rapport au point *G*, ne couperont la courbe en aucun point; D'où il ſuit que cette courbe *MGDGARCRm* s'étend à l'infini du côté des *(u)* poſitifs, & ne s'étend pas au de-là des points *D* & *C* du côté des *(u)* négatifs.

5.° Toutes les droites menées parallelement à l'ordonnée principale *GL* entre les droites *Hf*, *Kf*, & entre les droites *Ff*, *Of*, coupent la courbe en trois points : mais celles qui ſont menées parallelement à la même ordonnée principale *GL*, entre les droites *Hf*, *Ff*, ne la coupent qu'en un ſeul point, de même que les droites menées parallelement à l'ordonnée principale au de-là des droites *Kf*, *Of*, par rapport au point *G*.

Enſorte qu'il eſt aiſé de s'appercevoir, 1.° Que la courbe *MGDGARCRm* eſt compoſée de deux branches infinies *GM*, *Rm*, de deux *folium* *GHDKG*, *ROCFR*, & d'une ſinuoſité *GAR*, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Bifolium-Parabolique*. 2.° Que ces quatre parties principales de la courbe *MGDGARCRm* ſont continües, le folium *GHDKG* n'étant qu'une prolongation de la branche infinie *GM* : la ſinuoſité *GAR*, une prolongation du demi-folium *DKG* : le folium *ROCFR*, une prolongation de la ſinuoſité *GAR*, & enfin la branche infinie *Rm*, une prolongation du folium *ROCFR*.

* Fig. 45. A l'égard du ſecond Exemple*, 1.° ſi l'on prend ſur le diametre *BI*, du côté où les *(u)* ſont poſitifs, la droite $BA = \frac{1}{4}a$, on aura le point *A* où la courbe *MGARm* coupe le diametre, & où la tangente *AT* eſt parallele à l'axe.

2.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe *GQ*, entre cet axe & la tangente *AT*, couperont la courbe en quatre points, au lieu que toutes les droites, comme *MIm*, menées parallelement à ce même axe *GQ* au de-là du point *A*, par rapport au point *B*, ne la couperont qu'en deux points, à quelque diſtance que le point *I* ſoit du point *G* : enfin toutes les droites menées parallelement à ce même axe *GQ* au de-là du point *B*, par rapport au point *A*, ne rencontre-

ront la courbe en aucun point, enſorte que cette courbe eſt toute entiére du côté des (u) poſitifs, & n'a par conſéquent que des ordonnées poſitives.

3.° Toutes les droites, comme QM, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, ne rencontrent la courbe qu'en un ſeul point, ſoit que le point Q ſoit ſitué entre les points doubles rebrouſſants G & R, ou au de-là de ces points doubles par rapport au point B, & à quelque diſtance qu'ils ſoient de ces points doubles G & R.

Enſorte qu'il eſt aiſé de voir que cette courbe n'a que deux branches infinies AGM, ARM, qui font, pour ainſi dire, deux cornes aux points rebrouſſants G & R, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole-Diceratoïde*.

Pour ce qui eſt maintenant du troiſiéme Exemple *, on remarquera, 1.° Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale GL & ſur ſa parallele RI, du côté où les (u) ſont poſitifs, les droites GD, RC, l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, on aura les points D & C de la courbe $MDACm$ où les tangentes DT, CT, ſont paralleles à l'axe GQ. * Fig. 46.

2.° Si on prend ſur le diametre BI, du côté où les (u) ſont poſitifs, la droite BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 - \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, le point A ſera celui où le diametre BI eſt coupé parallelement à l'axe par la courbe $MDACm$, enſorte que la tangente AT au point A ſera parallele à l'axe GQ.

3.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre les points G & D, ne rencontreront pas la courbe, non plus que leurs paralleles menées de l'autre côté du point G par rapport au point D.

4.° Mais toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre les tangentes DT, AT, rencontreront la courbe en quatre points, tandis que leurs paralleles MIm, menées au de-là du point A, par rapport au point B, ne la rencontreront qu'en deux points, à quelque diſtance que le point I ſoit du point A.

5.° Que toutes les droites, comme QM, menées paral-

lelement à l'ordonnée principale GL, entre les points doubles G & R, ou au de-là de ces points doubles par rapport au point B, ne rencontreront la courbe qu'en un ſeul point M, à quelque diſtance qu'elles ſoient de ces points doubles G & R.

Enſorte qu'il eſt aiſé de concevoir, 1.° Que la courbe $MDACm$, dont la nature eſt exprimée par l'équation $z + \frac{1}{2}a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$, n'a que deux branches ADM, ACm (leſquelles étant, pour ainſi dire, *reſléchies* aux points D & C *par ſinuoſité*, parallelement à l'axe GQ, s'étendent à l'infini de part & d'autre du diametre BAP) & deux points conjugués, ou, ce qui eſt la même choſe, deux ovales infiniment petites G & R, diſtantes de la courbe de la grandeur DG, ou $CR = \frac{1}{4}a$, & ſéparées l'une de l'autre par la droite $GR = a$, ce qui peut faire donner à cette courbe le nom de *Parabole-Biponctuée*.

EXEMPLE IV.

* Fig. 47. LXXVIII. Soit la courbe $GaRMDLGAR\Phi CHG$*, dont GQ eſt l'axe, & GL l'ordonnée principale, faiſant entr'elles un angle quelconque LGQ, & dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'équat. $z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{bb \pm 4u\sqrt{\frac{1}{2}aa - uu}}$, où l'on ſuppoſe $b < a$; je dis que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un en G, origine des abſciſſes GQ (z) l'autre en un point R, diſtant de G de la grandeur $GR = b$, & que ces deux points doubles ſont deux points d'interſection de différentes branches. Car en faiſant évanoüir les ſignes radicaux de l'équation donnée, on a cette équation $\frac{1}{2}a^2u^2 - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$, qui eſt un cas particulier de l'équation marquée par (20) dans l'art. 71. En effet, en comparant ces deux équations, on trouve que les coëfficients Δ, Q, A, B, C, D, K, L, M, de l'équation marquée par (20) ſont ici $\Delta = -1$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}aa$, $E = 0$, $G = 0$, $F = 0$, $K = -1$, $L =$

$+2b$, $M = -bb$; or le coëfficient $L\ (2b) = 2\sqrt{KM}$ & $F = \frac{EM+GK}{\sqrt{KM}} = 0$. Donc * la courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un à l'origine G de ſes abſciſſes, l'autre en un point R, diſtant de G de la grandeur $GR = -\frac{L}{2K} = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}} = \frac{2b}{2} = b$. *Ce qu'il falloit prouver en premier lieu.* * *Art. 71.*

Mais ces deux points doubles G & R ſont ici des points d'interſection : car 1.° au point double G on a $\frac{du}{dz} = \left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}\right) = \pm\frac{b\sqrt{2}}{a}$; or les deux rapports $+\frac{b\sqrt{2}}{a}$ & $-\frac{b\sqrt{2}}{a}$, étant des grandeurs différentes l'une de l'autre à cauſe des différents ſignes $+$ & $-$ dont ils ſont affectés, il ſuit qu'il y a deux tangentes au point double G, & par conſéquent que ce point double eſt un point d'interſection de deux branches. 2.° Au point double R, on a $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM-KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM}-BM-KD}}$$

$= 0 \pm \frac{1}{2bb}\sqrt{2bbaa} = \pm\frac{a}{b\sqrt{2}}$; or ces deux valeurs $+\frac{a}{b\sqrt{2}}$ & $-\frac{a}{b\sqrt{2}}$, étant différentes l'une de l'autre à cauſe des ſignes $+$ & $-$ dont elles ſont affectées, il s'enſuit qu'il y a encore deux tangentes au point double R, & par conſéquent que ce point eſt une interſection de deux branches de la courbe $GaRMDLGAR\Phi CHG$. Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît non ſeulement qu'elle a deux points doubles ſur ſon axe, & le lieu où ils ſont ſitués, mais encore la nature de ces deux points doubles, qui eſt d'être des points d'interſection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIX. Donc si l'on prend sur l'axe GQ les points q & λ (le premier du côté où les z sont positifs, & le second du côté où les z sont négatifs) tels que les parties de l'axe Rq, $G\lambda$, soient l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: si par les points q & λ on mene parallelement à l'ordonnée principale GL; les droites qT, λT, prolongées de part & d'autre de l'axe jusqu'en θ, ensorte que qT, $q\theta$, λT, $\lambda\theta$, soient égales à (b) : si des points R & G on tire les droites RT, $R\theta$, GT, $G\theta$, il est visible que les deux premiéres RT, $R\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double R, & que les deux dernières GT, $G\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double G.

REMARQUES.

LXXX. On peut remarquer ici, 1.° Que toutes les droites, comme MN, menées en dedans de la courbe $GaRMDLGARNCnG$ parallelement à l'ordonnée principale GL, rencontrent cette courbe en quatre points M, μ, ν, N, & l'axe en un point Q, de telle façon néantmoins que $QM = QN$, & $Q\mu = Q\nu$; Car l'équation $\frac{1}{2}aauu - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$ donne $\pm u = \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$, ainsi en prenant GQ pour l'indéterminée (z), on aura $QM(+u)$ ou $QN(-u) = \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$ & $Q\mu\ (+u)$ ou bien $Q\nu\ (-u) = \frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$: d'où il suit que l'axe GQ est un des diametres de la courbe.

2.° Après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point B on mene une droite DBC parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement

parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe; Ensorte que cette droite BD sera l'autre diametre de la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$.

3.° Si l'on prend sur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les points A & a, tels que BA & Ba soient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - b^4}}$, & ensuite les points D & C, tels que BD & BC soient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - b^4}}$: les points A, a, & les points D & C, seront ceux où le diametre BD, prolongé de part & d'autre du point B, sera coupé par la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ parallelement à son axe GQ; Ensorte que les tangentes aux points A, a, D, C, seront paralleles à l'axe GQ.

4.° Si on prend sur l'ordonnée principale GL, de part & d'autre du point G, les parties GL, GH, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$, & sur la droite Rf, qui est parallele à GL, aussi de part & d'autre du point R, les parties Rf, RF, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: les points L & H seront ceux où la courbe coupe l'ordonnée principale parallelement à l'axe GQ, & les points f & F seront ceux où cette même courbe coupe Rf parallelement à l'axe; Ensorte que les tangentes aux points L, H, f, F, sont toûjours paralleles à l'axe GQ.

5.° Si on prend sur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les parties Be, BE, l'une & l'autre $= \frac{1}{2}a$: si par les points e & E on mene parallelement à l'axe GQ les droites $\zeta e\gamma$, $\phi E\delta$, sur lesquelles on prenne, de part & d'autre des points e & E, les parties $e\zeta$, $e\gamma$, $E\phi$, $E\delta$, chacune égales à $\frac{1}{2}\sqrt{bb + aa}$, les points ζ, γ, seront ceux où la droite $\zeta e\gamma$ est coupée par la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ parallelement à l'ordonnée principale GL, & les points ϕ & δ ceux où la droite $\phi E\delta$ est coupée par la même courbe $GaRMD$, &c. parallelement à la même

ordonnée principale GL, enſorte que les tangentes aux points $\mathfrak{C}$, γ, ϕ, δ, ſont paralleles à l'ordonnée principale GL.

6.° Toutes les droites menées parallelement aux ordonnées QM, au de-là des tangentes $\mathfrak{C}T$, γt, par rapport au point e, ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLG$ $ARNC\delta G$: mais comme BR $(\frac{1}{2}b)$ eſt toûjours moindre que $E\phi$ ou $e\mathfrak{C}$ $(\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$ il ſuit de tout ce qu'on a remarqué, que $\phi\delta$ ou ſon égale $\mathfrak{C}\gamma = \sqrt{bb+aa}$ ſont les *maxima* de la courbe par rapport à ſon axe.

7.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, au de-là des points L & H, ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$, enſorte que les points L & H ſeront les limites de la courbe par rapport à ſon ordonnée principale GL.

8.° Il ſuit des deux derniéres remarques, que la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ rentre en elle-même.

9.° Il eſt aiſé de s'appercevoir que BD ou ſon égale BC $(\frac{1}{2}\sqrt{aa+\sqrt{a^4-b^4}})$ eſt toûjours plus petit que RF ou $GL = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & que Rf ou $GH = \frac{a}{\sqrt{2}}$; Ainſi la courbe, en allant de F en D, ou de f en C, s'eſt rapprochée de ſon axe, & en allant de D en L, ou de C en H, elle s'en eſt éloignée ; De même on voit que la courbe, en allant de A en R, & de R en ϕ, s'éloigne toûjours de ſon diametre DC, parce que BR $(\frac{1}{2}b) < E\phi$ $(\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$; mais que cette même courbe, en allant de ϕ en C, ſe rapproche toûjours de ce même diametre DC, & enſuite s'en éloigne, en allant de C en δ, puis s'en rapproche, en allant de δ en G & en A: ce que je dis ici de la portion $AR\phi C\delta GA$, doit s'entendre auſſi de la portion $aR\mathfrak{C}D\gamma Ga$.

10.° Enfin de tout ce qu'on a dit dans cet article, il eſt viſible que la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$ forme deux eſpeces de cœurs, $AR\phi C\delta GA$ & $aR\mathfrak{C}D\gamma Ga$, qui ſe noüent enſemble aux points G & R. Ce qui m'engage à lui donner le nom de *Dicardie.*

AVERTISSEMENT.

Il y auroit encore bien des choses à remarquer au sujet de cette Dicardie ; *mais comme ce n'est pas ici le lieu de traiter des différentes propriétés des Courbes qui composent le quatriéme ordre, puisqu'il ne s'agit encore que des points doubles, je vais continuer les principes généraux.*

SCHOLIE I.

LXXXI. Soit l'équation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans l'art. 31 du premier Mémoire, dans laquelle z exprime les abscisses, & u les ordonnées de toutes ces courbes.

$$(4D)\ldots \Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\beta z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu} \times u + \nu z^4 + \rho z^3 + \phi z^2 + \pi z + \sigma = 0.$$

Si cette équation est telle, 1.° Que les quatre racines du dernier membre égalé à zero ($\nu z^4 + \rho z^3 + \phi z^2 + \pi z + \sigma = 0$) étant réelles, deux de ces racines soient égales entre elles, & les deux autres aussi égales entre elles. 2.° Si le pénultiéme membre est nul : ou bien, si les trois racines de ce pénultiéme membre, aussi égalé à zero ($\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu = 0$) étant réelles, deux de ces racines sont des diviseurs exacts du dernier membre ; Toutes les courbes, dont la nature sera exprimée par une telle équation, auront deux points doubles sur leur axe. Telles sont, par exemple, toutes les courbes dont la nature peut être exprimée par l'équation suivante,

$$\Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\beta z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{z^3 + 7Bz^2 + 14BBz + 8B^3} \times u + z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4 = 0;$$

parce que 1.° le dernier membre égalé à zero ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -B$, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -2B$, dont les deux premiéres sont égales entre elles & de mêmes

signes, & les deux dernières sont aussi égales entre elles & de mêmes signes. 2.° Parce que dans cette même équation le pénultiéme membre ($z^3 + 7Bz^2 + 14B^2z + 8B^3 = 0$) aussi égalé à zero, a trois racines réelles, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -4B$, dont les deux premiéres sont des diviseurs exacts du dernier membre ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4$). Ceci n'étant qu'une suite nécessaire de ce qui a été démontré dans les articles précédents, il est inutile de s'y arrêter davantage.*

* Voyés l'art. 51 du premier Mémoire.

SCHOLIE II.

LXXXII. Si l'équation générale marquée ($4D$)* a toutes les conditions requises par l'article précédent, & outre cela si les coëfficients δ, μ & π de cette équation sont tels que (g étant une grandeur positive ou négative déterminée par l'équation) l'on ait $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$, $\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$ & $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$; Toutes les courbes, dont la nature sera exprimée par l'équation marquée par ($4D$)*, auront trois points doubles : sçavoir, deux sur leur axe, à cause des conditions de l'article précédent, & un troisiéme sur leur ordonnée principale en un point B, distant de l'origine G des indéterminées de la grandeur $GB = -g$. Ceci n'est encore qu'une suite évidente des principes qu'on a établis jusqu'ici.*

* Art. préced.

* Art. préced.

* Art. 51 du prem. Mémoire.

COROLLAIRE.

LXXXIII. Donc les lignes du 4me ordre peuvent avoir trois points doubles, & il est aisé, en suivant les regles qui ont été données dans les art. 63 & 72, de connoître la nature de ce troisiéme point double : c'est-à-dire, de connoître s'il est ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite conjuguée.

EXEMPLE I.

LXXXIV. Soit la courbe $MRBKEVCR\varphi BVm$* telle que le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) soit exprimé par l'équation suivante :

* Fig. 48.

$2bu^3 + 3b^2u^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$;

Puisque le dernier membre égalé à zero ($z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -b$, $z = -b$, $z = b$ & $z = b$, dont les deux premiéres sont égales entre elles & de mêmes signes, & les deux derniéres aussi égales entre elles & de mêmes signes : puisque le pénultiéme membre ($\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu$) est nul, il est clair * que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ, dont le 1er est distant de G, origine des abscisses & des ordonnées de la grandeur $GR = b$, & le 2d distant de G de la grandeur $GV = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.* * *Art. 81.*

Mais outre cela cette courbe (par l'art. 82.) a un 3me point double sur son ordonnée principale en un point B distant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car après avoir comparé les termes de cette équation particuliére avec ceux de l'équation generale marquée $(4D)$ dans l'art. 81, on a $\Delta = 0$, $q = 0$, $A = 2b$, $\mathfrak{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\phi = 2bb$, $\sigma = -b^4$; & ensuite $\delta = 3bb$, $\mu = 0$, & $\pi = 0$. D'où il suit que les coëfficients δ, μ & π sont tels qu'il est requis par l'art. 82, c'est-à-dire, qu'ils sont $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, $\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, & $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$: car 1.° il est visible que $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, puisque la comparaison des termes a donné $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, & $q = 0$; 2.° puisque cette même comparaison des termes a donné $\mu = 0$, il est visible que la supposition de μ égal à $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, donne $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g} = 0$, & qu'en substituant dans cette formule, au lieu de A, Δ & σ, leurs valeurs déja trouvées, il vient $2bg^2 - \frac{2b^4}{g} = 0$, d'où l'on tire $g = b$. 3.° Il n'est pas moins évident, qu'en substituant dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg})$, ou, ce qui est la même chose, dans la formule $(4bg - \frac{b^4}{gg})$ au lieu de l'inconnuë (g) sa valeur (b) qui vient d'être trouvée : il est, dis-je, évident que cette grandeur devient

$= 3bb$, qui eſt préciſément la valeur qu'on a trouvée par la comparaiſon des termes pour le coëfficient δ, enſorte que ce coëfficient δ eſt, dans cet exemple, $= 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$.
Donc les trois coëfficients δ, μ & π, ont dans l'équation $2bu^3 + 3bbu^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$, les conditions requiſes par l'art. 82. Donc cette équation exprime la nature d'une courbe, qui (outre les deux points doubles qu'elle a ſur ſon axe par l'art. 81) en a encore un troiſiéme ſur ſon ordonnée principale GL en un point B diſtant de G, origine des indéterminées, de la grandeur $GB = -g = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu par cet Exemple.*

Maintenant pour connoître la nature de ces trois points doubles, on différentiera deux fois ſon équation, & l'on aura, après la ſeconde différentiation, $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt{\frac{6z^2 - 2b^2}{6bu + 3b^2}}$.

** Par la premiére partie de cet article.* Donc au point double R, ou * $z = b$, & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc ce point double R eſt une interſection

** Idem.* de deux branches. De même au point double V, où * $z = -b$,

** Art. 63.* & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. D'où il ſuit * que ce point double eſt encore une interſection de deux branches. Enfin

** Par la ſeconde part. de cet art.* au troiſiéme point double B, où * $z = 0$, & $u = -b$, on a

** Art. 63.* $\frac{du}{dz} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Donc * ce troiſiéme point double eſt encore une interſection de deux branches. Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît, par le moyen de ſon équation, non-ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles ſont trois points d'interſection. *Ce qu'il falloit faire voir en troiſiéme lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXV. On remarquera 1.° que l'ordonnée principale GL eſt toûjours le diametre de la courbe, puiſque l'on a $z = \pm\sqrt{bb \pm u\sqrt{2bu + 3bb}}$.

2.° Si l'on prend ſur cette ordonnée principale, du côté

où les (u) sont positifs, le point C, tel que GC soit $= \frac{1}{2}b$, le point C sera celui où la courbe rencontrera l'ordonnée principale parallèlement à l'axe GQ.

3.° Si par le point double B on tire parallelement à l'axe une droite EBF, & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point B, les points E & F, tels que BE ou BF soient l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: ces points E & F seront les points de la courbe où les tangentes deviennent paralleles à l'ordonnée principale GL.

4.° En prenant sur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) sont négatifs, le point A, tel que BA soit $= \frac{1}{2}b$: si par ce point A, on mene parallelement à l'axe une droite $KA\varphi$, & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point A, les points K & φ, tels que KA & $A\varphi$ soient l'une & l'autre $= b$: les points K & φ sont ceux où cette droite $KA\varphi$ touche la courbe $MRBKEVCR\varphi BVm$.

5.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale entre les points E & F, rencontrent la courbe en trois points. Mais celles qui sont menées, parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe qu'en un point. D'où il suit 1.° Que cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini du même côté par rapport à l'axe, & de part & d'autre de l'ordonnée principale GL. 2.° Que les portions de cette courbe qui se noüent avec les branches infinies, aux points doubles R, B, V, ne s'étendent pas au de-là des points E & F le long de l'axe GQ.

6.° Toutes les droites, menées parallelement à l'axe GQ entre les points C & A, rencontrent la courbe en quatre points. Mais celles qui sont menées parallelement à l'axe au de-là du point C, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & celles qui sont menées parallelement à l'axe au de-là du point A, par rapport au point G, ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit, 1.° que cette courbe ne s'étend pas au de-là du point A, du côté où les (u) sont négatifs, & que les points K & φ sont ses limites de ce côté-là: 2.° Que

les portions de cette courbe, qui se noüent avec les branches infinies aux points doubles R, B, V, ne s'étendent pas au de-là du point C le long de l'ordonnée principale GL.

7.° De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de voir que la courbe $MRBKEVCR\phi BVm$ est composée de deux branches infinies qui se noüent aux trois points R, B, V en formant une espece de Las-d'amour, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole Lemniscerotique*.

EXEMPLE II.

* Fig. 49. LXXXVI. Soit la courbe $ERB\mu fVAe\xi BVF\phi H\pi E$*, dont la nature est exprimée par $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$. Je dis que cette courbe a trois points doubles, R, V, B, qui sont trois points d'intersections. 1.° Il est visible* qu'elle a deux points doubles sur son axe, puisque le dernier membre de cette équation égalé à zero ($z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$) a quatre racines réelles,

* Art. 81.

$$z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}},\ z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}},\ z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}\ \&\ z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}};$$

dont les deux premiéres sont égales & de mêmes signes, & les deux derniéres aussi égales entre elles & de mêmes signes, & enfin parce que le pénult. membre ($\overline{\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu} \times u$) est nul. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.*

* Art. 82. 2.° Il est visible* qu'elle a un troisiéme point double sur son ordonnée principale GL en un point B distant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car en comparant l'équation particuliére de cette courbe avec l'équation générale marquée par ($4D$) dans l'art. 81, on a $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{4}{3}b$, $\mathfrak{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -4bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -\frac{2b^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $\pi = 0$ & $\sigma = \frac{5}{3}b^4$, ce qui donne 1.° $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = 0 = \pi$: & c'est une des trois conditions requises par l'art. 82: 2.° L'on a aussi ($Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$), ou, ce qui

est

eſt la même choſe, $-\frac{4}{3}bgg - 2g^3 + \frac{10b^4}{3g} = \mu = 0$, (puiſque $\mu = 0$), & cette ſeconde condition donne $g = b$; 3.° enfin cette valeur de g étant ſubſtituée dans la formule $2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$, ou, ce qui eſt la même choſe, dans ſon égale $-\frac{8}{3}bg - 3g^2 + \frac{5b^4}{3gg}$, il vient $(-4bb)$ qui eſt préciſément la valeur trouvée, par la comparaiſon des termes, pour le coëfficient δ: d'où il ſuit que ce coëfficient δ eſt, dans cet exemple, $= 2Ag - 2\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$. Donc les trois coëfficients δ, μ & π, ont, dans l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, toutes les conditions requiſes par l'article 82. Donc la courbe $ERB\mu fVAe\xi BVF\varphi H\pi E$, dont la nature eſt exprimée par cette équation, a trois points doubles R, V, B, les deux premiers ſur ſon axe GQ en des points R & V diſtants de G (origine des indéterminées) des grandeurs $GR = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ & $GV = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, & le troiſiéme ſur ſon ordonnée principale GL, en un point B, diſtant du point G de la grandeur $GB = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu par cet Exemple.*

Pour connoître la nature de ces trois points doubles, il faut * différentier deux fois l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, & la ſeconde différentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2 - 3z^2}}{\sqrt{3uu - 2bu - 2bb}}$. Enſorte qu'au point double R, où * $u = 0$ & $z = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il ſuit * que ce point double eſt un point d'interſection de deux branches. De même au point double V, où * $u = 0$ & $z = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il ſuit que ce point double V * eſt encore une interſection de

* Art. 52.

* Prem. partie de cet article.

* Art. 63.

* Prem. partie de cet article.

* Art. 63.

* Seconde part. de cet article. deux branches. Enfin au point double B, où * $z = 0$ & * Art. 63. $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$, ce qui fait voir * que ce point double B eſt une troiſiéme interſection. Donc avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on eſt aſſûré non ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles ſont trois points d'interſection, & l'on connoît leurs poſitions, par rapport à l'axe & à l'ordonnée principale. *Ce qu'il falloit faire voir en 3me lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXVII. Je ne m'arrête point ici à conſtruire les * Fig. 49. tangentes de la courbe * $ERB\mu fVAe\xi BVF$ aux points doubles B, R, V, parce qu'il n'y a rien de ſi facile, dès le moment qu'on a les rapports, des ordonnées de la courbe, en ces points, aux ſoutangentes qui leur correſpondent. Mais pour donner quelque idée de cette courbe, je remarquerai,

1.° Que l'ordonnée principale GL eſt ſon diametre, puiſque l'on a toûjours $z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} bb \pm u\sqrt{4b^2 + \frac{4}{3}bu - uu}}$.

2.° Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) ſont poſitifs, les points A & H, tels que GA ſoit $= \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, & $GH = \frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, on aura les points où la courbe coupe ſon ordonnée principale parallelement à ſon axe.

3.° En prenant ſur l'ordonnée principale GL la partie $GC = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, & $GD = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, ſi par les points C & D ainſi trouvés, on tire les droites $\varphi C\pi$, $\mu D\xi$, paralleles à l'axe GQ, ſur leſquelles on prenne, de part & d'autre des points C & D, les parties $C\varphi$, $C\pi$, & $D\mu$, $D\xi$; les unes & les autres $= b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$: les points φ, π, μ & ξ ſeront les quatre points, de la courbe, où les tangentes ſont paralleles à l'axe.

4.° Si par le point double B on mene, parallelement à l'axe GQ, une droite fBe, sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point B, les parties Bf, Be, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points f & e seront ceux où la courbe a des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) sont positifs, le point I, tel que GI soit $= 2b$: si l'on mene, par ce même point I, une droite EIF parallele à l'axe GQ, sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point I, les portions IE, IF, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points E & F seront deux autres points, de la courbe, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale GL.

6.° Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, au de-là des points C & D, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe en aucun point; De même toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F, par rapport à cette ordonnée principale GL, ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit que cette courbe ne s'étend pas au de-là des points φ & π, ni au de-là des points μ & ξ, le long de son ordonnée principale : & que, par rapport à son axe, elle ne s'étend pas au de-là des points E & F; Ensorte qu'elle est rentrante en elle-même.

7.° De-là il est aisé de conclure, que les droites $\varphi\mu$, $\pi\xi$, (l'une & l'autre, $= \frac{4}{5} b\sqrt{10}$) sont ses *maxima* paralleles à l'ordonnée principale, & la droite $EF = \frac{2b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, son *maximum* parallele à l'axe.

8.° On remarquera encore, que toutes les droites menées parallelement à l'axe, entre les points A & D, rencontrent la courbe en quatre points, aussi-bien que toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les points H & C; Mais celles qui seroient menées, parallelement à ce même

axe GQ, entre les points A & H, ne rencontreroient la courbe qu'en deux points.

9.° On remarquera auſſi, que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points f & e, rencontrent toûjours la courbe en quatre points : en comptant chaque point double R, B, V, pour deux points ſimples.

10.° De tout ce qui vient d'être dit, & de ce que GH $(\frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}) < GC(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$, il eſt aiſé de voir, 1.° Que la courbe en queſtion repréſente, du côté où les (u) ſont poſitifs, la figure d'un cœur $BE\pi H\phi FB$, dont la pointe eſt en B & le ſommet du milieu en H; 2.° Que la diſtance, du ſommet H aux ſommets ϕ & π, des oreilletes $H\phi F$, $H\pi E$, eſt $HC = \frac{1}{3}b\sqrt{10} - b$, & $C\phi$ ou $C\pi = \pm \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

11.° De ce que $GB\,(b) < GD\,(-\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$ il eſt aiſé de voir, 1.° Que cette même courbe forme une autre eſpece de cœur $Af\mu B\xi eA$, dont la baſe eſt en A, & le ſommet en B : 2.° Que la diſtance de ce ſommet B aux ſommets μ & ξ, des oreilletes $B\mu f$, $B\xi e$, eſt $BD = \frac{2}{3}b\sqrt{10} - \frac{5}{3}b$, & $D\mu$ ou $D\xi = \pm b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

12.° Enſorte que cette courbe eſt compoſée de deux cœurs $BRE\pi H\phi FVB$, & $AReB\mu fVA$, qui s'uniſſent au point double B, & ſe coupent, par leurs parties laterales, aux points R & V, ce qui lui procure les trois points doubles qui m'ont engagé de la donner ici pour exemple. On peut lui appliquer le nom de *Dicardie*, à cauſe des deux cœurs qu'elle repréſente : mais, pour la diſtinguer de celle dont il eſt parlé dans l'art. 78, il eſt à propos de la nommer *ſeconde Dicardie*.

EXEMPLE III.

* Fig. 50. LXXXVIII. Soit la courbe $MERAVFmNRBVn$*, dans laquelle le rapport des abſciſſes $GQ\,(z)$ aux ordonnées $QM\,(u)$ eſt exprimé par l'équation ſuivante

$$u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0.$$

Il eſt viſible, 1.° que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ en des points R & V, diſtans de G, origine des abſciſſes & des ordonnées, des grandeurs $GR = b$, & $GV = -b$. Car outre, que le dernier membre de cette équation égalé à zero $(z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0)$ a quatre racines réelles $z = b$, $z = b$, $z = -b$ & $z = -b$, dont les deux premiéres ſont égales & de mêmes ſignes, & les deux dernieres auſſi égales & de mêmes ſignes, il eſt clair que le penultiéme membre $(\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu)$ eſt nul : donc* cette courbe doit avoir deux points doubles ſur ſon axe GQ. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu.* * Art. 81.

2.° Il n'eſt pas moins évident * qu'elle a un troiſiéme point double B ſur ſon ordonnée principale GL. Car la comparaiſon des termes de l'équation donnée, avec ceux de l'équation générale marquée par $(4D)$ dans l'art. 81, donne $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, $\mathfrak{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2bb\sqrt{3}$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\phi = 2bb$, $\pi = 0$, & $\sigma = -b^4$. Cela poſé, il eſt viſible, 1.° Que $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = \pi = 0$, ce qui eſt déja une des conditions de l'art. 82 ; 2.° Outre cela $Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, ou, ce qui eſt la même choſe $\left(-\frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 2g^3 - \frac{2b^4}{g}\right)$ étant égalé à μ, on a $\frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + 2g^3 + \frac{2b^4}{g} = 0$, ou $g^4 + \frac{4bg^3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + b^4 = 0$, d'où l'on tire $g = -b\sqrt[4]{3}$: 3.° Cette valeur de g étant ſubſtituée, dans la formule $\left(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}\right)$, ou, ce qui eſt la même choſe, dans ſon égale $\left(-\frac{16b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}g - 3g^2 - \frac{b^4}{gg}\right)$ il vient $(2bb\sqrt{3})$ qui eſt préciſément la valeur trouvée, par la comparaiſon des termes, pour le coëfficient δ; D'où il ſuit que l'équation donnée $u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^3\sqrt{3} - z^4$ * Art. 82.

$+ 2b^2 z^2 - b^4 = 0$, a toutes les conditions requiſes, par l'art. 82, pour exprimer la nature d'une ligne du 4me ordre qui ait trois points doubles, deux ſur ſon axe en des points *R* & *V*, diſtants de *G* (origine des abſciſſes) de la grandeur $GR = b$ & $GV = -b$, & un troiſiéme ſur ſon ordonnée principale *GL*, en un point *B*, diſtant de *G* de la grandeur $GB = -g = b\sqrt[4]{3}$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu.*

3.° Pour connoître la nature des trois points doubles de
* *Art. 52.* cette courbe, il faut * différentier deux fois ſon équation ; la 2de différentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{bb - 3zz}}{\sqrt{4bu\sqrt[4]{3} - 3u^2 - bb\sqrt{3}}}$.
Enſorte qu'au point double *R*, ou (par la premiére partie de cet article) $u = 0$, & $z = b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce qui
* *Art. 63.* fait voir * que ce point double *R* eſt un point d'interſection. De même au point double *V*, ou (par la premiere partie de cet article) $u = 0$ & $z = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce
* *Art. id.* qui fait voir * que ce point double *V* eſt encore un point d'interſection. Enfin au point double *B*, ou (par la ſeconde partie de cet article) $z = 0$ & $u = b\sqrt[4]{3}$, on a $\frac{du}{dz} =$
* *Art. id.* $\pm \frac{b}{0} = \frac{b}{0}$: ce qui fait voir * que les deux tangentes au point double *B* ſe confondent en une & avec l'ordonnée principale *GL*, & par conſéquent que ce point double *B* eſt un point de rebrouſſement auquel l'ordonnée principale *GL* eſt tangente. Donc avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît non-ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore quelle eſt la nature de ces trois points doubles. *Ce qu'il falloit faire voir en 3me lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXIX. On peut remarquer ici, 1.° Que l'ordonnée principale *GL* eſt le diametre de la courbe

MERAVFmNRBVn, puiſque l'on a toûjours $z = \pm \sqrt{bb \pm u \sqrt{uu - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}} u + 2bb\sqrt{3}}}$.

2.° Si l'on prend ſur l'ordonnée principale *GL*, du côté où les *(u)* ſont négatifs, le point *A*, tel que *GA* ſoit $= \frac{b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, ce point *A* ſera le point de la courbe où la tangente devient parallele à l'axe.

3.° Si, par le point de rebrouſſement *B*, on mene, parallelement à l'axe *GQ*, une droite *EBF*: ſi l'on prend ſur cette droite, de part & d'autre du point *B*, les parties *BE*, *BF*, l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: les points *E* & *F* ſeront deux points d'infléxion de la courbe, dont les tangentes ſeront paralleles à l'ordonnée principale *GL*.

4.° Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les points *A* & *B*, rencontrent la courbe en quatre points; Mais les droites menées, parallelement à ce même axe *GQ*, au de-là des points *A* & *B*, par rapport au point *G*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & la rencontrent toûjours en deux points, à quelque diſtance qu'elles ſoient des points *A* & *B*, ſoit du côté des *(u)* négatifs, ſoit du côté des *(u)* poſitifs.

5.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *B* & *E*, ou entre les points *B* & *F*, ou au de-là des points *E* & *F*, par rapport au point *B*, ne rencontrent jamais la courbe qu'en deux points *M* & *N*, dont il y en a toûjours un du côté des *(u)* poſitifs, & un du côté des *(u)* négatifs.

6.° De tout ce qu'on a remarqué juſqu'ici, il eſt aiſé de comprendre, 1.° Que la courbe *MERAVFmNRBVn* eſt compoſée de quatre branches infinies *AREM*, *AVFm*, *BRN*, *BVn*, dont les deux premiéres *AREM*, *AVFm*, s'étendent à l'infini au-deſſus de l'axe *GQ*, c'eſt-à-dire, du côté où les *(u)* ſont poſitifs, & les deux derniéres au-deſſous de cet axe, du côté où les *(u)* ſont négatifs. 2.° Que les deux

premiéres branches $AREM$, $AVFm$ s'unissent en A, sommet d'une sinuosité dont la tangente est parallele à l'axe. 3.° Que les deux derniéres branches NRB, nVB s'unissent en B par un point de rebroussement, dont la tangente se confond avec l'ordonnée principale. 4.° Que la premiére & troisiéme branche $ARFM$, NRB, se coupent, sur l'axe GQ, en un point R, où elles forment par conséquent un point d'intersection. 5.° Que la seconde branche $AVFm$ coupe la quatriéme branche nVB, sur l'axe GQ, en un point V, où il se trouve par conséquent un second point d'intersection. 6.° Que les deux premiéres branches $AREM$, $AVFm$, ont chacune un point d'infléxion, l'une en E, l'autre en F; D'où il suit, que ces deux branches, après avoir été concaves vers leur ordonnée principale GL, de A en E, & de A en F, deviennent ensuite, l'une & l'autre, convexes vers cette même ordonnée principale GL. 7.° Enfin il est aisé de comprendre que les deux derniéres branches BRN, BVn, sont toûjours convexes vers leur ordonnée principale GL.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

XC. *Une ligne du 4me ordre étant donnée, trouver si elle a des points doubles ; Ou, ce qui est la même chose, l'Équation algébrique d'une ligne du 4me ordre étant donnée, connoître si cette équation exprime la nature d'une courbe qui ait des points doubles, & trouver les valeurs des abscisses & des ordonnées, de la courbe en question, correspondantes à ces points doubles.*

SOLUTION.

Soit donnée l'équation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans le premier Mémoire & dans l'art. 81 de celui-ci. Elle est désignée ici par $(4D)$.

$$(4D)\ldots \Delta u^4 \left.\begin{matrix} +qz \\ +a \end{matrix}\right\} u^3 \left.\begin{matrix} +\beta z^2 \\ +\gamma z \\ +\delta \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +\eta z^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix} +\nu z^4 \\ +\rho z^3 \\ +\varphi z^2 \\ +\pi z \\ +\sigma \end{matrix}\right\} = 0.$$

Après

Après avoir différentié cette équation, on aura le rapport des (dz) aux (du) exprimé par la fraction marquée ici par (F)

$$(F) \ldots \frac{du}{dz} = \frac{-qu^3 - \overline{2\beta z + \gamma} \times u^2 - \overline{3\varepsilon z^2 + 2nz + \lambda} \times u - 4\nu z^3 - 3\rho z^2 - 2\varphi z - \pi}{4\Delta u^3 + \overline{3qz + 3a} \times u^2 + \overline{2\beta z^2 + 2\gamma z + 2\delta} \times u + \varepsilon z^3 + nz^2 + \lambda z + \mu}$$

dont le numérateur & le dénominateur s'évanoüiſſent par tout où il y a des points doubles.

Soient de plus les équations ſuivantes marquées par (A) & par (B), qui ne different, la premiére du numérateur de la fraction (F) égalé à zero, la ſeconde du dénominateur de la même fraction, auſſi égalé à zero, qu'en ce que l'indéterminée (y) s'y trouve au lieu de l'indéterminée (u). Ces deux équations ſe rapportent à deux courbes, que je nomme *Auxiliaires*.

$$(A) \ldots\ldots qy^3 \left.\begin{matrix} +2\beta z \\ +\gamma \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +3\varepsilon z^2 \\ +2nz \\ +\lambda \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +4\nu z^3 \\ +3\rho z^2 \\ +2\varphi z \\ +\pi \end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(B) \ldots 4\Delta y^3 \left.\begin{matrix} +3qz \\ +3a \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +2\beta z^2 \\ +2\gamma z \\ +2\delta \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +nz^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} = 0.$$

L'équation marquée par (A) exprime la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, mais qui peut être au deſſous, dont l'axe eſt celui de la courbe déſignée par l'équation $(4D)$ & dont les abſciſſes ſont communes à l'une & à l'autre courbe. L'équation marquée par (B) exprime auſſi la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, dont l'axe eſt celui des courbes déſignées par les équations (A) & $(4D)$, & dont les abſciſſes ſont communes aux trois courbes.

Cela poſé, il eſt conſtant 1.° que les courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B) peuvent ſe rencontrer en différents points, & qu'aux points de rencontre, les ordonnées qui y aboutiſſent, ſont communes & à la courbe déſignée par l'équation (A) & à la courbe déſignée par l'équation (B).

2.° Il n'eſt pas moins évident, qu'en ſubſtituant dans l'équation *(A)*, au lieu de l'indéterminée *(y)*, ſa valeur (en *z* & en conſtante) priſe de l'équation *(B)*, on aura une égalité dans laquelle il n'y aura plus d'autre indéterminée que *(z)*, dont les racines réelles donneront les valeurs des abſciſſes, (communes à l'une & à l'autre courbe auxiliaire) correſpondantes aux points de rencontre des deux courbes.

3.° En ſubſtituant enſuite dans l'équation *(B)*, au lieu de l'indéterminée *(z)*, ſes valeurs (en conſtantes) priſes des racines réelles de l'égalité dont on vient de parler*, il eſt viſible qu'on aura de nouvelles égalités, dans leſquelles il n'y aura d'autre indéterminée que *(y)*, dont les racines réelles exprimeront les valeurs des ordonnées communes aux deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire, les valeurs des ordonnées correſpondantes aux points de rencontre de ces deux courbes.

* *n.° 2 de cet article.*

Ainſi, on aura les valeurs des abſciſſes & des ordonnées, des courbes auxiliaires, aux points où ces deux courbes ſe rencontrent : ou, ce qui eſt la même choſe, on aura les points de rencontre de ces deux courbes.

4.° Maintenant, ſi un ou pluſieurs points de rencontre, des courbes déſignées par les équations *(A)* & *(B)*, tombent ſur la ligne du 4me ordre déſignée par l'équation *(4 D)*, je dis que les endroits de la ligne du 4me ordre où tomberont les points de rencontre des courbes auxiliaires, ſeront autant de points doubles de cette ligne du 4me ordre. Car ces points étant alors communs aux trois lignes déſignées par les équations *(A)*, *(B)*, *(4 D)*, les ordonnées qui y correſpondent ſeront communes aux trois courbes : Donc, dans ces cas, l'indéterminée *(y)*, qui dans les équations *(A)* & *(B)* déſigne les ordonnées des deux courbes auxiliaires, ſera égale à l'indéterminée *(u)* de l'équation *(4 D)*, ou, ce qui eſt la même choſe, à l'indéterminée *(u)* de la fraction marquée par *(F)*. Or comme les équations *(A)* & *(B)* s'évanoüiſſent, lorſqu'on y ſubſtituë, au lieu de *(z)* & de *(y)*, leurs valeurs trouvées pour les points de rencontre des courbes auxiliaires (ce qui eſt évident par les premiers principes de l'Algebre) : il eſt viſible que

ſes numérateur & dénominateur de la fraction *(F)* s'évanoüiſſent dans tous les cas où u eſt $= y$; Et par conſéquent que les points de rencontre des courbes auxiliaires, qui tombent ſur la ligne du 4me ordre, y déſignent autant de points doubles.

Donc, après avoir trouvé, de la maniére qu'on l'a expliquée ci-deſſus*, les valeurs des abſciſſes & des ordonnées, des courbes auxiliaires déſignées par les équations *(A)* & *(B)*, aux points où ces deux courbes ſe rencontrent : on ſubſtituëra ſucceſſivement dans l'équation *(4D)*, au lieu de l'indéterminée *(u)*, les différentes valeurs de l'indéterminée *(y)*, & en même temps la valeur correſpondante de l'indéterminée *(z)* : ſi une ou pluſieurs des ſubſtitutions font évanoüir tous les termes de l'équation *(4 D)*, la ligne du 4me ordre, dont cette équation exprime la nature, aura un ou pluſieurs points doubles, & les valeurs des *(y)* & des *(z)* correſpondants, qui, ayant été ſubſtituées, auront fait évanoüir tous les termes de l'équation *(4D)*, déſigneront les ordonnées & les abſciſſes, de la ligne du 4me ordre, correſpondantes aux points doubles de cette ligne. Ainſi on ſera certain, non-ſeulement que la ligne donnée a des points doubles, mais encore on aura les valeurs des abſciſſes & des ordonnées qui correſpondent à ces points doubles. *Ce qu'il falloit trouver en 1er lieu.*

** n.° 2 & 3 de cet article.*

Après avoir ſubſtitué ſucceſſivement, dans l'équation *(4D)*, au lieu de l'indéterminée *(u)*, les valeurs trouvées, de l'indéterminée *(y)*, aux points de rencontre des deux courbes auxiliaires, & en même temps les valeurs correſpondantes de l'indéterminée *(z)*, ſi aucune des ſubſtitutions n'a fait évanoüir tous les termes de l'équation *(4 D)* : ou bien, ſi les deux courbes auxiliaires ne ſe rencontrent pas, ce qui peut arriver, c'eſt-à-dire, ſi la combinaiſon des équations *(A)* & *(B)* ne donne que des racines imaginaires : la ligne du 4me ordre, dont la nature ſera exprimée par l'équation *(4D)*, n'aura aucun point double. *Ce qu'il falloit trouver en ſecond lieu.*

EXEMPLE I.

XCI. On demande ſi la courbe, dont la nature eſt

exprimée par l'équation ſuivante marquée *(4 D)* a des points

$$(4D)\ldots aau^2 + \overline{az^2 + 3a^2z + 4a^3} \times u = z^4 + 6az^3 + 12a^2z^2 + 9a^3z + a^4$$

doubles. Après avoir différentié cette équation, on a la fraction marquée ici par *(F)*, d'où l'on tire les équations marquées par

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = \frac{-\overline{2az + 3aa} \times u + 4z^3 + 18az^2 + 24a^2z + 9a^3}{2a^2u + az^2 + 3a^2z + 4a^3}$$

(A) & par *(B)* qui ſont ici les équations des courbes auxiliaires.

$$(A)\ldots ay = 2z^2 + 6az + 3a^2$$

$$(B)\ldots 2ay + z^2 + 3az + 4a^2 = 0$$

Ces deux équations combinées enſemble donnent l'égalité $z^2 + 3az + 2a^2 = 0$, qui étant du 2[d] degré, fait connoître que les courbes auxiliaires (qui ſont ici deux paraboles coniques) ſe rencontrent en deux points, auſquels correſpondent les deux abſciſſes $z = -a$, & $z = -2a$, qui ſont les deux racines de l'égalité $zz + 3az + 2aa = 0$: or à l'abſciſſe $z = -a$ correſpond une ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui eſt $y = -a$; & à l'abſciſſe $z = -2a$ correſpond une autre ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui eſt auſſi $y = -a$.

Maintenant ſi l'on ſubſtituë, 1.° dans l'équation donnée *(4 D)*, au lieu des indéterminées *(z)* & *(u)*, les valeurs des *(z)* & des *(y)* du premier point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire $(-a)$ au lieu de *(z)*, & $(-a)$ au lieu de *(u)*, tous les termes de l'équation *(4 D)* s'évanoüiſſent : ce qui fait voir * que le premier point d'interſection des paraboles auxiliaires tombe ſur la ligne du 4[me] ordre, dont la nature eſt exprimée par l'équation *(4D)*, & par conſéquent qu'elle a un point double, auquel l'abſciſſe & l'ordonnée ſont l'une & l'autre $= -a$.

* *Art. préced.*

2.° Si l'on ſubſtituë dans cette même équation donnée *(4 D)*, au lieu des indéterminées *(z)* & *(u)* les valeurs des *(z)* & des *(y)* du ſecond point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'eſt-à-dire $(-2a)$ au lieu de *(z)* & $(-a)$ au lieu de *(u)*, tous les termes de l'équation *(4 D)* s'évanoüiſſent ;

ce qui fait voir* que la courbe propoſée a un ſecond point double, & qu'à ce ſecond point double l'abſciſſe eſt $= -2a$ & l'ordonnée $= -a$. *Art. précéd.

Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite, on connoît par ſon équation, non-ſeulement qu'elle a deux points doubles, mais encore les lieux où ces deux points doubles ſont ſitués par rapport à l'origine de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

EXEMPLE II.

XCII. On demande ſi la courbe $A\phi GEBFG\pi A$*, dont on ſuppoſe ne connoître encore que l'équation marquée ici par *(4D)*, a un ou pluſieurs points doubles. * Fig. 53.

$$(4D)\ldots u^4 - 4bu^3 \left.\begin{matrix}+2zz\\-4bz\\+9bb\end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix}-4bz^2\\+8b^2z\\-10b^3\end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix}+z^4\\-4bz^3\\+7b^2z^2\\-6b^3z\\+4b^4\end{matrix}\right\} = 0.$$

On trouve d'abord le rapport de *(du)* à *(dz)* exprimé par la fraction *(F)*.

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = -\frac{\left.\begin{matrix}+4z\\-4b\end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix}-8bz\\+8bb\end{matrix}\right\} u \begin{matrix}+4z^3\\-12bz^2\end{matrix} \begin{matrix}+14bbz\\-6b^3\end{matrix}}{4u^3 - 12bu^2 \left.\begin{matrix}+4z^2\\-8bz\\+18b^2\end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix}-4bz^2\\+8b^2z\\-10b^3\end{matrix}\right.}.$$

D'où il ſuit que les deux équations auxiliaires ſont telles qu'on les voit repréſentées ici en *(A)* & en *(B)*.

$$(A)\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}+4z\\-4b\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}-8bz\\+8bb\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}+4z^3\\-12bz^2\\+14b^2z\\-6b^3\end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(B)\ldots 4y^3 - 12by^2 \left.\begin{matrix}+4z^2\\-8bz\\+18b^2\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}-4bz^2\\+8b^2z\\-10b^3\end{matrix}\right\} = 0.$$

Ces deux équations ſont diviſibles, la première par $(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 6bb)$, la ſeconde par

$(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 10bb)$: Ainſi elles ſe réduiſent, l'une à l'équation $(2A)$, l'autre à l'équation $(2B)$.

$$(2A)\ldots z - b = 0, \quad (2B)\ldots y - b = 0,$$

La premiére des deux nouvelles équations déſigne une ligne droite parallele à l'ordonnée principale, & diſtante de l'origine des (z) de la grandeur (b) : la ſeconde déſigne auſſi une ligne droite parallele à l'axe, & diſtante de cet axe de la grandeur (b); D'où il ſuit que les deux courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B), qui ſe ſont réduites à de ſimples lignes droites, ſe coupent en un point, diſtant de l'axe de la grandeur (b) & de l'origine de cet axe d'une grandeur auſſi $= b$: ce qui fait voir déja que la courbe donnée peut avoir un point double.

Maintenant, ſi l'on ſubſtituë, dans l'équation $(4D)$, au lieu de (z) & de (u), les valeurs (b) & (b) des indéterminées (z) & (y) au point de rencontre des deux lignes auxiliaires: cette ſubſtitution fera évanoüir tous les termes de l'équation $(4D)$; D'où il ſuit que ce point de rencontre des lignes auxiliaires, tombe ſur la courbe donnée $A\varphi GEBFG\pi A$ en un point G diſtant de l'origine O de l'axe OP de la grandeur $OP(z) = b$, & de l'axe OP de la grandeur PG
* *Art. 90.* $(u) = b$, & par conſéquent * qu'il y a là un point double.

Donc, avant de ſuppoſer la courbe décrite, on connoît non-ſeulement qu'elle a un point double en G, mais encore qu'elle ne ſçauroit en avoir d'autres. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUE.

XCIII. Il eſt bon de remarquer que la Solution du Probleme précédent eſt, dans de certains cas particuliers, beaucoup plus courte & moins ſujette à de longs calculs, qu'elle ne l'eſt dans le général. Quelquefois on n'a pas beſoin d'avoir recours aux interſections des deux courbes auxiliaires, déſignées par les équations (A) & (B); c'eſt ce qui arrive lorſqu'il n'y a aucun mêlange de variable, ni dans le numérateur, ni dans le dénominateur de la fraction marquée par

(F) : car alors la ſeule extraction des racines des deux égalités formées, l'une par le numérateur égalé à zero, l'autre par le dénominateur auſſi égalé à zero, donne les valeurs des *(z)* & des *(u)*, qui étant ſucceſſivement ſubſtituées dans l'équation de la courbe, font connoître ſi la courbe a ou n'a pas de points doubles. Par exemple, on demande ſi la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'équation $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbz^2 = 0$, a des points doubles. Après avoir différentié l'équation, on a $\frac{du}{dz} = \frac{3bz^2 - 3bbz}{2u^3 - 2bbu}$: d'où l'on tire les deux égalités ſuivantes $z^2 - bz = 0$, & $u^3 - b^2u = 0$; Les racines de la premiére égalité ſont $z = 0$ & $z = b$, auſquelles correſpondent les racines $u = 0$ & $u = \pm b$ de la 2de égalité.

Or, 1.° $z = 0$ & $u = 0$ étant ſubſtitués dans l'équation propoſée $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbzz = 0$, tous les termes s'évanoüiſſent : ce qui fait voir que la courbe propoſée a un point double à l'origine de ſon axe. 2.° Si l'on ſubſtituë dans cette même équation, au lieu de *(z)* & de *(u)*, les valeurs $z = b$ & $u = \pm b$, tous les termes s'évanoüiſſent encore; D'où il ſuit que cette courbe a deux autres points doubles, de part & d'autre de ſon axe, diſtants de cet axe de la grandeur $u = \pm b$, & cela ſur une ligne droite parallele aux ordonnées, diſtante de l'origine des abſciſſes de la grandeur $z = b$.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

XCIV. *Les points d'interſection d'une ligne du 4me ordre, dont on a l'équation, étant donnés, déterminer ſi ce point d'interſection eſt un point double de la premiére, de la ſeconde, ou de la troiſiéme eſpece.*

SOLUTION.

Soit la courbe *MGDGARCRm**, dont *EP* eſt l'axe; * Fig. 44. Le rapport des abſciſſes *EP* aux ordonnées *PM* étant donné par une équation algébrique quelconque du quatriéme degré,

ſoit G un des points doubles de cette courbe, trouvé par le moyen de l'art. 90. Soit $G\Omega$ une droite parallele aux ordonnées PM, menée du point double G ſur l'axe EP; Soit ſuppoſé de plus qu'on a découvert, par l'art. 63, que ce point double G eſt un point d'interſection. On demande ſi ce point d'interſection eſt de la premiére, ſeconde, ou troiſiéme eſpece.*

* Art. 15.

Puiſque le point double G eſt donné de poſition, les droites $E\Omega$ & $G\Omega$ ſont données, ainſi on peut tranſporter l'origine des indéterminées de E en G, & par conſéquent prendre GQ pour l'abſciſſe, & QM pour l'ordonnée. D'où il ſuit qu'en nommant GQ (z) & QM (u), le rapport de GQ (z) à QM (u) ſera exprimé par une équation algébrique qu'on pourra toûjours rapporter à l'équation générale de l'art. 61, marquée ici par (10).

$$(10)\ldots \underline{\Delta u^4 + \overline{qz}} + \underline{\alpha u^3} + \underline{\overline{\beta zz + \gamma z + \delta}} \times uu$$
$$+ \varepsilon z^3 + \eta zz + \lambda z \times u + \nu z^4 + \rho z^3 + \varphi zz = 0.$$

Cela poſé, par l'art. 63, on menera les droites GT, Gt, tangentes de la courbe au point double G. Si l'une & l'autre de ces tangentes (*Fig. 44.*) rencontre la courbe chacune en un autre point N & n, le point double G n'eſt qu'un point double de la premiére eſpece*. Si l'une de ces tangentes GT peut rencontrer la courbe en un autre point N, tandis que l'autre tangente Gt ne ſçauroit la rencontrer en d'autre point qu'en G (*Fig. 59.*) alors le point double G eſt un point double de la ſeconde eſpece*. Enfin ſi la courbe n'eſt rencontrée, ni par la tangente Gt, ni par la tangente GT en d'autre point qu'au point double G, alors* ce point double G eſt de la troiſiéme eſpece.

* Art. 40. n.° 2.

* Art. 41. n.° 1.

* Art. id.

Maintenant le rapport de (dz) à (du) au point double G étant* exprimé par $\frac{du}{dz} = -\frac{\lambda}{2\delta} \pm \frac{1}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$; il eſt viſible que les ordonnées $Q\theta$ des tangentes tGn, TGN, ſont $= -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$. D'où il ſuit qu'aux

* Art. 63.

points

points n & N où les tangentes tGn, TGN coupent la courbe $MGDGARCRm$, on a $u = -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, & cette double valeur de l'indéterminée (u) étant ſubſtituée dans l'équation marquée par (10), il doit en réſulter deux égalités du quatriéme degré. Les racines de la premiére égalité donneront les points d'interſection de la tangente Gt & de la courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & n. Les racines de la ſeconde égalité donneront les points d'interſection de la tangente GT & de la même courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & N. Mais puiſque les droites Gt, GT, ſont tangentes de la courbe au point double G, origine des indéterminées (z), il eſt évident qu'il doit y avoir dans chaque égalité au moins trois racines égales à zero: puiſqu'en ce même point G il y a* une abſciſſe GQ $(z) = 0$, trois fois commune à la droite GT & à la même courbe $MGDGARCRm$. * *Art. 19.*

En effet, la ſubſtitution de $-\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, au lieu de ſon égal (u) dans l'équation marquée par (10), donne les deux égalités qu'on voit ici marquées, l'une par (H) l'autre par $(2H)$, dans chacune deſquelles il y a trois racines

$$(H)\ldots\left\{\begin{matrix} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\varphi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\varphi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\varphi^2 - 2\beta\varphi\delta^3 + 2\nu\delta^4 \\ \left.\begin{matrix} 2\Delta\lambda\delta\varphi - \Delta\lambda^3 \\ q\lambda^2\delta - q\delta^2\varphi \\ \varepsilon\delta^3 - \beta\lambda\delta^2 \end{matrix}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{matrix}\right\} z^4 - \left\{\begin{matrix} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\varphi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda^2\delta^2 \\ 2\gamma\varphi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{matrix} -\alpha\lambda^2\delta \\ +\alpha\delta^2\varphi \\ +\gamma\delta^2\lambda \\ -\eta\delta^3 \end{matrix}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{matrix}\right\} z^3 = 0.$$

$$(2H)\ldots\left\{\begin{matrix} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\varphi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\varphi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\varphi^2 - 2\beta\varphi\delta^3 + 2\nu\delta^4 \\ \left.\begin{matrix} \Delta\lambda^3 - 2\Delta\lambda\delta\varphi \\ q\delta^2\varphi - q\lambda^2\delta \\ \beta\lambda\delta^2 - \varepsilon\delta^3 \end{matrix}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{matrix}\right\} z^4 - \left\{\begin{matrix} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\varphi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda\lambda\delta^2 \\ 2\gamma\varphi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{matrix} +\alpha\lambda^2\delta \\ -\alpha\delta^2\varphi \\ -\gamma\delta^2\lambda \\ +\eta\delta^3 \end{matrix}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi} \end{matrix}\right\} z^3 = 0.$$

égales à zero, qui ſont pour le point G trois fois commun à

chacune des droites *Gt, GT*, & à la courbe *MGDGARCRm*, & une quatriéme, qui eſt pour les points ſimples *n* & *N*, où les tangentes *Gt, GT*, coupent la courbe *MGDGARCRm*.

Cela étant ainſi, il eſt viſible que ſi la 4me racine de l'égalité *(H)*, & la 4me racine de l'égalité marquée par *(2 H)* ſont autres que zero (ſoit qu'elles ſoient poſitives, ſoit qu'elles ſoient négatives) : il eſt viſible, dis-je, que les tangentes *Gt, GT* au point double *G* ſeront l'une & l'autre ſécantes de la courbe en des points comme *n* & *N*, & par conſéquent que le point double *G* ne ſera qu'un point double de la premiére eſpece.

Mais ſi la 4me racine d'une des égalités comme *(H)* eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de l'autre égalité *(2 H)* eſt autre que zero (ſoit qu'elle ſoit poſitive, ſoit qu'elle ſoit négative) : il eſt viſible que le point *n* ſe confond avec le point double *G*, tandis que le point *N* ne s'y confond pas. Enſorte que la branche *DGMn* a une infléxion en *G*, pendant que la branche *DGA* n'en a point en cet endroit, ce qui fait en *G* un point double de la ſeconde eſpece *.

* *Art. 15. & 21. n.° 2.*

Enfin ſi les quatriémes racines des deux égalités *(H)* & *(2 H)* ſont égales à zero, il eſt viſible que non-ſeulement le point *n*, mais encore le point *N* ſe confond avec le point double *G*, enſorte que la branche *DGA* a une infléxion en *G*, auſſi-bien que la branche *DGMn*, ce qui fait en *G* un point double * de la troiſiéme eſpece.

* *Art. id.*

Donc par le moyen des deux égalités précédentes, marquées par *(H)* & *(2 H)* on déterminera toûjours ſi le point double *G* eſt de la premiére, ſeconde ou troiſiéme eſpece. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE I.

* Fig. 51.

XCV. Soit la courbe * *MGDGARCRm*, dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, il eſt viſible (par les art. 61 & 63) que cette courbe a un point d'interſection à l'origine *G* de ſes abſciſſes *GQ*,

puiſqu'on y a $zz = 0$ & $uu = 0$, & qu'en ce même point G, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt{2}$. Mais il n'eſt pas moins évident, par l'art. 94, que ce point d'interſection eſt un point double de la ſeconde eſpece ; Car, ſi l'on compare l'équation donnée $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, avec l'équation générale marquée par *(10)* dans l'art. 94, on voit que les coëfficients indéterminés de l'équation *(10)* ſont ici $\Delta = 0$, $q = 0$, $\alpha = b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = -2b\sqrt{2}$, & $\varphi = -2bb$: Or, en ſubſtituant ces valeurs dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, on trouve que la premiére de ces égalités *(H)* devient $z^4 = 0$, & que la ſeconde *(2H)* devient $z^4 + 4bz^3\sqrt{2} = 0$, enſorte que la 4me racine de l'une de ces égalités eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de la ſeconde égalité eſt autre que zero. Donc * des deux tangentes tG, TG, de la courbe au point double G, il y en a une qui eſt tangente d'une branche DGM, qui a une infléxion en ce même point d'interſection G, tandis que l'autre TG eſt tangente d'une branche DGA qui n'a point d'infléxion au point d'attouchement G. Donc * le point double G n'eſt que de la ſeconde eſpece.

* *Art.* 94.
* *Art.* 15.

COROLLAIRE I.

XCVI. Puiſque la racine de l'égalité *(2H)* eſt $z = -4b\sqrt{2}$, il eſt évident qu'après avoir pris ſur l'axe GQ, du côté où les (z) ſont négatifs, le point q, tel que Gq ſoit $= 4b\sqrt{2}$, ſi par ce point, on mene une droite qN parallele aux ordonnées QM, le point N où cette droite rencontrera la tangente TG, prolongée autant qu'il ſera néceſſaire, ſera celui où cette même tangente TG rencontre la courbe $MGDGARCRm$, après l'avoir touchée au point double G.

COROLLAIRE II.

XCVII. Il eſt clair, par les art. 71 & 72, qu'en prenant ſur l'axe GQ, du côté où les (z) ſont négatifs, le point R,

tel que GR ſoit $= b\sqrt{2}$: il eſt clair, dis-je, que ce point R eſt encore un point d'interſection ou un ſecond nœud de la courbe $MGDGARCRm$. D'où il ſuit que ſi l'on tranſporte l'origine des abſciſſes de G en R, en faiſant RQ $(z + b\sqrt{2})$ $= x$, on aura l'équation $bu^3 + bbuu - x^4 + 2bx^3\sqrt{2} - 2b^2x^2 = 0$, qui exprime le rapport des abſciſſes RQ aux ordonnées QM. Cela poſé, il eſt évident que ce ſecond point double R eſt encore un point double de la ſeconde eſpece, ce qui ſe prouve en comparant cette nouvelle équation avec l'équation générale, marquée par (10) dans l'art. 94, de même que par la comparaiſon de l'équation
* *Art. 95.* $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, on a trouvé * que le point double G étoit un point double de la ſeconde eſpece.

REMARQUES.

XCVIII. On peut remarquer, 1.° qu'en prenant ſur la droite GL & ſur la droite RL, (l'une & l'autre paralleles aux ordonnées QM,) en prenant, dis-je, du côté où les (u) ſont négatifs, les points D & C, tels que GD & RC, ſoient l'une & l'autre $= b$: Les points D & C ſeront ceux où la courbe $MGDGARCRm$ coupe les deux droites GL, RL parallelement à l'axe GQ.

2.° Si ſur l'axe GQ on prend, du côté où les abſciſſes GQ ſont négatives, le point B, tel que GB ſoit $= \frac{b}{\sqrt{2}}$, ſi par ce point B, on éleve la droite BA parallele à GL, ſur laquelle on prenne la partie BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 + buu - \frac{1}{4}b^3 = 0$, le point A eſt celui où cette droite BA eſt coupée par la courbe $MGDGARCRm$ parallelement à ſon axe GQ.

3.° On peut remarquer encore que cette droite BA prolongée à l'infini eſt le diametre de la courbe $MGDGARCRm$; Que cette courbe a deux branches $AGDGM$, $ARCRm$, qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de ce diametre; Que chaque branche ſe noüe, l'une au point G, en formant le folium GDG, l'autre au point R, en formant le folium

RCR. Enfin que ces deux branches infinies ſont unies enſemble par l'arc *GAR* qui fait une eſpece de ſinuoſité, dont le ſommet eſt en *A*. Propriétés qui ſe déduiſent ſi aiſément de ſon équation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2b^2z^2 = 0$, qu'il ſuffit de les indiquer.

4.° Enfin il faut remarquer que cette courbe, qui eſt un *Biſolium parabolique*, ne differe du *Biſolium MGHDKGAROCFRm** de l'art. 73, qu'en ce que les deux points doubles de celui qu'on examine ici * ſont de la ſeconde eſpece, au lieu que ceux du *Biſolium* de l'art. 73 ſont de la premiére eſpece : ce qui ſuffit pour faire deux différentes eſpeces de courbe. * Fig. 44. * Fig. 51.

EXEMPLE IV.

XCIX. Soit la courbe *AGDGMEHFNRCRA** dans laquelle le rapport des ordonnées *BQ* (x) aux abſciſſes *QM* (u) eſt exprimé par l'équation $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4x^4 - 8bbxx\sqrt{2} + 8b^4 = 0$: après avoir prouvé, par les Propoſitions précédentes *, que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe *GQ*, l'un en *G*, l'autre en *R*, tels que $BG = b\sqrt{\sqrt{2}}$ & $BR = -b\sqrt{\sqrt{2}}$, & que ces deux points doubles ſont des points d'interſection *, puiſqu'on y a toûjours $\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}}$: on demande ſi ces deux points d'interſection ſont de la premiére, ſeconde ou troiſiéme eſpece. * Fig. 52. * Art. 81. * Art. 63. & 72.

On tranſportera l'origine des abſciſſes de *B* en *G*, en prenant $z = x - b\sqrt{\sqrt{2}}$, ou bien en faiſant $x = z + b\sqrt{\sqrt{2}}$; & en ſubſtituant cette valeur de (x) dans l'équation donnée, on aura l'équat. $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4z^4 + 16bz^3\sqrt{\sqrt{2}} + 16bbzz\sqrt{2} = 0$ qui exprime le rapport des abſciſſes *GQ* aux ordonnées *QM*. Cela fait, on comparera cette nouvelle équation avec celle de l'art. 94, & l'on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = -4b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -8bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 4$, $\rho = 16b\sqrt{\sqrt{2}}$, $\phi = 16bb\sqrt{2}$; enſuite ſubſtituant les valeurs de ces coëfficients, ainſi trou-

vées, dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, la premiére égalité *(H)* deviendra $3z^4 + 8bz^3\sqrt{\sqrt{2}} = 0$, tandis que la seconde *(2H)* se réduit à $z^4 = 0$: ensorte que la quatriéme racine de l'une de ces égalités étant autre que zero, pendant que la quatriéme racine de l'autre égalité est $= 0$, il est visible* que des deux tangentes *GT, Gt*, de la courbe au point double *G*, il y en a une qui est tangente d'une branche *DGA*, qui n'a point d'infléxion en *G*, tandis que l'autre est tangente d'une branche *DGM* qui a une infléxion en *G*; D'où il suit* que le point double *G* est de la seconde espece.

* *Art. 94.*

* *Art. 15.*

COROLLAIRE I.

C. Puisque la quatriéme racine de l'égalité *(H)* $3z^4 + 8bz^3\sqrt{\sqrt{2}} = 0$ est $z = -\frac{8}{3}b\sqrt{\sqrt{2}}$, ce qui donne $x = -\frac{5}{3}b\sqrt{\sqrt{2}} = BR + \frac{2}{3}BR$, il est clair qu'en prenant sur l'axe *BQ*, au de-là du point *R*, par rapport au point *B*, le point *q*, tel que $Rq = \frac{2}{3}BR$, il est clair, dis-je, que si l'on mene par ce point *q* une droite *qN* parallele aux ordonnées *QM*, le point *N*, où cette parallele rencontrera la tangente *TG*, sera celui où cette même tangente rencontre la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, après l'avoir touchée au point double *G*.

COROLLAIRE II.

CI. Par la même voye on prouvera que le point d'intersection *R* de la même courbe *AGDGMEHFNRCRA* est un point double de la seconde espece, & l'on trouvera de même le point où l'une des tangentes de la courbe, au point double *R*, coupe la portion de la courbe *AGDGMEH*.

REMARQUES.

CII. Il n'est pas hors de propos de remarquer ici en passant, 1.° Qu'en prenant sur l'ordonnée principale *BL* les points *A* & *H*, tels que *BA* soit égale à la moindre des ra-

cines réelles de l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, & BH égal à la plus grande des racines réelles de la même égalité, les points A & H seront ceux où la courbe $AGDGMEHFNRCRA$ coupe l'ordonnée principale parallelement à son axe BQ.

2.° Que l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, n'ayant que deux racines réelles, qui sont même positives (ainsi qu'il est aisé de le connoître par les premiers principes de l'Algebre) il s'ensuit que l'ordonnée principale BL ne rencontre la courbe en question qu'en deux points.

3.° Que cette même ordonnée principale BL est le diametre de la courbe $AGDGMEHFNRCRA$, puisqu'on a par-tout $x = \pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$.

4.° Après avoir mené par les points doubles G & R les droites GE, RF, paralleles aux ordonnées QM, soient pris sur ces paralleles les points I & K, tels que GI & RK soient l'une & l'autre $= 2b$; Si l'on prend, de part & d'autre du point I, les points E & D, & de part & d'autre du point K les points F & C, tels que IE, ID, KF, KC, soient les unes & les autres $= 2b\sqrt{3}$: les points E & D seront ceux où la courbe coupe la droite GE parallelement à l'axe BQ, & les points F & C, ceux où cette même courbe coupe la droite RF parallelement au même axe BQ.

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale BL, du côté où les (u) sont positifs, le point ω, tel que $B\omega = 4b$, & mené par le point ω la droite $\phi\omega\pi$ parallele à l'axe BQ; Si sur cette même droite $\phi\omega\pi$, de part & d'autre du point ω, on prend les points ϕ & π, tels que $\omega\phi$ & $\omega\pi$ soient l'une & l'autre $= b\sqrt{5\sqrt{2}} = BG\sqrt{5}$, les points ϕ & π seront les points de la courbe $AGDGMEHFNRCRA$, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale.

6.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale BL, du côté où les (u) sont négatifs, le point a, tel que $Ba = b$,

& mené par le point a, la droite gah, parallele à l'axe BQ, si sur cette même parallele gh, on prend, de part & d'autre du point a, les parties af & ac, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; & les parties a$h$, a$g$, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$, les points f, c, h & g seront quatre points de la courbe où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale BL.

7.° Toutes les droites, menées parallelement à l'axe au de-là des points E & F, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que (u) est plus grand que $2b + 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires. De même toutes les droites, menées parallelement à l'axe au de-là des points C & D, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que $(-u)$ surpasse $2b - 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son ordonnée principale BL, au de-là des poins E & F, du côté où les (u) sont positifs, ni au de-là des points C & D du côté où les (u) sont négatifs.

8.° Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale, au de-là des points ϕ & π, par rapport au point ω, ne rencontrent la courbe en aucun point : car dès que (x) surpasse $b\sqrt{5\sqrt{2}}$, les quatre racines de l'égalité $x^4 - 2bbxx\sqrt{2} + \frac{1}{4}u^4 - bu^3 - 2bbuu + 2b^4 = 0$, (dans laquelle au lieu de (x) on auroit mis une grandeur qui surpasseroit $b\sqrt{5\sqrt{2}}$) sont imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son axe BQ, au de-là des points ϕ & π; Mais comme par le nombre précédent, elle ne s'étend pas au de-là des points E, F, C, D, le long de son

son ordonnée principale, il est clair que cette courbe rentre en elle-même.

9.° On démontrera de même, 1.° Que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale BL, entre les points f & h, ou bien entre les points c & g, rencontrent la courbe en quatre points, dont il y en a toûjours deux du côté où les (u) sont positifs, & deux du côté où les (u) sont négatifs. 2.° Que les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale BL, entre les points f & c, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, du côté où les (u) sont positifs; ensorte que les portions de la courbe en question, situées au de-là de l'axe BQ, par rapport aux points E & F, c'est-à-dire, du côté où les ordonnées (u) sont négatives, forment deux *folium* $GhDfG$, & $RcCgR$, dont les nœuds sont en G & en R; Ce qui pourroit faire donner à cette courbe le nom d'*Ovale bifoliée*.

EXEMPLE III.

CIII. Soit la Lemniscate de M. Bernoulli * $GMFBEG\phi A\pi G$, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par $u^4 + \overline{2zz + bb} \times uu + z^4 - bbzz = 0$; Il est visible, 1.° Que cette courbe a un point double à l'origine G de son axe, puisqu'on y a toûjours $uu = 0$ & $zz = 0$; 2.° Que ce point double est un point d'intersection, puisqu'en ce même point $\frac{du}{dz} = \pm 1$. Cela posé, on demande si ce point d'intersection G est de la premiére, seconde ou troisiéme espece. * Fig. 53.

Puisque le point d'intersection est à l'origine G de l'axe, il ne faut pas transporter cet origine ailleurs; ainsi en comparant l'équation donnée avec l'équation générale marquée par *(10)* dans l'art. 94, on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -bb$; Ensuite, substituant les valeurs de ces coëfficients dans les égalités *(H)* & *(2H)* du même art. 94, ces deux égalités deviennent l'une & l'autre $z^4 = 0$, ensorte

que la 4me racine de l'égalité *(H)* & la 4me racine de l'égalité *(2 H)* sont l'une & l'autre égales à zero. D'où * il suit,

* *Art. 94.*

1.° Que la tangente tG de la courbe au point double G, touche une branche πGF, qui a une infléxion au point d'interſection G. 2.° Que la tangente TG, au même point double G, touche une autre branche $EG\phi$ qui a auſſi une infléxion au point d'interſection G. Donc le point double G eſt un point d'interſection de la troiſiéme eſpece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

AVERTISSEMENT.

Cette derniére Courbe étant connuë depuis que l'illuſtre Géometre, dont elle porte le nom, s'en eſt ſervi pour conſtruire l'Iſochrone-Paracentrique de M. Leibnitz, je ne crois pas devoir m'arrêter ſur cet Exemple, comme j'ai fait ſur les précédents. Tout le monde ſçait que cette courbe rentre en elle-même, & que les tangentes aux points A *&* B*, extrémités de ſon axe, ſont paralleles aux ordonnées* QM *à cet axe, quel que ſoit l'angle* MQG.

EXEMPLE IV.

* Fig. 54.

CIV. Soit la courbe $MegfmBEG\phi AFG\varepsilon B\mu c\gamma\pi\xi$ *, dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'équation $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, (où l'on ſuppoſe toûjours $a < b$) il eſt viſible que cette courbe a un point double à l'origine G de ſes abſciſſes GQ, & de ſes ordonnées QM, puiſqu'on y a toûjours $zz = 0$ & $uu = 0$, & que ce point double eſt un point d'interſection, puiſque $\frac{du}{dz}$ y eſt $= \pm \frac{b}{a}$. Mais il n'eſt pas moins évident que ce point d'interſection eſt un point double de la troiſiéme eſpece; Car ſi l'on compare l'équation donnée $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, avec l'équation générale, marquée par *(10)* dans l'art. 94, on a ici $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\zeta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -aa$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, & $\phi = bb$: or en ſubſtituant ces valeurs dans les égalités marquées par *(H)* & par *(2H)* dans le même art. 94, on voit que ces deux égalités ſe réduiſent à celle-ci $\overline{b^4 - a^4} \times z^4 = 0$,

dans laquelle les quatre racines de (z) sont $= 0$. D'où il suit* que le point d'interſection G eſt un point double de la troiſiéme eſpece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.* * *Art. 94.*

REMARQUES.

CV. Il eſt aiſé de voir, 1.° que l'axe GQ de cette courbe eſt un des diametres de la courbe en queſtion, puiſque l'on a toûjours $u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$.

2.° Si l'on prend ſur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties Gg & $G\gamma$, l'une & l'autre $= b$, les points g & γ ſeront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'ordonnée principale GL.

3.° Si l'on prend ſur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties GS, $G\omega$, l'une & l'autre $= \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & enſuite les parties $G\sigma$, $G\delta$, l'une & l'autre $= \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$: ſi des points S, ω, σ & δ, on éleve des droites SE, $\omega\varepsilon$, σe, δc, paralleles à l'ordonnée principale GL, & les unes & les autres $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: ſi l'on prolonge également ces quatre droites, du côté où les (u) ſont négatifs, enſorte que SF ſoit $= SE$, $\omega\varepsilon = \omega\phi$, $\sigma e = \sigma f$ & $\delta c = \delta\pi$, les points E, F, e, f, ε, ϕ, c, π, ſeront les huit points de la courbe qui ont des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

4.° Il eſt aiſé de voir que l'ordonnée principale GL, prolongée de part & d'autre du point G, eſt un des diametres de cette courbe, puiſque l'on a toûjours $z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$.

5.° Si l'on prend ſur le diametre GL, de part & d'autre du point G, les parties GB, GA, l'une & l'autre $= \alpha$, les points B & A ſeront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'axe GQ.

6.° Toutes les droites menées, parallelement au diametre GL, entre les points S & ω, rencontrent la courbe en quatre points; Car dès que $\pm z < \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallelement à ce même diametre GL, entre les points S & σ, ou entre les points ω & δ, ne rencontrent point la courbe : car dès que $\pm z > \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & $< \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont imaginaires. D'où il suit que la portion de courbe $GEB\varepsilon GFA\phi G$, renfermée entre les droites ESF, $\varepsilon\omega\phi$, n'est pas unie, sur le plan, aux deux autres portions $Megfm$, $\mu c\gamma\pi\xi$, de la même courbe.

7.° Toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points σ & g, ou entre les points δ & γ, rencontrent la courbe en quatre points. Car dès que $(\pm z)$ surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$ & est moindre que b, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, au de-là des points g & γ, par rapport au point double G, à quelque distance qu'elles soient de ce point double G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $\pm z > b$, des quatre valeurs de l'indéterminée (u) il n'y en a que deux réelles, sçavoir $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, les deux autres $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$

étant toûjours imaginaires dans ce cas-là. D'où il ſuit que la portion de courbe *Megfm* & ſon oppoſée $\mu C\gamma\pi\xi$ s'étendent l'une & l'autre à l'infini, de part & d'autre de l'ordonnée principale *GL*, en formant les quatre branches infinies *geM*, $\gamma C\mu$, *gfm*, $\gamma\pi\xi$, dont les deux premiéres ſont du côté des (*u*) poſitifs, & les deux autres du côté des (*u*) négatifs.

8.° Toutes les droites, comme $ML\mu$, ou bien $ml\xi$, menées parallelement à l'axe *GQ*, au de-là des points *B* & *A*, par rapport au point *G*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que *GL* $(+u)$ ou *Gl* $(-u)$ ſurpaſſent *GB* ou *GA* $(\pm a)$ des quatre valeurs de l'indéterminée (*z*) $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$, il n'y en a que deux réelles; ſçavoir, $\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$, les deux autres $\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$ étant imaginaires. D'où il ſuit que la portion de courbe $GEB\varepsilon G$ $FA\phi G$ (qui eſt entre les quatre branches infinies *geM*, $\gamma c\mu$, *gfm*, $\gamma\pi\xi$) ne s'étend pas au de-là des points *B* & *A*, le long de l'ordonnée principale *GL*; & comme elle ne s'étend pas au de-là des points *S* & ω, le long de l'axe *GQ* (comme il a été remarqué dans le nombre 6 de cet article) il eſt évident que c'eſt une portion de courbe rentrante en elle-même; D'ailleurs puiſque cette portion de courbe $GEB\varepsilon G$ $FA\phi G$ a un point double d'interſection en *G*, il s'enſuit que cette portion de courbe eſt une *Lemniſcate* conjuguée.

9.° Après avoir mené, par le point *g*, une droite *gH*, parallele à l'ordonnée principale *GL*: ſi l'on prend ſur cette droite, de part & d'autre du point *g*, les portions *gH*, *gh*, l'une & l'autre égales à *Gg*: ſi par les points *G* & *h*, on mene la droite *Gh*, & par les points *G* & *H*, la droite *GH*: ces deux droites prolongées à l'infini, de part & d'autre du point *G*, ſeront aſymptotes à la courbe: la 1ere aux branches infinies *gfm*, $\gamma c\mu$, & la ſeconde aux branches infinies *geM*, $\gamma\pi\xi$. D'où il ſuit que cette courbe eſt compoſée de quatre branches hyperboliques, & d'une Lemniſcate conjuguée.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

CVI. *Les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points simples, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.*

DÉMONSTRATION.

* Fig. 55. Soit une ligne du 4me ordre *ZMEFHXShfeV**, coupée au point *m* par une Section conique *BmNA* 8 *m D*, il faut demontrer que cette Section conique peut couper la ligne du 4me ordre en sept autres points, comme 2*m*, 3*m*, 4*m*, 5*m*, 6*m*, 7*m*, 8*m*, & qu'elle ne sçauroit la couper en un plus grand nombre.

Après avoir mené à discretion la ligne droite *GQ* (que l'on prendra pour Axe commun à la ligne du 4me ordre *ZMEFHXShfeV* & à la Section conique *BNAD*), par un point quelconque *Q*, de la droite *GQ*, on menera une droite *QMN*, sécante en *M* de la ligne du 4me ordre, & en *N* de la Section conique : si on nomme l'abscisse *GQ* (z), l'ordonnée de la ligne du 4me ordre *QM* (u), & l'ordonnée de la Section conique *QN* (y), le rapport de l'abscisse *GQ* (z) à l'ordonnée *QM* (u) sera exprimé par une équation qui ne sera qu'un cas particulier de l'équation générale, marquée par *(4D)**, puisque (par l'art. 31 du premier Mémoire) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 4me ordre : De même le rapport des abscisses *GQ* (z) aux ordonnées *QN* (y) de la Section conique *BNAD* sera exprimé par une équation particuliére qu'on pourra toûjours rapporter à l'équation générale, marquée par *(2D)**, puisque (par l'art. 29 du premier Mémoire, nomb. 2) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 2^d ordre.

* *Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.*

* *V. la même Table.*

Cela posé, il est évident que l'ordonnée *QN* (y) de la Section conique *BNAD* devient égale à l'ordonnée *QM* (u)

de la ligne du 4me ordre dans tous les points *m*, *2m*, *3m*, &c. où ces deux courbes s'entrecoupent ou se rencontrent; D'où il suit qu'on a alors $y = u$, ainsi l'équation *(2 D)* devient telle qu'on la voit marquée par (Δ).*

Maintenant, si l'on substituë dans l'équation marquée par *(4D)*, au lieu de l'indéterminée *(u)*, sa valeur prise de l'équation marquée par (Δ), il est certain qu'il en viendra une équation dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnuë *(z)* dont les racines donneront les valeurs des abscisses *Gq*, *G2q*, *G3q*, *G4q*, *G5q*, &c. ausquelles correspondent des ordonnées *qm*, *2q2m*, *3q3m*, *4q4m*, *5q5m*, &c. communes aux deux courbes *ZMEFHXShfeV* & *BNAD*; Or cette substitution, dont j'obmets ici le calcul, qui est un peu long, mais qui n'a rien de difficile, ni qui ne soit à la portée de tout le monde, cette substitution, dis-je, donne l'égalité marquée par *R* (dans laquelle les coëfficients *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* & *K*, sont donnés en q, α, β, γ, δ, ε, η, λ, μ, ν, ρ, π, ϕ, σ, & en *f*, *e*, *g*, *h*, *b*, tels qu'on les voit representées dans la Table qui est à la fin de ce Mémoire). Mais puisque l'égalité marquée par *(R)* est du huitiéme degré, il est évident qu'elle peut fournir huit valeurs réelles & différentes de l'indéterminée *(z)*, & par conséquent huit abscisses *Gq*, *G2q*, *G3q*, *G4q*, *G5q*, *G6q*, *G7q*, *G8q*, ausquelles correspondent huit ordonnées *qm*, *2q2m*, *3q3m*, *4q4m*, *5q5m*, *6q6m*, *7q7m*, *8q8m*, communes à la ligne du 4me ordre *ZMEFHXShfeV*, & à la ligne du 2d ordre ou Section conique *BNAD*, & qu'il ne sçauroit y en avoir un plus grand nombre. Donc, il peut y avoir huit points simples *m*, *2m*, *3m*, *4m*, *5m*, *6m*, *7m* & *8m*, communs à la Section conique & à la ligne du 4me ordre, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre. Donc les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.*

COROLLAIRE.

CVII. Si la Section conique *BNAD* passe par un des points doubles *(5m)* de la ligne du 4[me] ordre *ZMEFH XS5mh6mfeV* *, il y aura dans l'égalité marquée par *(R)*, deux racines réelles & de mêmes signes, & cela parce que le point double est équivalent à deux points simples *.

* Fig. 56.

* Art. 12.

Si cette Section conique passe par deux des points doubles de la ligne du 4[me] ordre, l'égalité marquée par *(R)* * outre les deux premiéres racines réelles égales & de mêmes signes, en aura encore deux autres réelles égales & de mêmes signes.

* V. la Table à la fin de ce Mémoire.

Enfin si cette Section conique *BNAD* * passe par les trois points doubles *2m*, *4m* & *6m* de la ligne du 4[me] ordre *ZEMFHXSheZ*, l'égalité du huitiéme degré, marquée par *(R)*, outre la premiére paire de racines réelles égales & de mêmes signes, qu'elle doit avoir à cause du point double *2m*: outre la seconde paire de racines réelles égales & de mêmes signes qu'elle aura à cause du point double *4m*, aura encore une troisiéme paire de racines réelles égales & de mêmes signes, à cause du troisiéme point double *6m*; & cela parce que trois points doubles sont équivalents à six points simples, pris deux à deux.

* Fig. 57.

REMARQUES.

CVIII. De même qu'on a démontré dans l'art. 106, que les lignes du 4[me] ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre : on démontrera, en suivant la même méthode, 1.° Que les lignes du 5[me] ordre peuvent être coupées en dix points, par une Section conique, & ne sçauroient l'être en un plus grand nombre : 2.° Que les lignes du 6[me] ordre peuvent être coupées en douze points, par une Section conique, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points. 3.° Que les lignes du 7[me] ordre peuvent être coupées par une Section conique en quatorze points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. 4.° Enfin que les lignes algébriques de l'ordre

l'ordre n peuvent être coupées, par une Section conique, en autant de points qu'il y a d'unités dans $2n$, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. Vérités qui ont déja été démontrées par M. Mac-Laurin dans son sçavant Traité intitulé *Geometria organica*.

PROPOSITION X.

THÉOREME.

CIX. *Une ligne qui a quatre points doubles ne sçauroit être du 4me ordre.*

DÉMONSTRATION.

Soit * une ligne courbe *ZMBEBGFGRCRVDVX*, dont on connoît les quatre points doubles *B, G, R* & *V*. Je dis que cette ligne ne sçauroit être du 4me ordre. Après avoir pris à discretion sur cette même courbe un point simple quelconque *M*, par les quatre points doubles donnés *B, G, R, V*, & par le 5me point *M*, pris à discretion, faites passer une Section conique *OAH*, (ce qui est toûjours possible par l'art. 180 des Sections coniques de M. le M. de l'Hôpital) il est visible que la Section conique coupera la courbe qui a les quatre points doubles *B, G, R, V*, en neuf points; Car chaque point double étant équivalent à deux points simples *, les quatre points doubles sont équivalents à huit points simples, & le point d'intersection *M* fait le neufviéme; Or, par l'art. 106, les lignes du 4me ordre ne sçauroient être coupées par une Section conique en plus de huit points. Donc puisque la courbe *ZMBEBGFGRCRVDVX*, qui a les quatre points doubles *B, G, R* & *V*, peut toûjours être coupée par une Section conique *OAH* en neuf points, il s'ensuit que cette courbe ne sçauroit être du 4me ordre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Fig. 58.

* *Art. 12.*

COROLLAIRE.

CX. Il suit de-là & de l'art. 83, qu'une ligne du 4me ordre, ne sçauroit avoir plus de trois points doubles.

REMARQUES.

CXI. Après avoir prouvé qu'une ligne du 4me ordre ne ſçauroit avoir plus de trois points doubles, on démontrera de même, 1.° Qu'une ligne du 5me ordre ne ſçauroit jamais avoir plus de ſix points doubles. 2.° Qu'une ligne du 6me ordre ne ſçauroit en avoir plus de dix. 3.° Qu'une ligne du 7me ordre ne ſçauroit en avoir plus de quinze. 4.° Qu'une ligne du 8me ordre ne ſçauroit en avoir plus de vingt-un, & ainſi de ſuite, ſuivant la progreſſion des nombres triangulaires. Enſorte que ſi n exprime, par le nombre de ſes unités, l'ordre d'une ligne quelconque, le nombre des points doubles, dont les lignes de cet ordre ſont ſuſceptibles, ſera exprimé par le nombre triangulaire, qui dans le Triangle de M. Paſcal correſpond au nombre naturel $n - 1$. Or, on ſçait que le nombre triangulaire, correſpondant au nombre naturel $n - 1$, eſt $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2} = \frac{nn-3n+2}{2}$; Donc cette expreſſion $\frac{nn-3n+2}{2}$ exprime toûjours, par le nombre de ſes unités, le plus grand nombre de points doubles dont une ligne de l'ordre exprimé par n eſt ſuſceptible. Vérité qui n'avoit pas encore été remarquée juſqu'ici.

AVERTISSEMENT.

Ce Mémoire étant déja trop long, on a été obligé, après qu'il a été lû à l'Académie, d'en retrancher, à l'impreſſion, une grande partie, pour laiſſer de la place aux Mémoires ſuivants. Ce qu'on a retranché de celui-ci concerne les Oſculations de deux branches d'une même courbe, & les Lemniſcates infiniment petites : propriétés ſingulières dont les lignes algébriques ne deviennent ſuſceptibles que lorſqu'elles ſont du quatriéme ordre, ou d'un ordre ſupérieur au quatriéme. On a donc pris le parti de renvoyer tout ce qui regarde cette Théorie à un troiſiéme Mémoire, qu'on a remis dans les Regiſtres de l'Académie, avec celui où il eſt traité des différentes ſortes de points triples qu'on rencontre ſouvent ſur les lignes du quatriéme ordre. Ce qui doit précéder l'énumération de ces mêmes lignes.

DE LA CAPSULE DU CRISTALLIN.

Par M. PETIT le Médecin.

NOUS avons dit, dans nôtre précédent Mémoire, que le Criſtallin eſt enchaſſé dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un diamant dans ſon chaton, & y eſt retenu par une membrane qui l'enveloppe, & qui pour cela eſt nommée la *Capſule du Criſtallin.* 16 Aouſt 1730.

Cette membrane eſt auſſi appellée *Arachnoïde* par les Anatomiſtes, parce que ſa fineſſe la fait reſſembler à une toile d'Araignée.

D'autres l'ont nommée *Criſtalloïde.* Quelques-uns ont douté de ſon exiſtence ; ce qui eſt d'autant plus étonnant, que Galien * en a parlé, & la fait reſſembler à une pellicule d'Oignon, à laquelle auſſi Véſale * la compare : il la fait encore reſſembler à de la Corne très-fine & très-tranſparente. Caſſerius Placentinus * en donne la deſcription. Bartholin & d'autres ont parlé de cette Membrane. Après cela il n'y avoit qu'à la chercher, elle n'eſt pas difficile à trouver dans les Animaux à quatre pieds, principalement dans le Mouton, le Bœuf & le Cheval ; & quoiqu'elle ſoit un peu plus difficile dans l'Homme, on la trouve facilement auſſi-tôt qu'on l'a vû démontrer une ſeule fois ; ce qu'il y a de ſurprenant, c'eſt que Brigs * n'en dit pas un ſeul mot, & qu'un auſſi habile Anatomiſte que Ruiſch ait douté long-temps de ſon exiſtence. Voici comme il s'en explique lui-même * : *De hujuſce membranulæ exiſtentiâ Anatomici alii aliter ſentiunt : quidam illam dari negant, nonnulli ambigant, alii eandem admittunt; ipſe quoque diù anceps hæſi. Quid de hoc negotio ſtatuerem ! verùm cùm repleviſſem arterias Oculi ovini cereâ materiâ, aperiebam Oculum; membranaſque perſcrutabar, & ſic videbam per membranulam araneam plurimas arteriolas diſperſas.* On voit qu'il ne s'eſt

* *De Oculis. cap. 3.*

* *Lib. 7. c. 14.*

* *Lib. 5. c. 16. edit. 1622.*

* *Ophtalmographia.*

* *Theſaurus. Anat. 2. p. 37.*

aſſûré de cette membrane que par l'injection, quoique très-facile à démontrer dans le Mouton.

Cette Capſule eſt adhérente par ſa partie poſtérieure à la membrane hyaloïde ou vitrée; on peut les ſéparer facilement l'une de l'autre ſans le ſecours du ciſeau ou du ſcalpel, ce qui ne ſe peut à l'endroit où la Vitrée fait une continuité avec cette membrane dans toute la circonférence du Criſtallin, car il faut ſe ſervir d'un inſtrument tranchant pour les ſéparer. La partie antérieure de cette Capſule ſe diviſe facilement de la circonférence au centre, & du centre à la circonférence, ſelon la rectitude de ſes fibres.

Hiſt. de l'Acad. des Sc. année 1722. p. 16.

Quelques Anatomiſtes* ont crû que cette Capſule tient au Criſtallin par ſes bords. Mais ſi l'on diſſéque cette partie avec attention, on trouvera que cette Capſule ne tient en aucun endroit du Criſtallin. D'autres diſent hardiment qu'elle n'eſt point continüe avec la membrane hyaloïde, parce que, diſent-ils, il s'enſuivroit que du moment que cette Capſule ſeroit altérée, ſon altération ſe communiqueroit infailliblement à la membrane hyaloïde, elle la corromproit, & rendroit par-là inutiles toutes les opérations des Cataractes criſtallines, puiſque la membrane du corps vitrée perdroit ſa tranſparence. 1.° Il ne faut que des yeux pour voir la continuité de la Capſule avec la membrane hyaloïde, cela ſe découvre avec la même facilité que l'on voit que la peau du bras eſt continüe avec celle de la main. 2.° Il ne s'enſuit pas de ce qu'une membrane eſt continüe avec une autre, que les altérations ſe communiquent infailliblement de l'une à l'autre; une inflammation peut occuper une partie de la main ſans ſe communiquer à l'autre partie, quoique la peau ſoit continuë. 3.° L'eſpece d'altération, dont on entend parler, qui eſt ſans doute l'opacité de la Capſule, ne ſe doit rencontrer que bien rarement; je ne l'ai jamais trouvée opaque dans aucune des Cataractes que j'ai vû ſur le mort, & l'on verra dans la ſuite de ce Mémoire, que je n'ai pû la rendre opaque par la plûpart des eſprits acides. J'ai une fois rencontré une

tache blanche, ronde, d'une ligne de diametre dans cette Capſule, mais qui s'eſt diſſipée, en frottant la partie interne de cette Capſule, ce n'étoit que des particules du Criſtallin devenuës blanches & opaques, & qui ſont reſtées ſur la ſurface interne de la Capſule, lorſque je l'ai enlevée, & ſuppoſé que cette membrane devienne opaque, il ne ſeroit pas poſſible de déterminer ſi c'eſt le Criſtallin ou la membrane, en l'examinant à travers la Cornée.

Il eſt très-difficile de déterminer l'épaiſſeur de cette Capſule, elle eſt dans l'Homme une fois plus épaiſſe qu'une toile d'araignée, elle eſt plus fine de la moitié à ſa partie poſtérieure. On la trouve de cette derniére fineſſe dans la Carpe, le Barbeau, le Brochet, l'Anguille, & d'autres Poiſſons de cette ſorte. Le Marſoüin a cette Capſule un peu plus épaiſſe que celle de l'Homme, je l'ai vû une fois auſſi épaiſſe dans la Carpe de Mer.

Je l'ai vû dans le Bœuf une fois plus épaiſſe que dans l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans le Cheval que dans le Bœuf.

Le Chien, le Chat, le Loup, le Lapin, le Lievre l'ont tant ſoit peu plus épaiſſe que celle de l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans le Mouton que dans ces Animaux, mais moins que dans le Bœuf.

Malgré la fineſſe de cette membrane dans l'Homme, elle n'y eſt pour-tant pas ſi tranſparente à ſa partie antérieure, que dans les autres Animaux qui l'ont beaucoup plus épaiſſe, comme le Bœuf & le Cheval.

Si l'on regarde la partie poſtérieure du Criſtallin, de quelque âge que ce ſoit, enveloppé de ſa Capſule, on y trouve plus de tranſparence, que lorſqu'on le regarde par ſa partie antérieure qui paroît tant ſoit peu terne; mais ſi on enleve la Capſule, le Criſtallin paroît également tranſparent des deux côtés. J'ai néantmoins vû des Criſtallins d'Homme, dont la partie antérieure de la Capſule étoit auſſi tranſparente que la poſtérieure. Elle eſt d'une très-grande tranſparence dans ſes deux ſurfaces dans tous les Animaux à quatre pieds, les Oiſeaux & les Poiſſons.

Le ligament ciliaire qui prend ſon origine du plus grand cercle de l'Uvée, s'attache & ſe termine tout à l'entour de la partie anterieure de la Capſule ſur laquelle ce ligament prolonge ſes fibres, & les vaiſſeaux qu'il lui fournit. Il y a des Anatomiſtes qui ont crû que ce ligament s'attache au Criſtallin. Briggs eſt de ce ſentiment, les vaiſſeaux que le ligament fourni à la Capſule ne ſont que des lymphatiques qui dégorgent & répandent leurs liqueurs dans la cavité de la Capſule. Il ſe trouve des occaſions où ces vaiſſeaux ſont remplis de ſang, & pour lors on les voit ramefiés ſur la partie antérieure de la Capſule, je n'en ai jamais trouvé à la partie poſtérieure. Ces vaiſſeaux ſont formés par pluſieurs petits troncs qui ont leur racine dans le ligament ciliaire, leurs ramifications ſont dirigées vers le centre de la capſule, & forment entr'elles des anoſtomoſes, c'eſt ce que j'ai vû dans quelques Enfants nouveau-nés, mais dans un jeune Marſoüin, la Capſule paroiſſoit ſeulement rougeâtre, il a fallu ſe ſervir d'une Loupe, pour y reconnoître la diſtribution des vaiſſeaux qui étoit la même que dans les Enfants. La Tête de ces Enfants avoit reſté long-temps au paſſage de la Matrice dans des accouchements laborieux. Les parties extérieures de la Tête étant comprimées, le Sang n'a pû y circuler, & s'eſt porté dans les parties intérieures où il s'eſt trouvé pour lors en très-grande quantité, il a forcé les embouchures des vaiſſeaux lymphatiques qui ſe trouvent très-diſpoſés à ſe dilater dans les nouveau-nés, & à donner paſſage au Sang qui les remplit; mais dans le jeune Marſoüin cela eſt arrivé d'une maniére un peu différente, il avoit été pêché avec ſa mere, qui avoit les mammelles remplies de lait. Lorſqu'on tire les Poiſſons de l'eau, on les jette rudement dans les Barques où ils ſe débattent avant que de mourir, & comme ils ſont couchés ſur le côté, les parties extérieures de la Tête & des Yeux ſe froiſſent & ſe meurtriſſent, & pour lors le Sang qui ſe trouve dans les parties extérieures du globe de l'Oeil, n'y pouvant circuler, force les embouchures des vaiſſeaux excrétoires-intérieures, dans

lesquels il s'introduit, comme je l'ai dit des Fœtus humains.

Les vaisseaux de la Capsule n'étoient point remplis dans la mere de ce jeune Marsoüin, dont j'ai disséqué les Yeux. J'ai encore vû ces vaisseaux seringués dans un Fœtus & dans quelques Chats chés un Médecin Anglois qui étoit à Paris. Il en avoit injecté plusieurs, dont quelques-uns avoient réüssis avec du suif seul, coloré avec le cinabre. Le suif avoit été mis en digestion pendant quinze jours dans un Matras sur le sable avec son vaisseau de rencontre.

J'ai disséqué les Yeux de trois Hommes, morts à la Charité avec de grandes inflammations aux yeux; j'ai examiné la Capsule du Cristallin, je n'y ai trouvé aucun vaisseau rempli de sang.

J'ai examiné avec un grand soin les Capsules des Sujets dont les vaisseaux se sont trouvés seringués ou remplis de sang, pour voir si quelques-uns de ces vaisseaux se continuoient dans le Cristallin; mais quelque précaution que j'aye prise, je n'en ai trouvé aucun, ni dans les Fœtus dont les vaisseaux de la Capsule étoient remplis de cire ou de sang, ni dans les Chats & le jeune Marsoüin dont j'ai parlé, ni dans quelques Cristallins de Veau dans lesquels l'injection avoit réüssi.

Le célebre M. Ruisch [a], qui paroît avoir injecté plusieurs Animaux, dont il a examiné les Yeux, ne dit rien des vaisseaux du Cristallin, quoiqu'il décrive les vaisseaux de la Capsule; il dit même une chose qui lui est arrivé, & qu'il est bon de rapporter: Ayant, dit-il, rempli de cire un Oeil de « Mouton, & disséqué cet Oeil, je remarquai plusieurs arteres [b] « dispersés sur la membrane arachnoïde; je mis ce Cristallin « avec sa Capsule dans une liqueur limpide, mais le jour suivant « voulant examiner les mêmes vaisseaux, je ne les trouvai plus. «

La raison qu'il en donne me paroît très-plausible: J'avois, « dit-il, rempli de matiére de cire *(cereâ materiâ)* les arteres « de l'Oeil jusques près le Cristallin, où elle étoit restée sans «

[a] *Thesaur. Anatom.* 2. *p.* 37. c'est la suite du même endroit que j'ai rapporté ci-dessus, page 1.

[b] Il veut dire, *les vaisseaux lymphatiques arteriels.*

» pénétrer dans la membrane arachnoïde qui enveloppe le
» Criſtallin, mais la matiére de cire ayant pouſſé devant elle
» le ſang qu'elle avoit trouvé dans les arteres, avoit tellement
» rempli les vaiſſeaux de la membrane arachnoïde, que la cire
» n'y a plus trouvé de paſſage, & ce ſang a été diſſout & diſ-
» ſipé par la liqueur dans laquelle on a mis tremper le Criſtallin
» avec ſa Capſule. Je rapporte ceci, afin que ceux qui feront ces ſortes d'injections prennent garde à cette circonſtance, peut-être n'y avoit-il que du ſang dans toutes les Capſules que j'ai vû.

* *Tractatus de circulari humorum motu in Oculis.*

Examinons préſentement ce que penſe Hovius * ſur cette matiére, lui qui paroît avoir fait quantité d'injections pour les Yeux ſeuls. Il croit que le Criſtallin a des vaiſſeaux qui pénétrent ſa ſubſtance. Il dit d'abord, que le Criſtallin eſt un tiſſu de vaiſſeaux tranſparents neurolymphatiques qui portent & rapportent la lymphe, recouvert d'une tunique tranſparente & très-fine: *Eſt itaque humor criſtallinus contextum mere vaſculoſum è nervis pellucidis neuroque lymphaticis, tum ad, tum ab ducentibus vaſis, conſtructum, tenuiſſima & pellucida tunica obductum.* Voyés, dit-il, la Figure 4, Tab. 5. Voici l'explication qu'il donne de cette Figure *.

Pag. 45.

Pag. 152.

Humor eſt criſtallinus noſtra methodo reſolutus cum vaſculis fluctuantibus depictus. Voilà le titre de cette explication. La Figure, dit-il, repréſente un Criſtallin réſout ou diſſout par une méthode qui lui eſt particuliére avec des vaiſſeaux qui flottent, c'eſt pourtant ce que l'on n'y voit point, elle repréſente plûtôt la premiére partie de ſon explication. A, *criſtallinus eſt humor, more noſtro poſt tunicæ ablationem in laminas diviſus.* Effectivement le Criſtallin paroît fendu du centre à la circonférence, comme s'il l'avoit mis tremper dans quelque liqueur acide, ou qu'il l'eût fait boüillir de même que ceux que j'ai démontré à l'Académie. On voit autour de ce Criſtallin une diſtribution de vaiſſeaux toute ſemblable à celle que j'ai vûë à la partie antérieure de la Capſule, injectée elle eſt

* Il eſt bon de voir cette Figure dans Hovius même, en liſant cet endroit du Mémoire.

est divisée & ouverte en plusieurs parties pour découvrir le Cristallin. Il dit que ce sont des vaisseaux du Cristallin séparés des lames supérieures du Cristallin. BB, *vascula sunt cristallina conquassatione è laminis superioribus, divulsa, expansa.* Il les a séparé *conquassatione,* par les secousses & les battements, apparamment dans de l'eau, c'est ce qu'il faut deviner sur le titre de cette Figure, *cum vasculis fluctuantibus,* ce qui marque que c'est dans quelque liqueur qu'il a battu ce Cristallin. Il s'est peut-être imaginé que l'on pourroit croire que le Cristallin peut se dissoudre de maniére qu'il n'en reste que les vaisseaux comme il arrive au Foye, dont on peut séparer les vaisseaux de la substance glanduleuse, après l'avoir fait macérer quelque temps dans l'eau : mais il y a bien de la différence, le Foye a des vaisseaux capables de résister aux secousses & aux battements que l'on est obligé de faire, encore les faut-il bien ménager pour ne rompre de vaisseaux que le moins qu'il est possible. Il ne faut pas s'attendre de conserver des vaisseaux aussi fins que ceux qu'il suppose dans le Cristallin, il s'en brise de bien plus gros que l'on ne peut conserver. Si on bat un Cristallin dans l'eau avant de l'avoir laissé tremper quelque temps, on le brise en plusieurs molécules, dans lesquelles on ne voit aucun vaisseau lymphatique, pas même avec le Microscope, on n'y remarque que les fibres que j'ai démontrées à l'Académie. Si l'on fait tremper le Cristallin dans l'eau pendant quelques jours, les fibres qui le composent se dissolvent, & deviennent une matiére semblable à de la boüillie; s'il y avoit des vaisseaux différents de ces fibres, on devroit en trouver quelques ramifications, car ces vaisseaux doivent être différents des fibres par leur direction.

Supposé qu'il y eût des vaisseaux remplis d'injection, ils ne pourroient facilement se séparer de la substance du Cristallin, & laisser cette substance divisée en lame, comme il le dit, tout doit se séparer en molécules, des vaisseaux si délicats se briseroient encore plus facilement que les autres parties du Cristallin.

Enfin Hovius dit, en comparant les vaisseaux de l'Humeur P. 45. & 46.

vitrée avec ceux du Criſtallin, que ceux de l'Humeur vitrée ſont longs, & ont peu de ſubdiviſion, que ceux du Criſtallin ſont plus étroits & plus ſerrés, & dont on ne peut trouver les ſubdiviſions, *In Criſtallino vero arctiora & firmiùs compacta ſunt, imperſcrutabiles ſubeunt ſubdiviſiones;* & il répéte encore qu'on ne peut trouver les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux qui ſont pourtant, ſelon lui, entre les lames qui compoſent le Criſtallin, néantmoins il repréſente les diviſions & les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux, c'eſt donc par imagination, il ne dit pas un mot des vaiſſeaux de la Capſule. Il faut pourtant que ces vaiſſeaux paſſent à travers la Capſule, pour aller au Criſtallin. Il démontre dans la Table 4, Fig. 3, 4 & 5, les vaiſſeaux qui vont à la Membrane vitrée & à l'Humeur vitrée, & ne parle point de ceux qui vont à la Capſule du Criſtallin, ſans doute qu'elle a auſſi des vaiſſeaux, nous les avons vû. Hovius auroit dû nous repreſenter les tiges de ces vaiſſeaux, ceux qui ſe diſtribuënt dans la Capſule, & l'endroit où ils percent le Criſtallin, mais au lieu de cela il repréſente deux choſes qui me paroiſſent incompatibles ſur un même Criſtallin. 1.° La ſéparation des prétendus vaiſſeaux du Criſtallin. 2.° La ſubſtance du même Criſtallin diviſée en lames. Que reſulte-t-il de cette Figure? Les vaiſſeaux qu'il repréſente ſont les vaiſſeaux, tels qu'il les a vû ſéringués dans la Capſule, & qu'il attribuë aux lames ſupérieures du Criſtallin. Il aura mis ce Criſtallin dans quelque liqueur acide, ou dans l'eau boüillante, comme j'ai fait, qui étant ſéché à l'air, ſe diviſe en lame, & pour lors ces deux choſes peuvent ſe trouver enſemble.

Page 100.

Après tout, il ne dit point quels ſont les Animaux dont il a employé les Yeux pour faire les obſervations, dont nous venons de parler, il devoit du moins dire le nom de l'Animal, dont il repréſente le Criſtallin avec ſes vaiſſeaux: outre cela il ſe tient très-reſervé ſur les moyens dont il s'eſt ſervi dans ſes prétendües préparations. Il ne l'eſt pas moins ſur la matiére de ſon injection, qu'il ne declare point. A dire le vrai, tout cela m'eſt fort ſuſpect dans un Homme qui dit, qu'il ſeroit indigne

Page 92.

à un honneste Homme de cacher les découvertes sur l'Humeur aqueuse, la Vitrée & le Cristallin.

S'il y avoit quelque vaisseau qui passât de la Capsule dans le Cristallin, j'avois lieu d'espérer de les trouver dans les Yeux séringués ou remplis de sang, que j'ai disséqués avec toute la précaution possible; on pourroit, & même on devroit découvrir ces vaisseaux dans les Cristallins des Yeux de Chevaux qui ne sont point séringués, ou dans les Cristallins de gros Poissons, mais on n'y rencontre pas la moindre fibre qui communique de la Capsule au Cristallin; il n'y a donc aucune communication du Cristallin avec sa Capsule, c'est ce que M. Antoine*, le plus habile Oculiste de son temps, avoit remarqué: d'où il conclud que *de toutes les parties de nôtre corps, le Cristallin est la seule partie qui n'a point de continuité avec ses voisines par aucune fibre ni vaisseau.*

* *Traité des Maladies de l'Oeil, descrip. de l'Oeil du Cristall. ch. 11.*

Je n'ai jamais trouvé cette Capsule opaque dans aucun des Yeux que j'ai disséqués, soit d'Homme, soit d'Animaux à quatre pieds, & je l'ai trouvée toûjours transparente dans toutes les Cataractes que j'ai disséquées dans les Cadavres; & ce qu'il y a de singulier, c'est que la Cornée & la membrane hyaloïde trempées dans l'eau boüillante, ou dans des Esprits acides, ou dans l'Esprit de Vin, deviennent opaques presque dans le moment qu'on les y met, néantmoins la membrane cristalline ne devient opaque que dans l'Esprit de Nitre. Ce n'est pas même une entiére opacité, elle se dissout le plus souvent dans cet Esprit, & quelquefois dans l'Esprit de Sel, & lorsqu'elle ne se dissout point dans le dernier, elle y conserve sa transparence. J'ai quantité d'expériences de Cristallins de Bœuf trempés dans l'Esprit de Sel pur, la membrane est restée entiére, transparente, ferme, & se soûtenoit par elle-même, quoique le Cristallin fût très-opaque. Cette membrane ne se dissout point dans les autres Esprits acides, & y conserve toûjours sa transparence, néantmoins tous les Cristallins que l'on met dans ces Esprits avec leur Capsule, deviennent opaques, comme je l'ai dit, il faut pour cela que la liqueur traverse cette Capsule. La même chose est arrivée aux Cris-

tallins trempés dans les diſſolutions de pluſieurs ſortes de Sels.

Cette membrane eſt extenſible, comme il eſt facile de le remarquer par le gonflement qui lui arrive en la ſoufflant par une petite inciſion qu'on y fait exprès, je l'ai fait voir à l'Académie, puis elle ſe remet dans ſon premier état, ce qui marque ſon reſſort qui lui eſt néceſſaire, afin qu'elle s'étende & ſe reſſert toutes les fois qu'il ſe répand de la liqueur dans ſa cavité, & qu'elle ſe diſſipe.

Quelques-uns croyent que cette Capſule comprime le Criſtallin & l'applattit au moyen de la contraction des fibres qui compoſent le ligament ciliaire, qui étant pris pour un ſphincter, & les fibres qui compoſent la Capſule, pour les tendons des fibres du ligament, lorſque les fibres de ce ligament ciliaire ſe mettent en contraction, elles tirent leurs tendons, étendent la Capſule, compriment la ſurface du Criſtallin & l'applattiſſent. Mais ces fibres me paroiſſent bien foibles pour un tel office, qui demande plus de force pour vaincre le reſſort du Criſtallin ; outre cela ces fibres s'attachent obliquement de devant en derriére ſur la circonférence de la Capſule, principalement dans l'Homme, ce qui la rendroit plus capable de faire avancer le Criſtallin en devant ; ſi cela ſe pouvoit, il vaudroit mieux rapporter cet effet à l'effort des muſcles des Yeux : j'eſpere donner un Mémoire ſur cette matiére.

Cette Capſule a trois uſages. 1.° Elle retient le Criſtallin dans le chaton de l'Humeur vitrée, ſans qu'il puiſſe changer de ſituation. L'on remarque qu'auſſi-tôt que cette membrane eſt ouverte dans le vivant par quelques coups reçûs ſur l'Oeil, le Criſtallin ſort de ſon chaton, & s'applique ſur la partie poſtérieure de l'Uvée, où il ne reſte pas long-temps ſans devenir louche, puis opaque, comme l'expérience le fait voir ; parce qu'il eſt gonflé par l'Humeur aqueuſe dont il s'imbibe. Cette liqueur écarte inégalement les fibres du Criſtallin les unes des autres, les couches ne ſe trouvent plus paralleles, ce qui dérange la direction des pores pour le paſſage de la lumiére, & forme l'opacité. Il arrive la même choſe à un Criſtallin trempé dans l'Eau commune.

2.° Cette Capſule ſépare le Criſtallin de l'Humeur aqueuſe, & empêche qu'il ne ſoit inceſſamment baigné de cette humeur, qui en l'humectant, le feroit gonfler, comme je viens de le dire.

3.° Les vaiſſeaux lymphatiques fourniſſent une liqueur qu'ils répandent dans ſa cavité, dont le Criſtallin eſt inceſſamment humecté *. En quelque endroit que l'on perce cette Capſule à la partie antérieure ou poſtérieure, on voit ſortir ordinairement cette liqueur, après quoi la Capſule ſe flétrit, & perd ſa tenſion à proportion de la quantité de la liqueur qui s'eſt épanchée. Il arrive quelquefois qu'en perçant cette membrane à ſa partie antérieure, elle ſe fend tout auſſi-tôt juſqu'à la circonférence, c'eſt ce que j'ai vû dans l'Oeil de la Carpe de Mer, de quelques Chats ; je l'ai auſſi vû dans des Yeux de Bœuf que j'avois fait tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures, ce qui n'arrive que parce que le Criſtallin eſt imbibé & gonflé de liqueur, & que pour lors il eſt fort ſerré par ſa Capſule, qu'il déchire en ſe dilatant dans le moment qu'on fait l'ouverture. Le Criſtallin ſe fend quelquefois lui-même par trois rayons du centre à la circonférence. Les Yeux trempés dans l'eau n'ont pas toûjours leurs Criſtallins gonflés, mais on y trouve toûjours une certaine quantité de liqueur qui a pénétré toutes les membranes, & qui s'eſt introduite dans la cavité de la Capſule.

Je n'en ai jamais trouvés dans l'Homme dont la Capſule ſe ſoit déchirée après les avoir percés. L'on en rencontre même, dans ceux qui n'ont point été trempés, qui ne donne aucune liqueur. Mais la ſurface interne de cette Capſule & la ſurface externe du Criſtallin ſe trouvent humectées, il n'y a quelquefois de liqueur que dans un Oeil, il n'y en a point dans l'autre, ce que j'ai trouvé auſſi dans quelques Animaux à quatre pieds.

* M. Antoine Maiſtrejean, dans ſon *Traité des Maladies de l'Oeil, Deſcription de l'Oeil, chap. 14,* a dit par conjecture, qu'il y a un ſuc nourricier qui s'épanche dans la cavité de la Capſule, dont le Criſtallin eſt tout auſſi-tôt imbibé : il ne dit point qu'il ait vû ce ſuc.

Cette liqueur eſt claire, tranſparente & très-liquide dans l'Homme, le Chien, le Chat, le Loup, le Liévre, le Lapin, le Mouton, l'Agneau, le Veau ; celle que l'on trouve dans le Bœuf & le Cheval eſt viſqueuſe, & file comme l'Humeur vitrée, filtrée par le papier gris.

Adverſ. 6. p. 90. M. Morgagni a trouvé cette liqueur dans la Capſule du Criſtallin de l'Homme, du Bœuf, du Veau, dans leſquels pourtant il ne l'a pas toûjours rencontrée ; il ne l'a pas vûë dans les Poiſſons, mais il dit que quelques-uns l'y ont trouvée.

J'ai trouvé cette liqueur dans un ſeul Marſoüin, de pluſieurs que j'ai diſſéqués : je n'en ai point trouvé dans un grand nombre d'autres Poiſſons, mais la partie extérieure de leur Criſtallin étoit très-humectée, ce qui la rend très-molle dans quelques Poiſſons, quoique la partie intérieure de ces mêmes Criſtallins ſe trouve quelquefois dure comme de la Corne. J'ai encore trouvé cette liqueur dans le Dindon & le Canard.

Généralement parlant, plus les Criſtallins ſont gros, plus on trouve de cette liqueur ; neantmoins on en trouve dans les Lapins & les Liévres, davantage que dans le Mouton qui a le Criſtallin plus gros. Je n'ai jamais trouvé le Criſtallin du Lapin & du Liévre ſans cette liqueur.

Pour trouver, avec autant de préciſion qu'il eſt poſſible, la quantité de cette liqueur, il faut tirer de l'Oeil le Criſtallin avec ſa Capſule, le peſer dans une balance qui puiſſe trébucher du moins à un demi-grain, après quoi il faut ouvrir la Capſule du Criſtallin à ſa partie antérieure & poſtérieure avec une Lancette ou un Scalpel très-fin, en faire ſortir la liqueur par une légere preſſion, & l'imbiber avec une éponge, afin qu'il ne reſte que le moins qu'il eſt poſſible, deſſus & dedans la Capſule, dont il ne faut point dépoüiller le Criſtallin, puis le peſer. La diminution du poids fera connoître la quantité de liqueur contenüe dans la Capſule. C'eſt de cette maniére que j'ai trouvé que la Capſule du Criſtallin de l'Homme en contenoit un demi-grain, lorſqu'il s'y en eſt rencontré ; j'en ai trouvé juſqu'à un grain dans les Yeux que j'ai mis tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures.

J'en ai trouvé au plus un grain & demi dans les Yeux du Chien-dogue : deux grains dans ceux du Mouton.

Le Lapin & le Liévre en contiennent jusqu'à 2 grains & demi : le Bœuf en a au plus 4 grains, & j'en ai trouvés jusqu'à 12 grains dans quelques Yeux de Chevaux.

J'ai voulu faire des expériences sur cette liqueur, il n'y a pas moyen de la faire sur celle de l'Homme, je n'ai pû en ramasser un seul grain de dix-huit Yeux ; le peu qu'il en a ne peut se rassembler pour former une goutte, & ne se détache pas du Cristallin & de sa Capsule. On ne peut non plus en rassembler assés dans les Yeux de Mouton pour faire une seule expérience ; car en supposant que tous les Yeux de Mouton contiennent chacun 2 grains de cette liqueur, on pourroit au plus en retirer un grain de chacun, il faudroit du moins dix-huit ou vingt Yeux pour en réünir assés pour faire une expérience, mais on ne trouveroit peut-être qu'un de ces Yeux qui contiendroit 2 grains de cette liqueur, & il s'en trouveroit beaucoup qui n'en contiendroient pas un grain & demi, on n'en trouve quelquefois qu'un grain, ainsi de quarante ou cinquante Yeux de Mouton, à peine en trouveroit-on assés pour faire une seule expérience. J'ai donc été obligé de me servir de la liqueur que l'on trouve dans la Capsule du Cristallin des Yeux de Bœufs & de Chevaux, qui, comme je l'ai dit, file & contient beaucoup de parties visqueuses capables de produire plus de coagulum & de précipité que celle de l'Homme & de quelques Animaux.

J'ai mêlé de cette liqueur avec l'Esprit de Sel, le mélange est devenu blanc, après quoi il s'est fait un précipité blanc ; elle s'est moins troublé avec l'Esprit de Vitriol.

Il ne s'est fait aucun changement avec l'Esprit de Nitre, ni avec l'Huile de Vitriol. Il s'est pour-tant trouvé de cette liqueur cristalline qui s'est troublée avec l'Esprit de Nitre & de Vitriol, comme il s'en est trouvé qui ne se sont point troublé avec l'Esprit de Sel & de Vitriol, mais rarement.

Cette liqueur a deux usages, 1.° elle empêche que le Cristallin ne se desséche; 2.° elle lui fournit sa nourriture.

Le Criſtallin ne peut ſe deſſécher pendant qu'il eſt humecté de cette liqueur, mais auſſi-tôt qu'elle lui manque, il devient ſec, dur & opaque, & peut ſe mettre en poudre, c'eſt ce que j'ai vû pluſieurs fois ſur des Cadavres, j'en ai donné une obſervation à M. Briſſeau, qu'il a inſéré dans ſon Traité de la Cataracte & du Glaucome, cet accident arrive à la ſuite d'une inflammation qui pénétre juſqu'au ligament ciliaire, & qui a ſuppuré. Les vaiſſeaux qui compoſent le ligament ciliaire ſe détruiſent, & ce ſont ces vaiſſeaux qui fourniſſent non-ſeulement l'humeur aqueuſe, mais encore la liqueur qui ſe répand dans la Capſule du Criſtallin, & qui y eſt charié par les vaiſſeaux qui partent du ligament, & ſont ramefiés dans la partie antérieure de la Capſule, & peut-être auſſi dans ſa partie poſtérieure.

L'Humeur aqueuſe n'étant plus fournie, à meſure qu'elle ſe diſſipe, les membranes ſe reſſerrent, le Criſtallin eſt pouſſé en devant avec ſa Capſule ſur la partie poſtérieure de l'Uvée où elle ſe colle. Mais le Criſtallin n'étant plus humecté par ſa propre liqueur criſtalline, ſe deſſéche & s'attache à la ſurface interne de la Capſule, & voilà ce qui a fait le fondement de toutes les Cataractes membraneuſes, comme je le dirai dans mon Mémoire de la Cataracte; c'eſt de-là auſſi que quelques Anatomiſtes ont déduit l'opacité de la Capſule*, parce que lorſqu'on a retiré cette Capſule de l'Oeil, on la trouve opaque & épaiſſe, mais ils n'ont pas pris garde qu'elle n'eſt épaiſſe que parce qu'il reſte ſur cette Capſule un peu de matiére du Criſtallin ſéche & opaque : ſi l'on prend le ſoin de la mettre dans l'eau, comme j'ai fait, pour détremper cette matiére, on la ſépare facilement de la Capſule que l'on trouve dans ſon épaiſſeur & ſa tranſparence naturelle.

* Hiſt. de l'Ac. 1722. p. 15. & 16.

Cette liqueur ſert encore de nourriture au Criſtallin, qui ſelon toute apparence, ne ſe nourrit pas de la même maniére que toutes les autres parties de nôtre corps, puiſque nous n'avons trouvé aucuns vaiſſeaux qui communiquent de la membrane dans le Criſtallin.

Il ſemble que cette liqueur étant épanchée dans la cavité de

de la Capſule, & qui environne de tous côtés le Criſtallin, peut le nourrir de l'une des deux maniéres ſuivantes. La premiére eſt qu'elle pénétre le Criſtallin dans toute ſa ſubſtance, & pour lors il ſe fait une application de cette liqueur dans toutes les fibres du Criſtallin, c'eſt le ſentiment de M. Antoine, il dit que le Criſtallin eſt nourri par imbition.

La ſeconde eſt que la partie la plus ſéreuſe de cette liqueur s'imbibe dans la ſubſtance du Criſtallin, & y va entretenir la tranſparence pendant que la partie la plus viſqueuſe reſte ſur la ſuperficie du Criſtallin s'y unit, en y formant une couche, ce qui eſt d'autant plus vrai-ſemblable que tous les Criſtallins ſe trouvent formés par ces ſortes de couches. D'ailleurs il n'y a point de doute que le Criſtallin ne puiſſe s'imbiber de la liqueur qui l'environne. Il en eſt quelquefois ſi gonflé dans certains Animaux qu'il ſe fend en trois rayons du centre vers la circonférence auſſi-tôt qu'on le tire de ſa Capſule, comme je l'ai dit ci-deſſus.



OBSERVATION DE L'E'CLIPSE DU SOLEIL, *Faite à son lever, le 15 Juillet de cette année 1730.*

Par M. CASSINI.

15 Juillet 1730. LE Soleil devant paroître éclipsé le 15 Juillet de cette année 1730, à son lever, nous observâmes, la veille, l'endroit de l'horizon où il commençoit à paroître, afin de choisir pour nôtre Observation un lieu où on le pût voir commodément, sans qu'il fût couvert par les Maisons ou E'glises qui sont, à l'égard de l'Observatoire, dans la partie de l'horizon qui est entre le Nord & l'Est où on devoit l'appercevoir, & nous observâmes le commencement de son lever à $4^h\ 9'$.

Le matin du 15 je dressai une Lunette de 8 pieds, garnie de mon Micrometre à réticules au point de l'horizon où je l'avois vû la veille. Il étoit couvert en partie de nuages, entre lesquels on voyoit cependant quelques endroits clairs, ce qui faisoit esperer qu'on pourroit en faire quelques Observations.

Le Soleil commença à poindre sur l'horizon à $8^h\ 9'$, mais il entra dans un nuage étroit, dont il sortit quelques minutes après, & à $9^h\ 15'\ 10''$ il parut assés distinctement éclipsé dans sa partie inférieure d'environ 3 doigts, à ce que je pus juger; car ayant essayé de mesurer la quantité de l'E'clipse avec le Micrometre, dont les fils extrêmes comprenoient le diametre horizontal du Soleil, je trouvai que son diametre vertical étoit beaucoup plus petit, ce qui est l'effet ordinaire de la réfraction. Je fus donc obligé de mesurer l'intervalle entre un fil parallele qui passoit par les deux cornes & le fil qui touchoit la concavité de l'E'clipse que je trouvai d'un doigt six minutes, dont le double, supposé le diametre du Soleil égal à celui de la Lune, dont il ne différoit pas sensi-

blement, meſure la quantité de l'Eclipſe, qui étoit par conſéquent de deux doigts douze minutes.

Cette quantité de l'Eclipſe doit être augmentée dans le rapport du diametre horizontal au diametre vertical, qui, comme on l'a dit, étoit diminué par l'effet de la réfraction.

Le Soleil entra enſuite dans un nuage, dont il ne ſortit que quelques minutes après, & à $9^h\ 27'\ 20''$ je jugeai la grandeur de l'Eclipſe d'un doigt, à $9^h\ 29'\ 18''$ d'un demi-doigt, à $9^h\ 30'\ 18''$ d'un tiers de doigt, & je déterminai ſa fin avec aſſés d'évidence à $4^h\ 32'\ 28''$.

M. Maraldi, qui a fait cette Obſervation dans un autre Appartement avec le Micrometre ordinaire, détermina la fin de l'Eclipſe à $4^h\ 32'\ 26''$.

Cette Eclipſe doit avoir paru plus grande dans les Pays Orientaux où le Soleil s'eſt levé ſur l'horizon plûtôt qu'à Paris. On en peut voir le détail dans les Ephémérides de M. Manfredy, qui a marqué pour Paris la grandeur de l'Eclipſe de 3 doigts 17 minutes à ſon lever, qui devoit arriver à $4^h\ 12'$, & la fin à $4^h\ 32'$, à quelques ſecondes près de celle que nous avons déterminée.



REGLES

POUR CONSTRUIRE DES THERMOMETRES DONT LES DEGRE'S SOIENT COMPARABLES,

Et qui donnent des idées d'un Chaud ou d'un Froid qui puissent être rapportés à des mesures connües.

Par M. DE REAUMUR.

15 Novemb. 1730.

LEs Thermometres sont sans contredit une des plus jolies inventions de la Physique moderne, & une de celles qui a le plus contribué à ses progrès. Ils nous ont valu un grand nombre de connoissances curieuses, qu'on n'eût pû se promettre sans leur secours. Combien y a-t-il de cas où sans les Thermometres nous ne serions pas parvenus à sçavoir que des liqueurs mêlées ensemble s'échauffent ? Sans les Thermometres nous n'aurions jamais découvert que certains Sels, en se fondant dans l'eau, la refroidissent ; qui sont ceux qui la refroidissent le plus. Nous ne sçaurions point qu'il y a de la Glace plus froide que d'autre Glace. Nous ignorerions que l'Eau qui bout, a acquis le plus grand degré de chaleur qu'elle puisse prendre, un degré au de-là duquel il n'est plus possible de l'échauffer. Enfin les Physiciens sçavent qu'une infinité d'expériences demandent à être faites le Thermometre à la main. Cet instrument même n'est pas à leur seul usage ; il n'est pas resté renfermé dans leurs seuls Cabinets ; généralement on aime à consulter le Thermometre sur la température de l'Air ; & c'est sur-tout lorsque le froid ou le chaud nous deviennent incommodes, qu'on aime à le consulter : pendant les rudes froids de l'Hyver, pendant les chaleurs accablantes de l'Eté, dans les conversations ordinaires, chacun rend vo-

lontiers compte des degrés dont ſon Thermometre eſt deſcendu ou monté.

Mais ſi on ſçait combien cet inſtrument eſt amuſant & utile, on ſçait auſſi combien il eſt encore imparfait. Les marches de preſque tous les Thermometres ſont différentes ; quoiqu'expoſés au même air, la liqueur des uns monte plus haut, ou deſcend plus bas que celle des autres, pour marquer les mêmes augmentations & les mêmes diminutions de chaleur. Le changement de temperature d'air qui ſera marqué ſur l'un par quatre ou cinq degrés, ſera marqué ſur l'autre par ſept à huit, par deux ou trois, ou par tout autre nombre de degrés ; & on ne connoît point les rapports qui ſont entre les degrés de différents Thermometres. Les maniéres dont ils s'expriment, s'il eſt permis de parler de la ſorte, étant toutes différentes, on n'entend que la langue d'un Thermometre qu'on a ſuivi pendant pluſieurs années, on n'entend nullement celle de tout autre. Auſſi les Thermometres ne nous ont-ils encore preſque de rien ſervi pour nous donner des connoiſſances du plus grand degré de froid & du plus grand degré de chaud des différents climats, qui ſeroient pourtant des connoiſſances utiles & curieuſes. Nous aimerions à ſçavoir juſqu'à quel point des hommes, tels que nous, peuvent ſoûtenir le froid ou le chaud. Il ſeroit important de connoître à peu-près la température de l'air qui eſt néceſſaire pour faire croître des Plantes & des Arbres qui, quoiqu'ils ne s'élevent pas actuellement dans nôtre Pays, pourroient peut-être s'y naturaliſer.

Non ſeulement on n'entend pas la langue des différents Thermometres, chacun même n'entend que très-confuſément celle du ſien. On ſçait les termes où il a marqué le plus grand chaud, ou le plus grand froid, on ſçait le nombre des degrés qui les ſéparent, mais ni aucun degré en particulier, ni tous ces degrés enſemble ne nous rappellent aucune idée de véritable meſure.

Les cauſes d'où naiſſent les défauts des Thermometres, ne ſont pas moins connües que les défauts eux-mêmes ; auſſi

ſeroit-il très-inutile de les rappeller ici, s'il ne convenoit de les avoir préſentés, pour juger ſi les expédients, auxquels j'ai crû qu'il falloit avoir recours, ſont capables de produire tout ce que j'en ai eſperé.

Les Thermometres ſont des inſtruments de Phyſiciens, les Phyſiciens ont été intéreſſés à les perfectionner ; ils y ont travaillé ; ils en ont imaginé de pluſieurs figures différentes ; ils en ont rempli de différentes liqueurs. Pour l'ordinaire on s'eſt ſervi d'Eſprit de Vin. C'eſt l'air qu'on a fait agir dans pluſieurs Thermometres ; dans quelques-uns l'air, en ſe dilatant, n'a eu à faire mouvoir que de l'Eſprit de Vin, dans d'autres il a eu à faire mouvoir une colonne de Mercure.

Nous n'avons garde d'entreprendre d'expliquer ici toutes les différentes conſtructions de Thermometres qu'on a imaginées, ce ſeroit la matiére d'un aſſés long ouvrage ; d'ailleurs nous n'avons beſoin actuellement que de la plus ſimple conſtruction, & une des plus anciennes, & auſſi de celle qui a prévalu, je veux dire de celle du Thermometre qu'on a appellé le *Thermometre de Florence,* qui eſt celui qu'on voit journellement par-tout. Il conſiſte dans une Boule creuſe de verre, ſcellée à un long & délié Tuyau de verre, dont le bout ſupérieur eſt ſcellé hermétiquement. On ſçait de reſte que la Boule & partie du Tuyau ſont remplis d'un Eſprit de Vin coloré de rouge ; que quand la chaleur de l'air, qui environne le Thermometre, augmente, que l'Eſprit de Vin, contenu dans la Boule ſe dilate, qu'il eſt forcé de s'élever plus haut dans le Tuyau, qu'au contraire la même liqueur deſcend dans le Tuyau, lorſqu'elle perd de ſa chaleur.

Ce Tuyau de verre eſt aſſujetti ſur une Planche mince, couverte d'un Papier, ſur lequel les degrés ſont imprimés. Des Papiers ſemblablement imprimés, ou gravés, ſervent pour des Thermometres différents, comme ſi les étendües de leurs degrés devoient être les mêmes.

Il ſuit cependant de cette conſtruction, & on le ſçait aſſés, que pendant qu'il ſe fait quelque changement dans la température de l'air, que la liqueur parcourt plus ou moins de

chemin dans différents Thermometres, ſoit en montant, ſoit en deſcendant, ſelon que le diametre de la Boule contient plus ou moins de fois celui du Tuyau. De-là vient que certains Thermometres ſont peu ſenſibles, & que d'autres au contraire le ſont trop; que faute de place pour recevoir la liqueur, le Tuyau ou la Boule de ces derniers ſont quelquefois briſés par l'effort qu'elle fait pour ſe dilater, & que dans de pareils Thermometres la liqueur rentre quelquefois dans la Boule avant que le froid ſoit devenu exceſſif. Que de-là vient enfin qu'il eſt impoſſible de trouver des Thermometres dont les marches ſoient les mêmes ou proportionnelles, parce que quelque choſe qu'on faſſe, il eſt preſque impoſſible de parvenir à avoir deux Boules de verre, d'égal diametre & d'une même rondeur; car ces Boules ne ſont jamais des Boules parfaites. Il n'eſt pas plus facile d'avoir des Tuyaux de diametres déterminés. Dailleurs ils ſont preſque toûjours plus gros à un bout qu'à l'autre, & aſſés conſidérablement; leur intérieur a ſouvent des inégalités dont on ne ſçauroit juger par dehors. Tout cela enſemble va plus loin qu'on ne l'imagineroit; par des meſures éxactes, j'ai quelquefois trouvé que de deux portions d'un même Tuyau, égales en longueur, & qui ſur un Thermometre auroient été priſes pour des degrés égaux, l'une contenoit près du double de la liqueur contenuë dans l'autre.

Mais ſuppoſons que malgré ces difficultés invincibles, on ſoit parvenu à ſçavoir adapter aux Boules des Tubes dont les diametres ſoient aux leurs dans une proportion conſtante, & celle qui a été trouvée la meilleure; ce n'en ſera pas encore aſſés pour avoir des Thermometres qui ayent les mêmes allûres, ou des allûres proportionnelles, c'eſt-à-dire, qui dans les mêmes changements de température d'air donnent le même nombre de degrés. Il y a encore une autre ſource de différences à laquelle on ne ſemble pas avoir aſſés pris garde, du moins ne ſçais-je point qu'on ait cherché à y apporter de remede. C'eſt la qualité de la liqueur, dont on remplit la Boule du Thermometre. Il s'en faut bien que

toutes les liqueurs ſe dilatent également à un même degré de chaleur. On ne l'ignore pas, & on a choiſi par préférence l'Eſprit de Vin pour la liqueur des Thermometres, parce qu'il eſt peut-être celle qui eſt la plus ſenſible aux impreſſions du froid & du chaud, ſi on excepte l'air. L'Eſprit de Vin eſt beaucoup plus dilatable que l'Eau. L'Eſprit de Vin le plus rectifié n'eſt pourtant qu'un mêlange d'une matiére inflammable, d'une Huile eſſentielle ou éthérée avec de l'Eau; l'Eau fait la meilleure portion de ce mêlange. La grande *dilatabilité* de l'Eſprit de Vin, s'il m'eſt permis de me ſervir de ce terme commode, & dont j'aurai beſoin plus d'une fois, eſt donc dûë à l'Huile éthérée qu'il contient; plus il y en aura dans de l'Eſprit de Vin, & plus il ſera dilatable; c'eſt-à-dire, que les Eſprits de Vin les mieux rectifiés ſe dilateront davantage, pendant la même augmentation de la chaleur de l'air, que ceux qui le ſont moins. Dans deux Thermometres, égaux dans tout le reſte, & chargés auſſi chacun d'une quantité égale, mais d'un différent Eſprit de Vin, la liqueur ne s'élevera, ni ne s'abbaiſſera également; ils exprimeront différemment les changements de chaud & de froid. Or, non-ſeulement on n'a pas cherché juſqu'ici à remplir les Thermometres avec un Eſprit de Vin, d'une qualité déterminée & connuë, on s'eſt ſervi indifféremment de ceux qui ſe ſont preſentés. Les faiſeurs de Thermometres ordinaires ſe contentent ſouvent d'employer une ſorte d'Eſprit de Vin très foible, une eſpece d'Eau-de-vie.

M. Amontons a négligé d'être auſſi éxact qu'il a coûtume de l'être, lorſqu'il a parlé de la rarefaction de l'Eſprit de Vin, & de celle de l'Eau-de-vie, il en a parlé comme ſi toutes les eſpeces d'Eſprits de Vin, & comme ſi toutes les eſpeces d'Eaux-de-vie devoient, chacune dans leur genre, donner ſenſiblement les mêmes rarefactions, il n'eſt pas même le ſeul Phyſicien qui ſe ſoit exprimé ainſi. Il eſt pourtant eſſentiel, pour comparer les effets du chaud & du froid ſur différents Thermometres, qu'ils ſoient remplis d'une même liqueur ou de deux liqueurs, dont les rapports des degrés de dilatabilité ſoient

ſoient connus; & c'eſt ce qu'on n'a point du tout cherché à déterminer, & ce que nous tâcherons de faire dans la ſuite de ce Memoire. On y verra que cette ſource d'erreurs peut rendre le nombre des degrés d'un Thermometre preſque double de celui d'un autre, expoſé au même air.

Cet inconvénient n'eſt peut-être pas moins grand dans les Thermometres dont le jeu eſt produit par l'air qui y eſt renfermé, que dans ceux qui ne renferment que de l'Eſprit de Vin ou toute autre liqueur. Pour peu qu'on y penſe, on ne ſera pas diſpoſé à croire que l'air de toutes ſaiſons, de tous Pays, pris à un égal degré de chaud, ſoit également dilatable. L'air n'eſt nulle part un fluide, ou liquide pur. Dans un même volume d'air, il y a plus ou moins d'air, ſelon qu'il eſt plus chargé d'exhalaiſons ou de vapeurs, & des expériences ont appris qu'un peu d'eau en vapeurs, mêlée avec l'air, eſt capable d'augmenter conſidérablement les grandes diſpoſitions qu'il a à ſe rarefier.

Enfin quoiqu'on employât une liqueur, dont les rapports de dilatabilité ſeroient connus, ce ne ſeroit pas encore aſſés; les liqueurs n'ont point de volumes conſtants, ceux des ſolides ne le ſont pas non plus, mais ils ne varient ni ſi conſiderablement ni ſi ſubitement que ceux de certaines liqueurs; elles paſſent continuellement d'un degré de dilatation à un ou à pluſieurs autres, & reviennent enſuite à des degrés de condenſation ſelon l'état de l'air qui agit ſur elles. Or entre ces degrés de dilatation ou de condenſation dont eſt ſuſceptible la liqueur qu'on veut renfermer dans le Thermometre, il en faut trouver un qui ſoit ſenſible, qu'on puiſſe avoir en tout Pays, & qui ſoit le terme d'où l'on commence à compter les degrés, ou auquel on finiſſe de les compter. La belle propriété que M. Amontons a découverte à l'Eau, celle de n'être plus capable de s'échauffer lorſqu'elle a commencé à boüillir, donne un de ces termes, un de ces degrés de dilatation qu'on peut avoir en tout temps, & qui ſont les mêmes par-tout. Il a auſſi cherché à ſe ſervir de cette propriété de l'Eau pour conſtruire des Thermometres qui donnaſſent des degrés qui

puſſent être conſtants en tout Pays. L'uſage qu'il en a fait eſt plein d'adreſſe, il s'eſt ſervi d'air, qu'il a chargé de Mercure ; au moyen de l'eau boüillante il a dilaté cet air, qui, en ſe dilatant, a élevé le Mercure à un point qui a été un point fixe pour M. Amontons. Ces Thermometres à Air & à Mercure ont ſervi à en graduer d'autres à Eſprit de Vin. Mais les différences qui ſont dans l'air, pris en différents temps, en différentes ſaiſons, en différents pays, ne me permettent pas de croire que les premiers Thermometres ſoient propres à produire les effets qu'on en a eſpéré. Si quelques-uns de ceux qui ont voulu répéter les expériences de M. Amontons ſur la dilatation de l'air chargé de différents poids, n'ont pas trouvé les mêmes réſultats qu'a eus cet exact Académicien, c'eſt peut-être qu'ils les ont faites ſur un Air différent de celui qui a ſervi à ſes épreuves. Au ſurplus cet inconvénient n'eſt pas le ſeul qui puiſſe empêcher ce Thermometre de répondre parfaitement aux vûës ingénieuſes de ſon inventeur. L'état moyen de chaleur qu'il veut à l'Air, & qu'il ne détermine que d'une maniére vague, la difficulté de trouver des Boules & des Tubes de capacités égales, ou proportionnelles ; difficulté bien grande à ſurmonter dans la pratique ; l'augmentation qui ſurvient au volume de l'Air, qui affoiblit ſa force de reſſort, & qui ne la laiſſe pas telle qu'elle devroit être pour produire l'effet dont elle eſt la cauſe, & la meſure ; en un mot, bien d'autres difficultés ſur leſquelles il ſeroit long d'inſiſter, comme les différentes réductions qu'il faut faire des peſanteurs variables de l'Atmoſphere, font que ce Thermometre n'eſt pas ſuſceptible de toute la préciſion qu'on lui deſireroit. Auſſi un Auteur Italien a avancé depuis peu, & a tâché de prouver, que le Thermometre de M. Amontons eſt inférieur à celui de Florence; c'eſt aſſûrément le dégrader beaucoup trop, quoiqu'il ſoit vrai que l'uſage de l'ancien prévaut, mais ce n'eſt que parce que l'autre eſt très-difficile à conſtruire.

Il s'en faut bien que j'aye rien penſé ſur cette matiére d'auſſi ingénieux que ce qu'a imaginé M. Amontons. Tout ce que

j'ai à propoſer eſt extrémement ſimple, mais je le crois propre à nous donner des Thermometres qui ſe faſſent entendre continuellement, & en tout pays. J'explique d'abord le plan que j'ai crû devoir ſuivre, & j'expliquerai enſuite ce que j'ai fait pour le mettre en pratique.

Je m'en tiens à une liqueur très-dilatable, c'eſt-à-dire, à l'Eſprit de Vin ; mais comme il eſt une infinité d'eſpeces d'Eſprits de Vin, j'en choiſis une par préférence qu'on puiſſe avoir commodément en tout temps, & en tout pays. J'établis des caracteres pour reconnoître cette eſpece d'Eſprit de Vin, propres à empêcher de la confondre avec toute autre, & à déterminer de combien elle en differe.

Je réduis l'Eſprit de Vin choiſi, & caractériſé à un volume connu de dilatation. Je le pourrois par le moyen de la chaleur de l'Eau boüillante, en uſant de quelques précautions dont je parlerai dans la ſuite, mais j'aime mieux me ſervir de la congélation artificielle de l'Eau, c'eſt-à-dire, de l'Eau qu'on fait geler ; M. Amontons lui-même s'en eſt ſervi. Le degré de dilatation, ou, ſi l'on veut, de condenſation, auquel cette glace réduit l'Eſprit de Vin, peut être regardé comme un terme fixe, & aiſé à avoir dans preſque tous les Pays du monde où on ſçait faire uſage des Thermometres. Quoique l'Hiver nous faſſe voir de la glace plus froide que d'autre glace, il n'en ſera pas plus difficile d'établir, ſoit par des raiſonnements clairs, ſoit par des expériences, que le degré de froid de la glace artificielle, le commencement de la congélation de l'Eau, eſt un degré conſtant, & tel qu'il nous le faut.

Le caractére de l'Eſprit de Vin étant bien déterminé ; l'Eſprit de Vin ayant été réduit à un volume qui donne un terme ſaiſiſſable, tout ce qui reſte à faire eſt de graduer les différents Thermometres, de façon que leurs marches ſoient les mêmes ou proportionnelles, malgré les différents rapports qui peuvent ſe trouver entre les diametres des Boules, & ceux des Tuyaux, malgré les formes irréguliéres que peuvent avoir les Boules, & malgré les inégalités qui peuvent ſe rencontrer dans les Tuyaux ; & de les graduer de façon que les

mêmes degrés, dans les Thermometres différents, ſoient les mêmes meſures de froid, ou de chaud ; & que ces meſures donnent quelques idées, car les degrés ordinaires n'en donnent point. Ils m'apprennent bien, par exemple, que la liqueur a monté de deux ou trois pouces, mais ils me laiſſent abſolument ignorer le changement qui s'eſt fait dans le volume de la liqueur pendant qu'elle s'eſt élevée de deux ou de trois pouces. On auroit, ce me ſemble, tout ce qu'on peut déſirer, ſi chacun des degrés donnoit une idée préciſe des degrés de dilatation, ou de condenſation de la liqueur, car l'effet de l'augmentation de chaleur eſt l'augmentation de volume. Comment peut-on mieux meſurer les degrés de chaleur qui s'ajoûtent ſucceſſivement les uns aux autres, que par des degrés qui expriment les portions, dont le volume s'eſt ſucceſſivement renflé, qui en donnent une idée claire. Je m'explique : la quantité d'Eſprit de Vin que je fais entrer dans mon Thermometre m'eſt connuë, je connois le nombre de certaines parties aliquotes dont elle eſt compoſée ; par exemple, le volume de ma liqueur condenſée par la glace artificielle contient 500 parties ; que ces parties ſoient chacune de 10, de 20, &c. lignes cubiques, il n'importe, pourvû que j'en aye la meſure. Je marque ſur le Tuyau de mon Thermometre juſqu'où va ce volume de liqueur, compoſé de 500 parties, lorſqu'il eſt condenſé par la glace artificielle* ; c'eſt au-deſſus & au-deſſous de ce terme que je vais marquer les degrés. Mais au lieu de prendre, pour chaque degré, des parties du Tuyau égales entr'elles en longueur, comme elles le ſont dans les Thermometres ordinaires, je détermine chacun des degrés de façon qu'il eſt une portion du Tuyau qui contient une des parties du volume de liqueur qui a été déterminé. Dans nôtre cas, par exemple, où ce volume étoit de 500 parties, chaque degré ſera $\frac{1}{500}$ partie de ce volume, & c'eſt en pareilles parties, en pareils degrés que le Tuyau eſt entiérement gradué. Expoſons aux impreſſions de l'air des Thermometres ainſi conſtruits ? Les changements qui y ſeront exprimés, le ſeront en expreſſions intelligibles, qui nous

* Fig. 1. CC.

donneront des idées déterminées, au lieu des idées vagues que les autres Thermometres nous donnent. Que la liqueur s'éleve de 1, 2, 3, ou, ſi l'on veut, de 20 degrés au-deſſus du terme marqué par la congélation de l'eau. Cela ſignifiera que le volume qui étoit 500 eſt devenu 501, 502, 503, ou ſi l'on veut, 520. Quand je ſçaurai que la liqueur s'eſt élevée de 20 degrés, je ſçaurai que ſon volume eſt augmenté de $\frac{20}{500}$ ou d'un $\frac{1}{25}$. Si au contraire le froid a fait deſcendre la liqueur de 10 degrés au-deſſous du terme marqué, je ſçaurai que le froid l'a condenſée, ou a diminué ſon volume de $\frac{1}{50}$. Ainſi dans toute leur marche, les Thermometres donneront des idées préciſes des changements qui ſe ſont faits dans un volume connu d'une liqueur connuë. Alors on s'entendra, lorſqu'on comparera les degrés où eſt monté le Thermometre dans une ſaiſon avec ceux où il eſt deſcendu dans une autre; lorſqu'on comparera les obſervations faites en différents Païs ſur différents Thermometres conſtruits ſur ces principes.

Il ne me ſemble pas qu'on puiſſe demander aux Thermometres quelque choſe de plus que ce que la conſtruction que nous venons de leur ſuppoſer leur donne; mais il pourra paroître difficile de les conſtruire ſur ces principes, de leur donner la graduation dont nous venons d'expliquer les avantages. Le moyen d'y réüſſir eſt pourtant bien ſimple, ou plûtôt très-groſſier. Il eſt néantmoins certain que ſi l'on veut abſolument d'auſſi petits Thermometres que ceux qui ont été en uſage juſqu'ici, qu'il n'eſt guéres poſſible de graduer leurs Tuyaux en meſures exactes qui ſoient des portions du volume de la liqueur qu'on a renfermée. Mais pourquoi s'en eſt-on tenu juſqu'ici à les faire tous ſi petits? Il y a grande apparence que c'eſt parce qu'on a continué de les faire tels qu'ont été les premiers. Sanctorius, leur inventeur, vouloit que ſes malades puſſent tenir commodement leurs Boules dans la main. Il en eſt arrivé aux Thermometres, ce qui ſeroit arrivé aux Horloges ſi on eût commencé par de petites Montres, & qu'on n'eût cherché qu'à perfectionner des Horloges d'un

ſi petit volume; on n'auroit jamais eu des meſures exactes du temps juſqu'à ce que quelqu'un eût propoſé qu'outre les Horloges qu'on eſt bien aiſe de porter ſur ſoi, on en conſtruiſit qui reſtaſſent toûjours dans les Appartements ; qu'alors on parviendroit à en avoir dont les mouvements ſeroient reglés avec une préciſion qu'on ne pouvoit ſe promettre de donner aux Montres. Les Barometres devoient auſſi nous faire penſer à prendre pour les Thermometres de plus gros Tubes que ceux dont on ſe ſert ordinairement. Les Barometres ſimples ne valent rien, lorſqu'ils ſont faits de Tubes preſque capillaires, tels que le ſont la plûpart de ceux des Thermometres.

Auſſi parviendra-t-on à faire d'excellents Thermometres, dès qu'on employera des Tuyaux de verre d'une groſſeur ſuffiſante ; & elle le ſera, pourvû que leur diametre égale celui des gros Barometres, c'eſt-à-dire, pourvû qu'ils ayent intérieurement 2 lignes $\frac{1}{2}$ ou 3 lignes de diametre; on pourra pourtant en employer de plus petits, mais leur conſtruction n'en ſera que plus aiſée & plus ſûre ſi leurs diametres ſont encore plus grands, s'ils vont juſqu'à 3 lignes $\frac{1}{2}$, les groſſeurs des Boules ſeront augmentées proportionnellement.

Il eſt vrai que des Boules & des Tuyaux, des diametres dont nous les demandons, ne feront pas d'auſſi jolis inſtruments que le ſont les Thermometres ordinaires. Si les Aſtronomes ne vouloient ſe ſervir que de jolis quarts de cercle, il faudroit qu'ils renonçaſſent à en avoir qui leur donnaſſent des meſures exactes. Dailleurs ſi on ne veut faire faire aux nouveaux Thermometres que le chemin que font les anciens, ſi on ne veut point que le degré de chaleur de l'eau boüillante y ſoit marqué, la longueur des nouveaux Tuyaux excedera peu celle des Tuyaux ordinaires; la groſſeur de leurs Boules ne deviendra pas aſſés conſidérable pour être difforme, ni pour être embarraſſante ; la groſſeur du Tuyau n'a rien de déſagréable : or, pendant que la capacité des Tuyaux égaux en longueur croît comme les quarrés des diametres, celle des Boules croît comme les cubes de leurs diametres. Des Boules qui auront environ 4 pouces $\frac{1}{2}$ de diametre

adaptées à des Tuyaux dont le diametre intérieur ſoit à peu près de 3 lignes, ſuffiront pour des Thermometres bons & ſenſibles.

Perſuadé qu'on paſſera ſans peine ſur la petiteſſe des Thermometres ordinaires, pour en avoir de meilleurs, je vais décrire comment il faut graduer & remplir nos grands Thermometres. Les expériences que j'ai faites des procedés que j'ai à rapporter, m'ont appris qu'ils ſont plus aiſés, & moins longs à mettre en pratique, qu'ils ne le paroîtront dans l'explication que j'ai à en donner. Je ſuppoſe que j'aye une Boule d'un diametre convenable, ou à peu près, ſcellée à un Tuyau de groſſeur ſuffiſante*. Toutes les Verreries fourniront des Tuyaux, tels qu'il les faut, celle qui s'eſt établie depuis quelque temps à Seve eſt extrêmement commode, pour y faire faire tout ce qu'on a beſoin dans ce genre, c'eſt celle à qui je me ſuis addreſſé. * Fig. 1. A.

Comme le Thermometre doit être conſtruit la meſure à la main, la plus grande affaire eſt de ſe fournir de différentes meſures. Il en faut de très petites, qui ſont celles qui donnent les derniéres diviſions du volume de la liqueur qu'on veut faire entrer dans le Thermometre, ce ſont celles-là même qui ſervent à marquer l'étendüe de chaque degré du Tube. Il en faut auſſi de grandes, qui contiennent les unes 25, les autres 50, & d'autres juſqu'à 100 des plus petites meſures. L'uſage de ces grandes eſt d'abbréger l'opération. Chacune des petites meſures eſt telle qu'elle contient ſeulement la quantité de liqueur qui peut occuper deux ou trois, ou quatre lignes de hauteur dans le Tube. Tout cela eſt indifférent, & fait ſeulement que chaque degré a plus ou moins d'étendüe, ce qui eſt arbitraire, & ne change rien dans la marche du Thermometre, & dans le rapport exact qu'elle doit avoir avec celle de tout Thermometre conſtruit ſur les mêmes principes.

Mais la forme de la meſure eſt eſſentielle, j'ai choiſi celle d'une ſorte de petit Inſtrument aſſés connu des Phyſiciens. Il eſt fait d'une portion d'un petit Tuyau de verre qu'on Fig. 2, 3, 4, & 5.

* Fig. 2, 3, 4, 5, M. a renflé au milieu en eſpece de figure d'olive*, & dont ſes deux bouts ont été tirés en Tuyaux extrêmement déliés, & véritablement capillaires*. En un mot, les Tuyaux qui aboutiſſent, de part & d'autre, à la partie renflée, ſont ſi petits, qu'une goutte de liqueur y occuperoit l'étendüe de plus d'un pouce. Leur longueur eſt arbitraire, 15 à 16 lignes ſuffiſent à chacun de ces petits Tuyaux, ils peuvent avoir chacun plus de deux pouces. Il y a deux maniéres de remplir ce petit Inſtrument l'une & l'autre également ſûres. La premiére eſt de poſer un de ſes bouts dans la liqueur, & de ſuccer par l'autre bout, qu'on tient dans la bouche, juſqu'à ce qu'on ſente que la liqueur vient moüiller la langue; l'autre eſt d'enfoncer la meſure dans la liqueur juſqu'au deſſus du renflement, bientôt elle s'éleve à l'extrémité ſupérieure du Tuyau capillaire. On bouche le bout ſupérieur de ce Tuyau avec le doigt, ou plus ſûrement encore avec la langue, ainſi on retire du vaſe la meſure pleine de liqueur, ſans qu'il s'écoule une goutte de celle qu'elle a reçûë. Avec cette meſure j'en remplis de plus grandes ; chacune de celles-ci conſiſtent en une Boule de verre, de diametre plus ou moins grand, adaptée à un Tube aſſés gros, de 4 à 5 pouces de longueur*. Il eſt abſolument eſſentiel que ces grandes meſures ſoient très-exactes; on marque avec un fil*, qui entoure leur col ou le Tube, juſqu'où elles doivent être remplies. On les meſurera chacune au moins deux ou trois fois. La petite peine qu'on y trouvera ſera payée par le plaiſir qu'on aura de voir combien cette façon de meſurer eſt préciſe.

* OO.

* Fig. 6. & 7.

* q.

Dès qu'on eſt une fois fourni de grandes & de petites meſures, on eſt en état de graduer aſſés vîte des Thermometres, quelque différence qu'il ſe trouve entre les capacités de leurs Boules & de leurs Tubes. Graduons-en un. Les procédés que nous ſuivrons, guidront pour la graduation de tout autre. Commençons pourtant par remarquer qu'on ne doit ſonger à le remplir d'Eſprit de Vin, que lorſque ſes degrés auront été marqués. Je ſuppoſe que la Boule & le Tube, qui me feront bien-tôt un Thermometre, ſont ſcellés enſemble.

ensemble. On marquera à peu-près sur ce Tube l'endroit où l'on veut que se trouve le terme de la congélation de l'eau, & cela par le moyen d'un fil assés fin, arrêté par un nœud autour du Tube *. * Fig. 1. *B.*

Ce terme de la congélation de l'eau peut être pris arbitrairement sur une portion du Tuyau d'une assés grande étendüe; tout ce que sa détermination exige, c'est qu'il soit au moins une fois plus près de la Boule que de l'extrémité supérieure du Tuyau. Quand la distance de ce terme à la Boule ne seroit que le tiers ou le quart de l'autre distance, souvent il n'y auroit aucun inconvenient.

Je verse ensuite dans le Tuyau des mesures de 100, ou même des mesures plus grandes, jusqu'à ce que, la Boule étant remplie, la liqueur s'éleve au terme marqué. Mais une circonstance essentielle à observer, & qui sembleroit devoir jetter en bien des embarras, c'est que le volume de la liqueur qui est borné par ce terme, doit être exprimé par un nombre exact de centaines, par exemple, par 500, par 800, par 1000. Or il n'y a que peu de cas où cela se puisse trouver. Dans une infinité d'autres cas la surface de la liqueur sera un peu au dessous, ou un peu au dessus du fil; alors il n'y a qu'à élever ou abaisser le fil jusqu'à ce qu'il soit le vrai terme du volume mesuré *. Dans un grand nombre d'autres cas la derniére mesure de 100, qui a été versée, suffit à peine pour remplir la Boule *; & si on ajoûtoit une nouvelle mesure de 100, elle monteroit trop haut dans le Tube. L'expédient auquel j'ai recours alors est simple: au lieu de verser un nombre de mesures de liqueur moindre que 100, ce qui donneroit des nombres, d'où résulteroient des degrés difficiles à comparer sur différents Thermometres, je fais entrer dans le Tube des petits grains d'une matiére pesante & solide; comme des grains de gros gravier, de petits fragments de verre. Des grains de plomb seroient la plus commode des matiéres, si une circonstance, dont nous parlerons bientôt, ne demandoit quelquefois qu'on leur en préférât d'autres. Ces grains solides, quels qu'ils soient, tombent dans la Boule *;

* Fig. 1. *CC.*

* Fig. 8. *H.*

* Fig. 8. *R.*

ils y occupent une place qui auparavant étoit occupée par de la liqueur ; la liqueur monte dans le Tube ; des grains jettés ſucceſſivement la font élever juſqu'au terme où on la veut *. Ces grains produiſent un effet ſemblable à celui qu'on produiroit, ſi on étoit maître de diminüer à ſon gré la capacité de la Boule. Comme le volume qu'ils y occupent n'eſt pas bien grand, & que d'ailleurs leur dilatabilité eſt ſi petite, en comparaiſon de celle de l'Eſprit de Vin, qu'elle peut être regardée comme nulle, ils ne produiront par la ſuite aucun dérangement ſenſible dans la marche du Thermometre.

* Fig. 8. *CC.*

La liqueur dont je remplis la meſure de 100 n'eſt que de l'eau. J'évite d'employer l'Eſprit de Vin pour graduer ; le volume de la quantité qu'on auroit fait entrer dans le Thermometre, pourroit croître avant que l'opération fût finie. Des expériences, qui ſeront rapportées dans la ſuite, prouveront au contraire qu'il n'y a nullement à craindre que le volume de l'eau change ſenſiblement pendant le temps néceſſaire à graduer le Thermometre.

Que celui ſur lequel nous allons continuer de travailler, contienne 1000 meſures juſqu'au terme fixé pour la congélation artificielle *, c'eſt au deſſus & au deſſous de ce terme qu'il nous faut marquer les degrés. Le nombre des ſupérieurs que nous appellons *degrés de dilatation*, doit être au moins double de celui des inférieurs que nous nommons *degrés de condenſation.* Ce ſont ceux-ci qui doivent être marqués les premiers. Si je veux qu'il y en ait 25, 30, ou tout autre nombre, je vuide de l'eau de mon Thermometre dans une meſure de 25, ou de 30, juſqu'à ce que je l'aye remplie. Ainſi depuis *CC* juſqu'en 25 * il reſte un vuide de 25 meſures ou degrés.

* Fig. 1. *CC.*

* Fig. 1.

Cela fait, j'attache le Thermometre, avec de petites cordes ou des fils de Léton *, ſur la Planche deſtinée à le porter par la ſuite *, & ſur laquelle ſes degrés doivent être écrits. Un papier blanc, collé deſſus, eſt prêt à recevoir les traits. Le premier que je tire eſt celui de la congélation de l'eau ; il eſt poſé à

* Fig. 8. *LL. CC.*

* Fig. 8. *SS. TT.*

la hauteur du fil qui la marque ſur le Tube*. Je tire enſuite un ſecond trait vis-à-vis le niveau de l'eau*, & alors je ſuis en état de commencer à graduer. Je remplis une petite meſure, je la vuide dans le Tuyau : quand toute ſa liqueur eſt deſcendüe, je tire un trait vis-à-vis l'endroit où la ſurface de l'eau s'eſt élevée. On remplit enſuite une ſeconde fois la meſure, on la vuide dans le Tube, & on tire encore un trait à l'endroit où s'eſt élevée la ſurface de l'eau. On répéte cette manœuvre tout autant de fois que le demande le nombre des degrés qui peuvent être contenus dans la capacité du Tuyau, & qui doivent être marqués ſur la Planche.

* Fig. 8. CC.

* 25.

Pour les premiers Thermometres que je fis faire, on rempliſſoit d'eau la petite meſure qui devoit donner l'étendüe d'un degré, mais l'expérience m'apprit que la graduation devenoit longue à faire, &, qui pis eſt, incertaine. Une petite meſure d'eau, verſée dans un long Tuyau, ne ſuffit preſqu'à en moüiller les parois ; elle coule lentement le long de ces parois auxquelles elle a de la diſpoſition à s'attacher. On eſt incertain du temps où toute l'eau d'une meſure eſt deſcendüe ; toute celle des premiéres meſures ne deſcend pas, il en reſte toûjours d'adhérente aux parois. Je penſai que ſi au lieu de remplir la petite meſure d'eau, je la rempliſſois de Mercure, que j'éviterois tous ces inconvénients. Le Mercure ne s'attache point au verre, & ce peſant liquide deſcend promptement. Auſſi ai-je vû qu'en l'employant, la graduation étoit bien faite & bientôt faite. On y gagne en occupant deux Artiſtes à la faire. L'un remplit la petite meſure de Mercure, & la vuide dans le Tuyau. Dès qu'elle eſt deſcendüe dans la Boule, elle ſouleve l'eau à la hauteur où elle doit monter. Dans l'inſtant, le ſecond Artiſte tire un trait ſur la Planche, vis-à-vis le niveau de l'eau. Une centaine de degrés, ou moins, qu'on a à marquer ſur la Planche, ſont ainſi marqués en très-peu de temps & très-exactement.

Tous les traits ayant été tirés, on ôte le Thermometre de deſſus la Planche, & alors on écrit à ſon aiſe la valeur de chaque trait, ſelon ſa place, c'eſt-à-dire, le nombre de chaque

degré ; je les fais même écrire des deux côtés du Tube, & de chaque côté d'une maniére différente *. D'un côté on commence par mettre o vis-à-vis le grand trait qui marque la congélation de l'eau. Le premier trait au dessous est marqué 1 ; celui qui suit en descendant, est marqué 2, & ainsi de suite jusqu'à 25, nombre auquel nous nous sommes fixés dans nôtre exemple ; & c'est-là la suite des degrés descendants ou de condensation. Vis-à-vis le premier trait, au dessus de celui de la congélation, j'écris aussi 1 ; 2 vis-à-vis le suivant ; & ainsi j'écris la suite des degrés ascendants ou de dilatation.

* Fig. 8.

De l'autre côté du Tube, vis-à-vis le terme de la congélation de l'eau, j'écris 1000 pour nôtre Thermometre, dont le volume de la liqueur, lorsqu'elle est au niveau de ce trait, est de 1000 parties. J'écrirois 900, 800, pour celui dont le volume seroit alors de 900, ou de 800 parties. Le trait qui est immédiatement au dessous, est marqué par 999 ; celui d'après par 998, & ainsi des autres qui marquent les degrés descendants. Le premier degré ascendant est marqué 1001, le second 1002, &c. Ainsi les degrés d'un côté expriment simplement de combien la liqueur s'est dilatée ou condensée au dessus ou au dessous du terme de la congélation artificielle, par les nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ceux de l'autre côté expriment le volume actuel de la liqueur, qui dans la congélation artificielle est 1000. Tantôt ce volume est réduit à 998, à 985, tantôt il est renflé à 1002, à 1020, &c.

La Planche étant ainsi graduée, le plus difficile, & ce qui demande le plus d'attention, est fait. Il reste à mettre la juste quantité d'Esprit de Vin dans le Thermometre. Auparavant on a à en faire sortir l'eau dont on l'a chargé, & les grains de gravier ou de sable, si on a été contraint d'y en faire entrer. Pour les grains de sable ou de gravier, on les mettra à part, parce qu'il sera nécessaire de les y faire rentrer après qu'ils auront été séchés. On fera aussi sécher le Thermometre ; quand il y resteroit néantmoins une legére humidité, l'inconvénient ne seroit pas grand. Celui seul qu'elle peut produire seroit d'affoiblir l'Esprit de Vin, & quelques gouttes

d'eau n'affoibliroient pas ſenſiblement la quantité de liqueur qui doit être employée.

On verſera donc enfin l'Eſprit de Vin, de la qualité duquel on s'eſt aſſûré, dans le Thermometre, & cela juſqu'à trois ou quatre degrés au-deſſus du fil, qui marque la congélation artificielle, comme juſqu'en *D*. Un peu plus ou un peu moins ne fait rien actuellement, parce que c'eſt le froid de l'eau glacée qui apprendra ce qu'il y aura à ajoûter ou à retrancher à la quantité qu'on y aura fait entrer, car il s'agit à préſent de faire geler de l'eau autour de la Boule où eſt cet Eſprit de Vin. * Fig. 1. *CC*.

Pour cela, on poſera la Boule du Thermometre dans un vaſe de fer blanc, cylindrique, dont le diametre intérieur excedera le ſien de peu *. Si la hauteur de ce vaſe eſt telle que ſes bords s'élevent juſqu'au fil qui marque ſur le Tuyau le terme de la congélation, ce ſera le mieux ; mais quand ſes bords ne s'éleveroient que de quelques degrés au-deſſus de la Boule, le Thermometre n'en ſera pas moins bon ſenſiblement. Enfin on remplira ce vaſe de l'eau qu'on doit faire geler. * Fig. 9. *VV*.

On ſçait aſſés comment ſe fait la glace artificielle ; les procedés uſités journellement ſont ceux même dont on ſe ſervira pour geler l'eau qui environne la Boule de nôtre Thermometre. Le vaſe, où elle eſt contenüe, doit être mis dans un autre vaſe d'un plus grand diametre, & au moins de même hauteur. Le Fer blanc eſt encore une matiére commode pour ces ſortes de vaſes. Le vuide qui reſte entre les parois des deux vaſes, ſera rempli de glace qui aura été bien pilée, & mêlée avec une bonne doſe, ſoit de Salpêtre, ſoit de Sel ammoniac, ſoit de Sel marin. Une précaution encore accélere la congélation, c'eſt de couvrir le deſſus des vaſes, l'air extérieur en eſt moins capable d'arrêter l'effet qu'on veut produire. Les faiſeurs de Liqueurs glacées ſe contentent de mettre au deſſus des vaſes quelques ſerviettes, quelques torchons. On fera encore mieux, ſi ſur le linge étendu ſur les bords du vaſe, on met une couche de glace pilée qu'on recouvrira de pluſieurs torchons ou ſerviettes.

A meſure que l'eau, qui entoure la Boule du Thermometre, ſe refroidit, la liqueur deſcend dans le Tube. Quand la ſurface de cette eau eſt gelée, la liqueur eſt bien près du plus bas terme où elle deſcendra. Lorſqu'on jugera qu'elle eſt à peu-près auſſi bas qu'elle peut aller, ſi elle eſt au deſſous du terme marqué par la congélation comme en *B* *, on ſera entrer de l'Eſprit de Vin peu-à-peu avec la petite meſure, ou avec le petit entonnoir*, & cela juſqu'à ce que l'Eſprit de Vin s'éleve dans le Tube à la hauteur du fil qui marque le terme*. On ſera enſuite attentif à obſerver ſi la liqueur ne continüe pas à deſcendre ; ſi elle deſcend encore, on ajoûtera encore ce qu'il faut de liqueur pour la faire monter au terme marqué. Lorſqu'elle y reſte conſtamment, on peut retirer la Boule de la glace. Mais pour n'avoir pas la peine de briſer la glace, & ne pas faire courir riſque au Thermometre, il vaut mieux laiſſer fondre la glace, & attendre qu'elle laiſſe ſortir librement la Boule, ou accélérer la fonte de la glace en jettant deſſus de l'eau chaude.

* Fig. 9.

* Fig. 10.

* Fig. 9. *CC*.

Nous devons avertir qu'il arrive quelquefois, qu'après avoir fait entrer dans le Tube la petite quantité d'Eſprit de Vin qui ſembloit néceſſaire pour élever la liqueur juſqu'au fil, qu'après avoir vû ſa ſurface de niveau avec le fil, qu'elle vient, dans un quart d'heure, à l'excéder d'une ligne, ou de davantage. On croiroit que c'eſt que la glace commence à ſe fondre, cependant l'élévation de l'Eſprit de Vin eſt quelquefois dûë à une autre cauſe, il a fallu du temps pour ſe rendre à celui qui en deſcendant a rencontré les parois du vaſe. On a preuve certaine que c'eſt cette cauſe qui produit la quantité excédente de volume de liqueur, lorſqu'on voit que ſa ſurface ſe ſoûtient conſtamment au même terme; elle s'y ſoûtient pendant plus de huit à dix heures, lorſque les vaſes ſont dans un endroit frais, & qu'ils ont été bien enveloppés. Il faut donc retirer ce qu'il y a de liqueur au deſſus du fil. On le peut, en faiſant entrer dans le Tube un Tuyau capillaire, & ſuçant à ſon bout ſupérieur, pendant que l'inférieur touche la liqueur. On peut auſſi ſe ſervir du Tuyau capillaire pour porter dans le

gros Tuyau ce qui manque de liqueur jusqu'à la ligne de la congélation. Cette façon d'achever de le remplir est plus précise, & même plus prompte que celle de verser de la liliqueur par son ouverture supérieure; on n'a point à attendre le long écoulement de celle qui s'est attachée contre les parois. Souvent il y a si peu de liqueur à ôter, qu'on en ôteroit trop avec le Tuyau capillaire. Il est plus commode d'avoir un fil dont on a engagé un des bouts dans un grain de plomb. On fait descendre ce grain de plomb dans la liqueur du Tube; une petite partie de cette liqueur est entraînée par le plomb & le fil, lorsqu'on les retire. En répétant deux ou trois fois le même manege, on en ôte ce qui étoit à ôter. Au reste s'il y a une circonstance qui demande de l'attention, c'est celle dont il s'agit, c'est-à-dire, celle de mettre bien de niveau, avec le fil qui entourre le Tube, la surface de l'Esprit de Vin condensé par la glace. S'il y avoit erreur en cet endroit de $\frac{1}{4}$, ou de $\frac{1}{8}$ de degré, ce seroit une erreur qui se trouveroit la même à tous les degrés.

Le Thermometre étant retiré de la glace, il ne reste plus qu'à sceller hermétiquement le bout du Tube *. Ceux qui connoissent la Lampe des Emailleurs, sçavent assés comment cela se fait. En scellant le bout du Tuyau, on échauffe l'air qu'il contient, on le rarefie, de sorte que celui qui reste au dessus de la liqueur, n'a plus ni la densité, ni par conséquent le ressort de l'air ordinaire.

* Fig. 9. X.

Au lieu de sceller le bout du Tuyau à la Lampe, on peut se contenter de le boucher avec un mêlange de Cire & de Thérébentine. C'en est assés pour ôter à l'air intérieur toute communication avec l'air extérieur. On peut même faire qu'alors l'air intérieur se trouve plus rarefié qu'il ne l'est, lorsque le Tube a été scellé de l'autre maniére, & qu'il soit rarefié à un point plus connu. Pour cela on mettra la Boule du Thermometre dans de l'eau, qu'on fera ensuite chauffer peu-à-peu. La liqueur s'élevera, l'air sera chassé, & sortira par le bout du Tuyau encore ouvert; on le fermera quand l'espace occupé par l'air n'en paroîtra contenir que la quantité

qu'on y veut laiſſer. Si même la longueur du Tuyau le permet, avant de le boucher, on fera monter l'Eſprit de Vin au terme où la chaleur de l'eau boüillante peut le conduire, ou à peu-près. Nous expliquerons pourtant une autre maniére de marquer ce terme, qui ne demande pas qu'on mette la Boule du Thermometre dans l'eau boüillante; mais on eſt plus ſûr de la vérité de la détermination d'un point, quand deux méthodes différentes donnent ce même point.

C'eſt une queſtion, que nous n'examinons pas actuellement, de ſçavoir s'il vaut mieux laiſſer dans le Thermometre de l'air tel à peu-près que l'air ordinaire, ou s'il vaut mieux n'y laiſſer que de l'air extrémement rarefié, tel qu'eſt celui des endroits que les Phyſiciens appellent *vuides*. Je dirai ſeulement d'avance que dans l'un & dans l'autre parti il y a des inconvénients, qui ſont moindres à mon avis dans un état moyen; de ſorte que j'incline à ne pas laiſſer l'air du Tuyau dans ſon état ordinaire, & auſſi de n'y pas laiſſer un air très-rarefié. Un degré de rarefaction approchant de celui qu'il a dans la plus grande chaleur de nos climats, me paroît le plus convenable; & ce degré eſt plus aiſé à ſaiſir à peu-près en faiſant élever l'Eſprit de Vin dans le Thermometre au moyen de l'eau chaude, & ſcellant le bout de ce Thermometre avec nôtre compoſition de cire ſur laquelle on étendra enſuite, ſi l'on veut, un Vernis, qu'en le ſcellant à la Lampe. Le ſeul inconvénient que je ſçache à le ſceller avec la compoſition de cire, c'eſt qu'il faut alors éviter de renverſer le Thermometre, de crainte que l'Eſprit de Vin ne causât quelque altération au bouchon. On peut pourtant le ſceller à la Lampe, ſans y renfermer un air très-rarefié, & cela ſi on ſe contente d'abord d'allonger le bout du Tuyau en un fil creux, délié, qu'on le laiſſe refroidir, & qu'on ſcelle enſuite aſſés bruſquement le bout de ce filet, ou de ce Tuyau capillaire.

Enſin le bout du Tube du Thermometre ayant été ſcellé de quelque façon que ce ſoit, il ne reſte plus qu'à le mettre ſur la Planche graduée, & à l'y aſſujettir. Sa poſition exacte eſt aiſée à retrouver; le fil qu'on a laiſſé ſur le Tube, & qui

marque

marque le terme de la congélation de l'eau, eſt un repaire ſûr ; ce fil doit être poſé vis-à-vis le trait qui la marque auſſi ſur la Planche.

Au reſte, ſi on en juge par la longueur des petits détails dans leſquels nous venons d'entrer, la conſtruction des nouveaux Thermometres paroîtra plus longue & plus difficile qu'elle ne l'eſt en effet. Mais on ne doit pas juger du temps que les choſes demandent à être faites par celui qu'elles demandent à être dites. Il y aura même bien des abbréviations pour les ouvriers qui ſe voudront charger de faire ces Thermometres. Ils peuvent avoir de grandes meſures, de capacités différentes, qui chacune en contiendront 1000 petites, & dès qu'ils auront un certain nombre de ces meſures, il s'en trouvera preſque toûjours quelqu'une propre à remplir le Thermometre juſqu'au terme de la congélation de l'eau, d'autant plus que ce terme peut être pris ſur une aſſés grande portion de Tube. Si la meſure verſée laiſſe la ſurface de la liqueur trop bas dans le Tuyau, on a, pour la faire monter, la reſſource des grains ſolides introduits dans la Boule. Une autre abbréviation c'eſt, au lieu des meſures de 1000, d'en avoir de 975, & cela, comme celles de 1000, de différents volumes. La meſure de 975 ayant été vuidée dans le Thermometre, on verſera une à une 25 petites meſures de Mercure. Dès qu'une de ces meſures ſera entrée dans la Boule, on marquera ſur la Planche, par un trait, juſqu'où la ſurface de l'eau a été élevée; & ainſi de ſuite, on graduera le Thermometre d'une maniére plus aiſée que celle que nous avons pratiquée ci-devant, car après avoir rempli le Thermometre juſqu'au terme de la congélation de l'eau, nous en avons retiré 25 meſures d'eau, pour y mettre enſuite 25 meſures de Mercure. Enfin on trouvera ſans doute bien d'autres abbréviations auxquelles je n'ai pas penſé.

Il y en a pourtant encore une dont nous ne nous diſpenſerons pas de parler, qui ſera d'une très-grande commodité aux ouvriers qui ſe chargeront de faire beaucoup de Thermometres. Quand ils en auront une fois quelques-uns de

conſtruits dans toute l'exactitude poſſible, & qu'ils auront du même Eſprit de Vin, dont ils les ont remplis, ou d'un Eſprit de Vin bien reconnu pour être de la qualité du premier, ils pourront s'épargner les petits frais, & la peine de faire congeler l'eau autour de leurs Boules. Les capacités des Boules & des Tubes ayant été bien meſurées, en un mot la graduation une fois faite, ils verſeront de l'Eſprit de Vin dans les nouveaux Thermometres juſqu'à ce qu'il y ſoit élevé au degré où l'eſt actuellement celui des autres : la marche des uns & des autres ſera préciſément la même, ſi les derniers faits ont été gradués ſoigneuſement. Nous n'avons rien dit des petits entonnoirs dont on doit ſe ſervir pour vuider dans le Tube les grandes meſures, tels que ſont ceux de forme
* Fig. 10. ordinaire *, ou ceux ** de la forme de nos petites meſures
** Fig. 11. avec leſquelles on prend à pluſieurs fois la liqueur d'une grande meſure, après l'avoir verſée dans un verre.

Quel que ſoit, dans différents Thermometres, le nombre des degrés qui y exprime le volume de l'Eſprit de Vin condenſé par la congélation artificielle, il ſera toûjours aiſé de les ramener à une meſure commune, leurs rapports ſont toûjours aiſés à voir. Que le volume de la liqueur, qui eſt exprimé dans l'un par 800, le ſoit dans l'autre par 900, le rapport de leurs degrés ſera comme 8 à 9, c'eſt-à-dire, que 8 degrés de celui de 800 en vaudront 9 de celui de 900. Ainſi ces deux Thermometres étant expoſés à la même température d'air, ſi la liqueur du premier eſt élevée à 16 degrés, celle du ſecond le ſera à 18. Il en ſera de même de ceux où le volume condenſé par la congélation eſt exprimé par tout autre nombre exact de 100[es]. Mais des nombres rompus, comme 813, 743, rendroient la comparaiſon des degrés embarraſſante, rarement la pourroit-on faire ſur le champ, c'eſt ce qui nous a fait rejetter ces ſortes de nombres. J'aimerois pourtant mieux qu'on exprimât le volume de la liqueur par le même nombre de centaines ſur tous les Thermometres ; il y a mille gens, parmi ceux qui ſe ſervent de Thermometres, que des réductions auſſi ſimples

que les premiéres dont nous venons de parler, embarrafferoient. Je voudrois donc, en leur faveur, que le terme de la congélation de l'eau fût exprimé par un même nombre fur tous les Thermometres; 1000 eft celui que j'ai pris pour ceux que j'ai fait faire. Au moyen des grandes mefures de 1000, ou de 975, de différentes capacités, il fera toûjours aifé de conftruire les Thermometres fur ce nombre. Un qui auroit été conftruit fur 800, 900, peut auffi y être ramené, pourvû qu'on fe donne la peine d'y mettre une nouvelle échelle de degrés. Dès que le nombre de 800, par exemple, eft pris pour 1000, 8 des anciens degrés en valent 10 des nouveaux, 4 des anciens en valent 5 de ceux-ci. Pour conftruire la nouvelle échelle, il n'y a qu'à divifer 4 degrés en cinq. Le Compas de proportion facilitera cette divifion, & elle ne produira aucun changement fenfible dans les rapports que les degrés doivent avoir entr'eux, fi quand on divife les quatre degrés en cinq, on marque d'abord les deux nouveaux degrés, de façon que le premier foit pris fur la partie la plus baffe, du plus bas des quatre, & le cinquiéme fur la partie la plus élevée du quatriéme. Il en feroit de même de toute autre réduction, comme de 900 à 1000.

Quand on n'aura point éprouvé foi-même combien les procedés que nous avons expliqués pour graduer les Thermometres font aifés à pratiquer, on aura peine à croire qu'ils donnent des mefures auffi exactes qu'ils les donnent réellement. Au moyen des petites mefures remplies avec le Mercure, chaque degré eft déterminé avec une extrême précifion. Il paroîtra peut-être plus difficile de mefurer la capacité de la Boule & de la partie du Tube qui contiennent la liqueur, dont le volume eft condenfé par la congélation de la glace artificielle. Cette capacité eft de 1000 mefures; fur 1000 mefures, ne fe trompe-t-on point de quelques-unes? Je répondrai que fi on eft attentif, qu'on ne fe trompe pas d'une feule mefure. Mais fe trompa-t-on de deux ou trois, ce ne feroit pas une fource d'erreur confidérable; car fuppofons qu'au lieu de 1000, on eût mis 1002 mefures, voyons où iroit l'erreur,

dans un cas qui donnera idée de ce qu'elle pourroit être dans les autres. Que le Thermometre, dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle est exactement 1000, marque 20, celui dont le volume de la liqueur condensée est 1002, marquera alors 20 degrés plus $\frac{1}{25}$ de degré. L'erreur sur 20 degrés sera donc de $\frac{1}{25}$ de degré, & sur 40 degrés qui est un terme d'un chaud excessif, de $\frac{2}{25}$. Erreurs assés petites pour pouvoir être négligées.

Nous avons remis jusqu'ici tout ce qui est de discussion; la premiére qui se présente est de sçavoir si le terme de la congélation de l'eau est assés fixe pour que nous puissions nous y tenir; si toute glace artificielle, dans le temps qu'elle se forme, a un égal degré de froid. Nous sçavons que pendant l'Hiver le degré de froid de la glace n'est pas à beaucoup près toûjours le même. J'ai fait, dans le mémorable Hiver de 1709, des expériences sur une glace dont le froid surpassoit extrémement celui des glaces ordinaires. Je ne me suis point avisé alors d'observer, dans l'instant même où cette glace se formoit, si elle étoit plus froide que de la glace artificielle. Mais quoique la glace soit susceptible d'une plus grande augmentation de froid, il ne s'ensuit nullement qu'il y ait de la glace d'eau pure, qui, quand elle se forme, soit plus froide que d'autre glace. C'est un fait qui mérite d'être éprouvé. Cependant, quel qu'en soit le succès, il ne fait rien contre le degré de froid de nôtre glace artificielle ; car je suppose que nous faisons congeler de l'eau dans un air moins froid que la glace. Or dans cette supposition, tout le froid que prend l'eau qui se gele, ne peut être produit que par la glace & les sels qui environnent le vase où elle est contenüe ; cette eau reste liquide, eau ordinaire, tant qu'elle n'a pas pris assés de froid, tant qu'elle n'a pas perdu assés de la matiére qui entretient le mouvement de ses parties. Mais quand le mouvement de ses parties s'arrête, quand elle commence à se figer, il paroît que ce doit toûjours être quand il ne lui reste plus qu'une certaine quantité déterminée de la matiére nécessaire à la mettre en mouvement, ou, ce qui est la même chose, à l'échauffer.

Il reſte pourtant encore une difficulté conſidérable, elle naît d'obſervations curieuſes que nous devons aux Thermometres. De l'eau, expoſée l'Hiver à un air qui a un certain degré de froid, gele ; expoſée d'autres jours de l'Hiver à un air qui a un plus grand degré de froid, elle ne gele pas. Il y a plus : le dégel commence ſouvent, la glace commence à ſe fondre, quoique le Thermometre marque un degré de froid beaucoup plus grand que celui qu'il marquoit, lorſque la glace s'eſt formée. Mais avant de rendre raiſon de ces faits, toutes leurs circonſtances demandent à être mieux examinées que je ne l'ai fait juſqu'ici, l'Hiver où nous allons entrer me mettra apparemment en état de faire cet examen.

Après tout, qu'en réſulte-t-il? c'eſt que l'air n'eſt pas toûjours en état, quoiqu'également froid, de glacer l'eau ; qu'il peut même la fondre quelquefois, quoiqu'il ait un degré de froid ſupérieur à celui avec lequel il l'a gelée. Mais nôtre glace artificielle n'eſt expoſée à aucune des variétés que l'air nous fait voir dans celle dont il occaſionne la production par ſon attouchement. 1.° La nôtre eſt faite dans un temps où l'air ne pourroit agir que pour la fondre. 2.° Elle eſt produite par un mêlange de ſels & de glace plus froid alors que l'air. 3.° Enfin nous prenons la précaution de couvrir le vaſe qui contient l'eau qui doit être gelée, & celui qui contient le mêlange de glace & de ſels, de le couvrir, dis-je, d'un linge ſur lequel eſt étendüe une couche de glace. Cette couche de glace dérobe à l'action, ou à la plus grande partie de l'action, de l'air extérieur, toute l'eau qui doit ſe geler, & le mêlange de glace & de ſels.

Mais ce qui vaut mieux que tous les raiſonnements précédents, & qui eſt, ce me ſemble, ſans réplique, c'eſt que j'ai fait des glaces en différentes ſaiſons de l'année, j'en ai fait dans des jours ſereins & dans des jours pluvieux, pendant que différents vents ſouffloient, & ces glaces ont toûjours fait deſcendre le Thermometre au terme marqué pour la congélation artificielle.

Paſſons enfin au dernier point fondamental de la conſ-

truction des Thermometres, & à celui qui jusqu'ici a été négligé. Nous avons vû combien il est essentiel que la qualité de l'Esprit de Vin qu'on y fait entrer soit connüe & bien déterminée, sans quoi on aura eu beau bien déterminer un point fixe d'où partent les degrés, ces degrés auront eu beau à être mesurés exactement, & pris chacun égaux à une certaine partie du volume de la liqueur, différents Thermometres exprimeront les augmentations de froid & de chaud par des nombres de degrés qui ne seront pas comparables, s'ils sont remplis d'Esprits de Vin plus dilatables les uns que les autres, dans des proportions à nous inconnües. Il est donc absolument essentiel d'avoir une méthode qui fasse connoître la qualité de l'Esprit de Vin dont on veut voir les augmentations & les diminutions de volume dans le Thermometre.

Dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1718 nous en avons un de M. Geoffroy le jeune sur la maniére de mesurer la force des Eaux-de-vie, où, après avoir examiné les moyens dont on s'est servi jusqu'ici pour y parvenir, après avoir fait voir combien ils sont imparfaits, il en propose un nouveau qui promet plus d'exactitude, & qui en donne aussi davantage ; c'est de remplir un petit vase cylindrique de l'Eau-de-vie dont on veut connoître la force, de poser ce petit vase dans un autre qui est plein d'eau, de mettre alors le feu à l'Eau-de-vie, & de la laisser brûler autant qu'elle le peut. Il a poussé même la précaution jusqu'à faire couler continuellement de nouvelle eau dans le vase qui contient celui où l'Eau-de-vie brûle, afin d'entretenir cette eau dans un degré de chaleur toûjours égal. Après que l'Eau-de-vie a été brûlée, il reste une certaine quantité d'eau ou de flegme. Il mesure la hauteur, ou, ce qui est la même chose, la quantité du flegme resté; de deux Eaux-de-vie, celle-là est la plus forte qui laisse une moindre quantité de flegme.

Plus l'Esprit de Vin contenu dans le Thermometre est rectifié, plus il parcourt de chemin pendant qu'il se fait un changement dans la température de l'air qui l'environne. A cet égard il vaut mieux employer un Esprit de Vin plus fort,

qu'un qui l'eſt moins. Si cependant la qualité d'un Eſprit de Vin foible, d'une Eau-de-Vie même, étoit plus aiſée à déterminer que celle d'un Eſprit de Vin rectifié, on pourroit faire des Thermometres avec de l'Eau-de-Vie. Ce qu'on leur a ôté, en ſe ſervant d'une liqueur moins dilatable, il ſeroit aiſé de le leur rendre en augmentant le diametre de la Boule, ſans augmenter celui du Tuyau. Auſſi m'étois-je propoſé de faire entrer dans les Thermometres une Eau-de-Vie, qui, après avoir été brûlée, laiſsât une quantité de flegme connuë, par exemple, un quart de ſon premier volume. La méthode que nous venons de rapporter, me paroiſſoit très-propre à fixer la qualité de celle dont je voudrois faire uſage. Ç'a été avec regret que j'ai appris, par des expériences réïtérées, que cette méthode, qui pouvoit être bonne pour le cas où on l'a employée, pour juger une conteſtation entre des Marchands ſur la qualité des Eaux-de-Vie, pour diſtinguer des Eaux-de-Vie entre leſquelles il y a des différences conſidérables, ne donnoit pas des meſures d'une exactitude telle qu'il la falloit à des expériences phyſiques fort délicates. J'ai, à deſſein, affoibli de l'Eſprit de Vin : tantôt ſur quatre meſures d'Eſprit de Vin j'en ai mis une d'eau; tantôt j'ai mis la même meſure d'eau ſeulement ſur trois meſures du même Eſprit de Vin; tantôt j'ai mêlé enſemble un égal nombre de meſures d'eau & d'Eſprit. J'ai fait des mêlanges en diverſes autres proportions moyennes, & cela pour avoir des Eaux-de-Vie de différentes forces. J'ai enſuite éprouvé ſi en faiſant brûler ces différentes Eaux-de-Vie, avec toutes les précautions poſſibles, je trouverois des réſidus de flegme proportionnés aux différentes qualités connuës de ces Eaux-de-Vie, & j'ai vû que cette ſorte d'épreuve ne répondoit pas aſſés à ce que j'en avois attendu. La même Eau-de-Vie a laiſſé ſouvent des réſidus de flegme auſſi différents entr'eux que pourroient l'être ceux de deux Eaux-de-Vie de qualités différentes, & deux Eaux-de-Vie de qualités différentes m'ont ſouvent laiſſé le même réſidu. Un rien eſt capable de faire que la flamme s'éteigne plûtôt

dans une expérience que dans l'autre, le plus leger souffle d'air y suffit quelquefois. Pour remédier à l'agitation de l'air, j'avois pourtant encore ajoûté aux précautions demandées dans le Mémoire que je viens de citer. J'ai fait brûler mes essays d'Eaux-de-Vie dans des endroits clos, tels que sont les Lanternes des balances d'Essayeurs. Au lieu d'entourer d'eau le vase dans lequel la liqueur brûloit, je l'ai souvent entouré de glace. Mais en un mot, quelque chose que j'aye fait & tenté, je n'ai pû, par cette méthode, parvenir à déterminer avec assés de précision la qualité de l'Eau-de-Vie que je destinois à des Thermometres.

Il est même à remarquer que ces épreuves ne m'ont jamais rendu toute la quantité d'eau que j'avois fait entrer dans l'Esprit de Vin ; lorsque la partie spiritueuse s'élevoit en flamme, non-seulement elle enlevoit tout le flegme qui lui étoit comme propre, elle enlevoit encore une bonne portion de celui que je lui avois joint, & cela avec des variétés qui n'eussent pas permis de porter de jugement sur les proportions du mêlange à qui les auroit ignorées.

Forcé d'abandonner cette voye, j'en ai cherché une autre qui donnât des mesures plus exactes des qualités des Eaux-de-Vie & des Esprits de Vin. Il s'en présentoit naturellement une, propre même à faire connoître immédiatement la qualité de la liqueur d'où l'effet des Thermometres dépend, c'est de reconnoître de combien une liqueur se dilate depuis un certain terme de froid ou de moindre chaud jusqu'à un autre terme connu d'un plus grand chaud. Ces deux termes doivent être fixes & assés éloignés l'un de l'autre pour donner des différences saisissables. Nous les avons dans la congélation artificielle de l'eau, & dans le degré de chaleur de l'eau boüillante : mais j'avois eû occasion, il y a long-temps, de m'appercevoir que l'Esprit de Vin bout avant que l'eau, dans laquelle est plongée la bouteille qui le contient, soit parvenuë à boüillir. Si on continuë à faire chauffer de l'Esprit de Vin qui a commencé à boüillir, si on lui fait prendre le degré de chaleur de l'eau boüillante, il bout encore plus fortement.

L'irrégularité

L'irrégularité qui eſt dans le nombre & dans la groſſeur des bulles qui ſont à la ſurface, de celles qu'on voit s'élever continuellement du fond du vaſe, & de celles qui ſont par-tout parſemées dans la liqueur, ne permettent pas de déterminer avec préciſion le volume que la chaleur de l'eau boüillante fait prendre alors à l'Eſprit de Vin. Ce ſont ces conſidérations qui m'avoient arrêté; je ne ſuis venu à chercher les moyens de remédier à l'inconvénient des boüillonnements que quand j'ai vû que j'en avois abſolument beſoin. Tous les jours la Théorie nous montre comme ſimples des procedés qu'on reconnoît impraticables, quand on veut en faire uſage; au contraire une infinité de procedés paroiſſent dans la Théorie tous pleins de difficultés qui s'évanoüiſſent dans la pratique. J'ai voulu voir ſi les boüillonnements de l'Eſprit de Vin ne ſeroient point de ces difficultés qui ſemblent plus grandes à ſurmonter qu'elles ne le ſont réellement. Dans un petit Matras *, dont le col étoit aſſés délié, j'ai verſé de l'Eſprit de Vin juſqu'au deſſus de l'origine du col*; j'ai mis ce Matras dans l'eau, que j'ai fait chauffer peu à peu juſqu'à ce qu'elle vînt à boüillir. L'Eſprit de Vin a commencé, à l'ordinaire, à donner des boüillons, avant qu'il en parut ſur l'eau; j'ai retiré le Matras de l'eau, & j'ai vû auſſi-tôt tout boüillonnement ceſſer. J'ai marqué l'endroit du col du Matras où étoit reſté l'Eſprit de Vin immédiatement après que les boüillonnements avoient été appaiſés *; enſuite j'ai de nouveau plongé le Matras dans l'eau boüillante; la liqueur s'eſt élevée dans le col au-deſſus du terme que j'avois marqué, après quoi elle a recommencé à boüillir; mais ce qui eſt à remarquer, c'eſt que lorſqu'elle a recommencé à boüillir, elle étoit plus haut que le terme où les boüillonnements avoient ceſſé la premiére fois. Je l'ai encore retirée alors. Tout boüillonnement a encore été appaiſé dans un inſtant, & l'Eſprit de Vin s'eſt trouvé plus élevé encore dans le col du Matras qu'il ne l'étoit la premiére fois *. Ainſi je l'ai retiré & je l'ai replongé pluſieurs fois de ſuite juſqu'à ce que l'eau commençât à boüillir, & même pendant que l'eau boüilloit

* Fig. 12.

* *ff.*

* *gg.*

* *hh.*

fortement. J'ai toûjours vû les bulles, tant de la ſurface, que celles qui montoient du milieu de l'Eſprit de Vin, diſparoître, un inſtant après que l'Eſprit de Vin étoit tiré de l'eau, & ſa ſurface ſupérieure s'applanir. Cette ſurface s'eſt élevée de plus en plus juſqu'à un certain point; quand elle a été arrivée une fois à ce point*, chaque fois que je remettois le Matras dans l'eau boüillante, les boüillonnements de l'Eſprit de Vin s'élevoient; mais dès que je retirois le Matras, & que les boüillonnements étoient arrêtés, la ſurface applanie de l'Eſprit de Vin ſe retrouvoit toûjours vis-à-vis ce même point du col du Matras. J'ai donc crû devoir regarder ce terme comme le terme fixe du plus grand degré de dilatation où la chaleur de l'eau boüillante pouvoit porter l'Eſprit de Vin, que j'eſſayois, ſans le faire boüillir; & j'ai crû que ce terme ſeroit de même ſaiſiſſable pour tout autre Eſprit de Vin, & pour toute Eau-de-vie, qu'il donneroit une maniére aſſés aiſée & aſſés préciſe de reconnoître le degré de dilatabilité de chacune de ces eſpeces de liqueurs, & une maniére de les caractériſer.

* Fig. 12. *ii.*

Pour voir ſi des expériences plus ſuivies, & faites avec plus de précautions, me confirmeroient dans cette idée, j'ai ſuivi la même route que j'ai indiquée pour la conſtruction des Thermometres: après avoir choiſi un petit Matras de verre dont le col étoit aſſés délié, j'ai rempli le Matras juſqu'un peu au deſſus de l'origine de ſon col avec de petites meſures*; il en eſt entré 400 juſqu'à l'endroit déſigné**. J'ai marqué cet endroit avec un fil, lié autour du col; alors j'ai mis le Matras dans une boîte de fer blanc, que j'ai poſée dans une boîte plus grande, remplie de glace pilée, & mêlée avec du ſel. En un mot, j'ai fait geler l'eau qui entourroit le Matras. L'Eſprit de Vin eſt deſcendu au deſſous du fil. J'ai fait entrer dans le Matras autant de meſures qu'il en a fallu, afin que l'Eſprit de Vin ſe retrouvât encore à la hauteur du fil*. Enfin mon fil m'a marqué le terme d'un volume de 400 meſures d'Eſprit de Vin condenſé par la congélation artificielle de l'eau. Ce que je cherchois étoit d'avoir en parties

* Fig. 12.
** *CC.*
* *CC.*

de ce même volume, sa différence avec le volume de la même quantité d'Esprit de Vin dilaté par la chaleur de l'eau boüillante. J'ai donc fait chauffer & boüillir de l'eau. A la vapeur seule de l'eau boüillante j'ai échauffé le Matras, qui contenoit l'Esprit de Vin. Quand je l'ai jugé assés échauffé, pour qu'il n'y eût pas à craindre que la chaleur de l'eau boüillante le fit casser, je l'ai enfoncé peu-à-peu dans cette eau ; bientôt l'Esprit de Vin a commencé à boüillir, & aussitôt j'ai retiré le Matras. J'avois eu la précaution d'entourer son col d'un second fil que je pouvois faire glisser en montant. Avec ce fil j'ai marqué l'endroit où l'Esprit de Vin étoit resté après que les boüillonnements avoient été appaisés. Aussitôt j'ai remis l'Esprit de Vin dans l'eau boüillante. Il s'est élevé au dessus du fil, & bientôt il a boüilli. J'ai retiré le Matras. J'ai élevé le fil jusqu'à l'endroit où l'Esprit de Vin s'est trouvé après que les bulles ont eu disparu. Quand j'ai eu répété ce manege cinq à six fois au plus, le terme de l'élévation marquée par le fil, après les boüillonnements cessés, s'est trouvé constamment le même *, ainsi je l'ai regardé comme le terme de la plus grande dilatation que l'eau boüillante pouvoit donner à cet Esprit de Vin sans le faire boüillir. Dans d'autres expériences, dont il suffira de rapporter les résultats, j'ai suivi de pareils procédés. Pour achever celle que nous avons commencé à détailler, il ne restoit plus qu'à mesurer la capacité de l'intervalle compris entre les deux fils *, en mesures pareilles à celles dont il y avoit 400 jusqu'au premier fil, jusqu'à celui qui marquoit le terme de la congélation artificielle. J'ai trouvé que cet espace contenoit 35 de ces mesures. Ainsi le volume de l'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle, étoit 400, rarefié par la chaleur de l'eau boüillante, étoit 435. Cet Esprit de Vin étoit du meilleur qui se trouve ordinairement chés les Marchands. Brûlé dans la cuilliére, il ne laissoit point d'eau, il allumoit la poudre. Mais on sçait combien ses qualités sont peu déterminées par ces derniéres propriétés, qu'elles peuvent convenir à des Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, au lieu que le caractere de cet Esprit

* Fig. 12. ii.

* *CC, ii.*

de Vin eſt bien déterminé, quand on dit qu'il eſt tel que ſon volume condenſé par la glace artificielle eſt à ſon volume dilaté par la chaleur de l'eau boüillante, comme 400 eſt à 435, comme 80 eſt à 87. Un Eſprit de Vin plus rectifié que celui dont il s'eſt agi juſqu'ici, donnera une plus grande différence entre les deux volumes, & un Eſprit de Vin plus foible en donnera une plus petite.

Pour m'aſſûrer ſi les rapports ſe trouveroient tels qu'on les devoit attendre dans les Eſprits de Vin les plus foibles, j'ai commencé par m'aſſûrer des degrés de dilatabilité de l'eau de Seine compris entre le terme de la glace artificielle, qui ne ſuffit pas pour geler l'eau renfermée dans un vaſe qu'elle environne, & le degré de dilatation produit par l'eau boüillante. J'ai trouvé que le premier volume de l'eau étoit au ſecond, environ comme 400 à 415. J'ai mêlé de cette eau, dont les degrés de dilatabilité étoient connus, avec de l'Eſprit de Vin de ma premiére épreuve, en mettant une meſure d'eau ſur trois d'Eſprit de Vin. Une quantité de cet Eſprit de Vin affoibli, dont le volume, condenſé par la glace artificielle, étoit de 400 meſures, a été rarefiée par la chaleur de l'eau boüillante, & ſon volume eſt devenu à peu-près de 430 meſures. Le rapport du premier volume a donc été à celui du ſecond, comme 400 à 430, qui eſt précisément le rapport qui devoit naître du mêlange que j'avois fait; car le volume total, pendant la condenſation, étoit compoſé de 300 meſures d'Eſprit de Vin, & de 100 meſures d'eau; or nous ſçavons que 400 meſures de cet Eſprit de Vin condenſé, étant enſuite dilatées par l'eau boüillante, ſeroient devenües 435 meſures, ou 400 auroient donné une augmentation de 35. D'où il ſuit que l'augmentation donnée par 300 meſures eſt de 26 meſure & $\frac{1}{4}$ de meſure. De même 400 meſures d'eau condenſée ayant dû donner par la dilatation une augmentation de 15 meſures, 100 meſures doivent donner 3 meſures & $\frac{3}{4}$. Or l'augmentation du volume de nôtre Eſprit de Vin affoibli étoit compoſée de l'augmentation donnée par 300 meſures d'Eſprit de Vin, & de l'augmentation donnée

par 100 meſures d'eau; la premiére eſt $26\frac{1}{4}$, & la ſeconde $3\frac{3}{4}$; les deux enſemble font 30, qui eſt préciſément la quantité qui a été trouvée par l'expérience, dont l'exactitude a paſſé ce que j'en devois attendre; auſſi n'en ai-je pas toûjours eu une auſſi grande dans celles que j'ai répétées ſur des mêlanges faits en d'autres proportions, mais elle a toûjours été auſſi approchée que je le pouvois demander.

J'ai encore trouvé la même exactitude dans un mêlange fait d'un égal nombre de meſures d'Eſprit de Vin & d'Eau. Le volume de cette Eau-de-vie, ou de cet Eſprit de Vin foible, qui condenſé par la congélation artificielle, étoit de 400 meſures, a crû par la chaleur de l'eau boüillante juſqu'à devenir 425.

Mais quand il arriveroit, par quelques circonſtances particuliéres, que le volume composé ne ſeroit pas préciſément d'un degré de dilatabilité égal à celui qui doit réſulter de ce que doivent fournir chacun des compoſants, la conſtruction des Thermometres n'en ſouffriroit point, pourvû qu'on s'aſsûrât du degré de dilatabilité qu'a l'Eſprit de Vin affoibli qu'on y employe. Au reſte, non ſeulement il peut y avoir des circonſtances qui empêchent que le degré de dilatabilité du volume composé ne ſoit égal à celui qui réſulte de ce que doivent fournir chacun des compoſants, il y en a réellement de telles, mais nous ne les examinerons pas aujourd'hui; elles tiennent à quelques autres faits phyſiques dont l'examen nous meneroit loin, ce ſera matiére ſuffiſante à un autre Mémoire ; mais les différences qui en naiſſent ſur la dilatabilité de l'Eſprit de Vin allié ne donnent pas de différences conſidérables dans la pratique.

Nous pouvons donc nous en tenir à cette méthode, non ſeulement pour caractériſer les Eſprits de Vin plus ou moins rectifiés, mais auſſi pour déterminer les degrés de force des différentes Eaux-de-vie, & les comparer entr'eux. Car ayant pris un Eſprit de Vin d'une certaine dilatabilité connüe, pour terme fixé, on reconnoîtra par les épreuves de la dilatabilité des Eaux-de-vie qu'on a à eſſayer, combien il faudroit ajoûter

d'eau à cet Eſprit de Vin pour le réduire à être une des Eaux-de-vie ſoûmiſe à l'examen, ou, ce qui eſt la même choſe, quelle quantité d'Eſprit de Vin, ſemblable à celui qui a été pris pour terme, & quelle quantité d'eau ou de flegme ſont mêlées enſemble pour compoſer l'Eau-de-vie dont il s'agit. L'utilité de cette méthode ne ſe borne pas à la conſtruction des Thermometres, il eſt une infinité d'autres cas, ſur-tout dans le commerce, où la connoiſſance des qualités des Eaux-de-vie & de celles des Eſprits de Vin eſt importante.

Mais nous devons avertir que pour faire exactement l'eſſai de la dilatabilité de ces liqueurs, qu'il eſt eſſentiel de ſe ſervir d'un vaſe de la forme d'un Matras, ou d'une forme approchante, je veux dire que le vaſe doit avoir un col long, qui ne ſoit pas extrêmement délié. Si au lieu de Matras on ſe ſervoit d'une Boule de Thermometre adaptée à un Tuyau de médiocre groſſeur, les bulles d'air trouveroient trop de difficulté à monter, elles éleveroient l'Eſprit de vin par vibrations. Dans des cols même aſſés gros, on pourra être ſurpris par des jets d'Eſprit de Vin qui s'éléveront ſubitement à une grande hauteur, qui ſortiront du Matras, & qui troubleront l'épreuve, ſi on n'eſt pas attentif à retirer la Boule de l'eau chaude, ou boüillante, dès que l'Eſprit de Vin commence à boüillir. En un mot ces épreuves, pour ainſi dire, du titre de l'Eſprit de Vin & de l'Eau-de-vie ne ſeront exactes que quand elles ſeront faites avec les circonſpections qu'elles demandent, que quand elles auront même été répétées pluſieurs fois. Quelque ſûres que ſoient les régles qui font connoître les titres de l'Or & de l'Argent, ces régles, pour être bien miſes en pratique, demandent à l'être par gens intelligents, & même qui y ſoient exercés.

Tout ce qui doit être meſuré phyſiquement, ne peut l'être que dans une exactitude phyſique qui ne donne jamais que des à peu près, mais qui ordinairement nous ſuffiſent. Une circonſtance accompagne néceſſairement nos épreuves des Eſprits de Vin & des Eaux-de-Vie, qui empêche que les réſultats n'en ſoient abſolument tels qu'ils devroient être. Il

faudroit que la liqueur condenſée par la glace, & que la même liqueur rarefiée par l'eau boüillante ſe trouvât toûjours dans une meſure d'une même capacité; or la meſure, de quelque matiére qu'elle ſoit faite, eſt elle-même condenſable & rarefiable. Quand le froid de la glace agit ſur le Matras, il le reſſerre, il diminuë ſa capacité; au contraire la chaleur de l'eau boüillante augmente ſa capacité, elle le dilate. La capacité du Matras, qui, meſurée dans un air temperé, a été trouvée 1000, n'eſt plus 1000, lorſque ce Matras eſt reſté dans l'eau gelée, & eſt plus de 1000, lorſqu'il a été échauffé par l'eau boüillante. Nous meſurons les capacités des Matras dans un air tempéré, il arrive donc que l'endroit marqué pour contenir un volume de liqueur appellé 1000, ne le contient pas, lorſque la glace l'a eu refroidi; & que l'endroit du Matras marqué, pendant qu'il étoit échauffé par l'eau boüillante, pour 1075, par ex. ou 1080, a alors une capacité qui ſurpaſſe ce nombre. On ne peut éviter ces alternatives de diminutions & d'augmentations dans la capacité du Matras, mais il m'a ſemblé qu'on pouvoit les évaluer à peu près, & être enſuite en état de faire des corrections aux réſultats donnés par les eſſais, ou de juger s'il y a des corrections qui méritent d'être faites. Voici comment je m'y ſuis pris. J'ai meſuré dans un air tempéré, la capacité d'un Matras avec de l'eau, 1200 meſures y ont été verſées pour le remplir juſqu'à l'endroit du col que j'ai marqué avec un fil. J'ai vuidé ce Matras, & vuide, je l'ai entouré d'eau que j'ai fait geler. Alors je l'ai rempli avec l'eau, dont le froid étoit à peu près égal à celui des parois du vaſe, avec de l'eau prête à ſe glacer; 1199 meſures de cette eau ſe ſont élevées juſqu'au fil; donc la capacité étoit diminuée d'une meſure, ou de $\frac{1}{1200}$. La même voye n'a pas auſſi bien réüſſi, pour meſurer l'augmentation produite par l'eau boüillante, parce qu'il eſt difficile de remplir les petites meſures avec une eau extrêmement chaude, une autre y a ſuppléé en quelque ſorte: le Matras plein d'eau juſqu'au fil, a été plongé bruſquement dans l'eau boüillante, & heureuſement il ne s'eſt point caſſé; l'eau a deſcendu ſur le champ dans le col du Matras,

Il y a long-temps que les Thermometres ont fait obſerver quelque choſe de pareil, qu'on a vû que leur liqueur, loin de monter, deſcend, lorſqu'on échauffe ſubitement leur boule. On ſçait auſſi que ſi la liqueur deſcend alors, que c'eſt que les parois de la boule ſont échauffées, avant que la liqueur qu'elle contient, l'ait été ſenſiblement, que ſa capacité eſt augmentée, avant que le volume de la liqueur ait eu le temps de croître. Dans nôtre expérience, nôtre Eſprit de Vin eſt deſcendu d'une meſure, ou environ, donc la capacité du Matras a été augmentée d'une meſure; d'où il ſuit que ſi on néglige d'eſtimer la dilatation & la contraction du vaſe, qu'un Eſprit de Vin, dont l'étenduë de la dilatabilité auroit été priſe dans ce cas de 400 à 435, ou de 1200 à 1305, ſera de 1199 à 1306, ſi on tient compte, comme on le doit, de ce dont la capacité du Matras ſe reſſerre & ſe dilate. Au lieu de meſurer cette capacité dans l'air tempéré, on peut la meſurer dans l'eau gelée, & avec de l'eau prête à geler, comme nous venons de le faire, & alors le fil marquera réellement un volume de 1200 parties ou meſures dans le temps de la congélation. Pour rectifier ce que l'eſſai donnera, il n'y aura donc qu'à ajoûter ce que l'augmentation du volume du vaſe exige qu'on y ajoûte, ce qui n'ira qu'à une meſure ſur l'accroiſſement qu'a paru recevoir un volume de 1200, & à peu près à $\frac{1}{3}$ de meſure ſur un volume de 400. Ainſi le volume d'Eſprit de Vin, qui condenſé, ſeroit 400, & trouvé par l'eſſai 435, devroit être eſtimé de 435 $\frac{1}{3}$. Il faut pourtant remarquer que ce ſeroit trop ajoûter au volume de 400 que le tiers d'augmentation de celui de 1200 : car les dilatations produites dans les boules par la chaleur, ſuivent le rapport des diametres, ou des circonférences de ces boules; & les capacités des boules ſont en raiſon des cubes des diametres augmentés.

Pour avoir des Thermometres, dont les degrés fuſſent exactement & commodement comparables en tout Pays, il ſeroit néceſſaire que les Sçavants vouluſſent bien convenir du choix d'un Eſprit; qu'ils exigeaſſent que tous les Thermometres

mometres fussent remplis de celui qu'ils auroient jugé le plus convenable. Leur choix ne devroit pas tomber, ce me semble, sur un Esprit de Vin très-rectifié ; on ne pourroit pas en recouvrer de tel par-tout. Un dont la dilatation comprise entre nos deux termes est de 32 mesures sur 400, est plus foible que ceux qui se trouvent communément ; il seroit toûjours aisé d'en avoir de tel, ou de ramener à cette condition ceux qui seroient plus forts. Les huit mesures de dilatation, qu'il donne sur 100, est un nombre dont le partage est commode, c'est ce qui m'a déterminé à le faire employer jusqu'à ce qu'on paroisse incliner davantage pour un autre, soit plus fort, soit plus foible.

Mais quel que soit l'Esprit de Vin, en faveur duquel on se détermine, on n'obmettra pas d'écrire son degré de dilatabilité sur la planche du Thermometre. On écrira, par exemple, en haut : *Esprit de Vin, dont le volume condensé par la congélation de l'eau est 1000, & rarefié par l'eau boüillante est 1080.* Dans ce cas, si le Thermometre a assés de hauteur, le degré de dilatation marque d'un côté 80, & de l'autre 1080 sera le terme de l'eau boüillante. Si la hauteur du Thermometre n'a pas permis d'écrire jusques-là la suite des degrés, on verra ceux qui manquent à cette suite. Il importe peu d'ailleurs qu'elle se trouve entiére sur les Thermometres, qui ne doivent nous apprendre que la température de l'air; jamais sa chaleur n'approche de celle de l'eau qui bout.

Lorsqu'on aura de l'Esprit de Vin, dont l'étenduë de la dilatabilité surpassera celle que l'on veut à celui qui doit remplir le Thermometre, on diminuëra la dilatabilité du premier; on la réduira à devenir égale à celle de l'autre, en mêlant de l'eau avec l'Esprit de Vin trop fort ou trop dilatable. On y parviendroit par des tâtonnements, mais dès qu'on connoît le degré de dilatabilité de l'Esprit de Vin, & qu'on a celui de l'eau, il est aisé de trouver en quelle proportion l'alliage doit être fait pour que la liqueur composée, l'Esprit de Vin affoibli, n'ait précisément qu'un certain degré de dilatabilité moyen, tel qu'on le voudra. En voici la regle.

Soit priſe la différence entre la dilatabilité de l'eau, & la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir.

Soit priſe auſſi la différence entre cette dilatabilité moyenne & celle de l'Eſprit de Vin donné.

Si on mêle un nombre de meſures d'Eſprit de Vin égal au nombre exprimé par la différence entre la dilatabilité de l'eau & la moyenne, avec un nombre de parties d'eau égal au nombre qui exprime la différence entre la dilatabilité de l'Eſprit de Vin donné & la moyenne, on aura un Eſprit de Vin affoibli, dont la dilatabilité ſera celle qu'on veut avoir. Par exemple, on a un Eſprit de Vin, dont la dilatabilité eſt de 35 meſures ſur 400, & on en veut un, dont la dilatabilité ſoit ſeulement de 30 ſur 400. Je ſuppoſe la dilatabilité de l'eau exactement de 15 ſur 400. Cela étant, la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir eſt 30.

La différence entre la dilatabilité de l'eau, & la moyenne, eſt donc 30 moins 15 ou 15.

La différence entre la dilatabilité de l'Eſprit de Vin qu'on a, & la moyenne qu'on lui veut, eſt 35 moins 30, ou 5.

La regle eſt de mêler 15 meſures d'Eſprit de Vin avec 5 meſures d'eau, & l'Eſprit de Vin affoibli par cet alliage n'aura que 30 meſures de dilatabilité.

L'uſage de cette regle ſera également ſimple pour tous les autres cas.

Quand la différence des qualités des Eſprits de Vin de deux Thermometres ſera connuë, on pourra faire une ſorte de comparaiſon des degrés de ces Thermometres, mais ce ne ſera qu'une ſorte de comparaiſon, indépendamment de la peine du calcul, qui pourroit avoir ſes difficultés, elle ne ſçauroit être exacte. Une obſervation que nous n'avons pas encore rapportée, & digne de l'être, va apprendre pourquoi il ſeroit difficile de ramener à des meſures ſemblables les degrés des Thermometres qui contiennent des Eſprits de Vin de différentes qualités, c'eſt que les degrés de rarefaction de l'eau ne ſont pas, à beaucoup près, proportionnels aux degrés de rarefaction de l'Eſprit de Vin. Pour l'expliquer & le prouver en même temps

par un exemple, je prends un Eſprit de Vin qui, depuis le terme de la congélation juſqu'à celui de la chaleur de l'eau boüillante, ſe dilate de 30 meſures, & de l'eau qui, du premier des deux termes au ſecond, ſe dilate de 15. La ſomme des dilatations d'une des liqueurs eſt à la ſomme des dilatations de l'autre, comme 2 à 1, mais les degrés par où elles paſſent l'une & l'autre, pendant que certains degrés de chaleur agiſſent ſur elles, ne ſont pas dans cette proportion, à beaucoup près. Une après-midi d'un de nos jours d'Eté, aſſés chaud, je mis dans un Matras 400 meſures d'eau, & j'expoſai enſuite ce Matras au froid de la congélation artificielle. Ce froid ne fit deſcendre l'eau, ne la condenſa que d'une demi-meſure ou environ. Le rétréciſſement du vaſe la faiſoit paroître, à la vérité, moins condenſée qu'elle n'étoit, mais les expériences rapportées ci-devant ont prouvé que ce ne pouvoit être que de $\frac{1}{3}$ de meſure, ſuppoſons pour-tant que ce fut d'une demi-meſure. Ainſi l'eau s'étoit au plus condenſée d'une meſure entiére. L'Eſprit de Vin auquel je la compare, expoſé au même froid, eſt deſcendu de près de 10 meſures. Pendant que l'eau s'eſt condenſée d'une meſure, l'Eſprit de Vin s'eſt donc condenſé de 10; deſorte que dans l'intervalle qui eſt depuis la congélation de l'eau, juſqu'à une chaleur aſſés conſidérable pour les Habitants de Paris, l'eau ſe rarefie au plus d'une meſure, pendant que l'Eſprit de Vin ſe rarefie de 10 des mêmes meſures. Le rapport de la rarefaction de l'eau à la rarefaction de cet Eſprit de Vin dans cet intervalle, eſt donc à peu près comme 1 à 10; au lieu que la dilatation de l'eau, depuis la congélation juſqu'à la chaleur de l'eau boüillante, eſt à la dilatation du même Eſprit de Vin entre ces deux termes comme 1 à 2.

Dès que l'eau eſt ſi peu dilatée par une ſuite de degrés de chaleur, qui dilatent aſſés conſidérablement l'Eſprit de Vin; & qu'une autre ſuite de plus grands degrés de chaleur ramenent pour-tant le rapport entre la dilatation de l'eau & celle de l'Eſprit de Vin à être comme 1 à 2, il y a des degrés d'une chaleur forte, qui compenſent le peu d'effet des

degrés d'une chaleur foible. Peut-être s'en trouve-t-il entre les degrés forts, qui dilatent autant, ou presqu'autant l'eau, qu'ils dilatent l'Esprit de Vin.

De tout ceci, on doit conclurre, que si deux Thermometres sont remplis de deux Esprits de Vin de différente dilatabilité, qu'on se tromperoit extrêmement si on évaluoit le rapport du nombre des degrés que l'un & l'autre doivent marquer, exposés à un air de même, ou de différente température, si, dis-je, on évaluoit ce rapport sur celui de l'étenduë du degré de dilatabilité des deux Esprits de Vin. Pour voir combien l'erreur pourroit être considérable, fixons-nous encore à un exemple, sçavoir, à deux Thermometres tels que l'Esprit de Vin de l'un réduit à 400 mesures par la congélation, devienne 435 par la chaleur de l'eau boüillante, & que l'autre Thermometre soit rempli d'Esprit de Vin foible, ou d'Eau-de-vie, dont le volume condensé par la congélation étant 400, devient 425, lorsqu'il est dilaté par l'eau boüillante; les jeux de ces Thermometres, les étendües de chemins qu'y parcourrent les liqueurs, devroient être dans le rapport de 35 à 25. Cela sera vrai aussi, si on prend le chemin depuis le terme de la congélation de l'eau jusqu'à celui de l'eau boüillante. Mais prenons-le depuis le terme de la congélation jusqu'à une grande chaleur pour de l'air qui doit être respiré, mais très-différente de celle que le feu donne à l'eau prête à boüillir. Supposons, par exemple, que le premier Thermometre, celui qui est rempli de 1000 mesures du plus fort des deux Esprits de Vin, marque 35 degrés, il s'en faudra bien que l'autre, qui est rempli de 1000 mesures de l'Esprit de Vin foible, ne marque 25 degrés; car l'Eau-de-vie, ou l'Esprit de Vin foible, dont le degré de dilatation est 25 sur 400, est un mélange de parties égales d'eau & d'Esprit de Vin, dont la dilatation est 35 sur 400. Or si nous supposons pour un instant que la dilatation de l'eau, qui est très-petite, pendant que le premier Thermometre parcourt 35 degrés, est nulle, nôtre second Thermometre ne se doit dilater que comme s'il étoit composé de 500

mesures de l'Esprit de Vin, tel que celui du premier. Si donc dans le premier 1000 mesures de volume donnent 35 degrés dans une certaine température d'air, 500 mesures, qui est la quantité réelle de l'Esprit du second Thermometre, ne donneront que 17 degrés $\frac{1}{2}$; ou si l'on veut ajoûter le demi-degré, ou le degré, qui peut être survenu aux 500 mesures d'eau, la dilatation sera de 18 ou 18 degrés $\frac{1}{2}$; au lieu donc que le nombre des degrés du premier, entre les termes de la congélation & de la chaleur de l'eau boüillante, est au nombre des degrés du second comme 35 à 25, entre nos deux autres termes il y sera comme 35 à 18 ou à 18 $\frac{1}{2}$.

Il suit pourtant, même de ce que nous venons de dire, que l'on pourra faire une sorte de comparaison des degrés de deux Thermometres remplis de différents Esprits de Vin dont on connoît le rapport de dilatabilité, & que cette comparaison s'éloignera peu de l'exactitude, tant que les degrés n'exprimeront pas un degré de chaleur d'air excessive; car connoissant les rapports de dilatabilité des deux Esprits de Vin, on connoît aisément, par la regle donnée ci-dessus, la quantité d'eau qui étant ajoûtée au plus fort, le ramene à l'état du plus foible, & on considere l'effet du Thermometre rempli de l'Esprit de Vin le plus foible, comme s'il étoit seulement occupé par un volume d'Esprit de Vin le plus fort, tel que seroit ce volume, si on eût retranché du volume total l'eau qui y entre, comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Deux Observateurs, dans des Pays éloignés, ont à comparer leurs observations faites sur deux Thermometres qui ont chacun 1000 mesures condensées par la congélation; mais les 1000 mesures de l'un se dilatent par l'eau boüillante de 87 degrés $\frac{1}{2}$, & celles de l'autre seulement de 62 $\frac{1}{2}$. On sçait bientôt que l'Esprit de Vin affoibli, qui ne se dilateroit que de 62 $\frac{1}{2}$, ne contient que 500 parties d'Esprit de Vin qui sur 400 se dilate de 35; que par conséquent en regardant comme nulle la dilatation de l'eau qui y est mêlée, les degrés de ce Thermometre doivent être à ceux du Thermometre de 1000 comme 500 est à 1000, comme 1 à 2, excepté ce qu'on

évalüera devoir être ajoûté pour la dilatation de 500 mesures d'eau.

Une remarque que nous ne devons pas obmettre, c'est que toutes les Tables ou Echelles de degrés de chaleur qu'on a voulu faire jusqu'ici, & que toutes celles qu'on pourroit faire, ne nous donneront jamais des rapports entre les différents degrés de chaleur que nous puissions regarder comme des rapports véritables, en un mot que les degrés de chaleur ne sont point entr'eux comme les degrés de dilatation des différentes liqueurs. Car si on établissoit sa Table des degrés de chaleur sur la dilatation de l'eau, certains degrés, dans cette Table, se trouveroient très-proches les uns des autres, ne différer que par de petites augmentations du volume de ce liquide, qui différeroient beaucoup si la Table étoit construite sur des degrés de dilatation de l'Esprit de Vin. Différentes autres liqueurs donneroient aussi sans doute d'autres différents intervalles, & feroient juger autrement des rapports des différents degrés de chaleur.

Nous ne pouvons nous refuser ici encore à une autre remarque, un peu étrangere à nôtre sujet, mais à laquelle il nous conduit, c'est que la dilatabilité de la partie spiritueuse, de la partie inflammable, de l'Esprit de Vin est beaucoup plus grande qu'il ne pourroit sembler, & peut être plus grande que celle de toute matiére à nous connüe, sans en excepter l'air. Il s'en faut bien que l'Esprit de Vin le plus rectifié que l'art sçait nous donner soit une huile pure, nullement mêlangée avec du flegme. Des expériences, faites avec grand soin par M. Geoffroy le jeune, ont appris que l'eau étoit plus de la moitié du poids de ce qu'on appelle de très-bon Esprit de Vin, & nous laissent imaginer qu'elle en est une partie beaucoup plus considérable. Or si nous supposons que l'huile, la matiére inflammable, n'est que le quart d'un volume d'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle est 400, & rarefiée par la chaleur de l'eau boüillante est 436, l'eau ou le flegme sont les trois quarts de ce volume. Mais si la rarefaction dont ce flegme est susceptible, est prise pour

égale à celle de nôtre eau, ce qui doit être à peu de chose près, on trouvera que l'étendüe de la dilatabilité de la partie inflammable est de 24 mesures $\frac{3}{4}$ sur 100 mesures, ou de 99 sur 400; car le volume 400 d'Esprit de Vin est alors composé de 300 parties d'eau & de 100 parties d'huile, ou de matiére inflammable; or les 300 parties d'eau ne peuvent être dilatées que de 11 mesures $\frac{1}{4}$, puisque 400 mesures d'eau ne peuvent être dilatées que de 15 mesures. La dilatation totale de l'Esprit de Vin étant de 36, il faut donc que les 100 parties d'huile ou de matiére inflammable fournissent les 24 mesures $\frac{3}{4}$ nécessaires pour remplir le nombre de 36 mesures.

Nous sommes bien éloignés de croire que nous ayons supposé la quantité de la matiére inflammable trop petite, en ne la prenant que pour le quart du volume d'Esprit de Vin, nous sommes même disposés à penser qu'en supposant que la matiére proprement inflammable n'est que la huitiéme, ou même que la seiziéme partie de ce mêlange, nous nous tromperons plûtôt pour lui en accorder trop que pour lui en accorder trop peu. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, il est aisé de trouver dans ces cas de combien la matiére inflammable est rarefiée par l'eau boüillante. En supposant qu'elle n'est qu'une huitiéme portion du volume, 100 mesures se dilatent de 45 mesures $\frac{3}{4}$; & en supposant qu'elle n'est que la seiziéme partie du volume, on trouvera que 100 mesures se dilatent de 87 mesures $\frac{3}{4}$. Voilà la partie spiritueuse ou inflammable conduite à se dilater de près du double par la chaleur de l'eau boüillante; & s'il étoit vrai, comme bien des Physiciens seront enclins à le croire, qu'elle fût encore une portion beaucoup plus petite du volume de l'Esprit de Vin, que la derniére à laquelle nous nous sommes arrêtés, jusqu'où n'ira point son degré de dilatabilité, borné par le simple terme de la chaleur de l'eau boüillante? aussi est-il à croire que la matiére inflammable a une prodigieuse disposition à se rarefier. Quelle étendüe n'occupe pas la Poudre quand elle s'enflamme, ou se rarefie au dernier point?

Je ſçai qu'on a voulu donner à la rarefaction de l'Air celle de la Poudre à Canon, mais la matiére inflammable eſt par elle-même peut-être beaucoup plus rareſiable que l'Air. L'Air ordinaire ne ſe dilate pas autant par l'eau boüillante; & ſi l'on veut attribuer à l'Air même la dilatabilité de l'Eſprit de Vin, il faut ſuppoſer que celui qu'il contient eſt prodigieuſement condenſé. Auſſi quoique l'eau contienne beaucoup d'Air, & peut-être autant & plus que l'Eſprit de Vin, l'eau n'eſt que très-peu rareſiable en comparaiſon de ce que l'eſt la partie ſpiritueuſe de l'Eſprit de Vin.

Mais pour revenir à nos Thermometres, nous avons regardé comme un principe certain que l'exactitude de leur graduation demandoit que leurs Tubes fuſſent gros, & que plus les Tubes ſeroient gros, & plus il ſeroit aiſé de les graduer parfaitement; la groſſeur des Tuyaux engage à une augmentation proportionnelle de celle des Boules. Mais nous ne pouvons diſſimuler une imperfection à craindre pour les Thermometres à groſſes Boules. Il y a une ſorte de ſenſibilité qu'ils ne ſçauroient avoir auſſi grande que l'ont les Thermometres à petites Boules. Je diſtingue dans les Thermometres deux eſpeces de ſenſibilité, dont la premiére ſe meſure par la quantité de chemin que parcourt la liqueur dans le Tube, pendant qu'il ſe fait un certain changement dans la température de l'air. Comme celle-ci dépend de la proportion du diametre de la Boule à celui du Tube, elle peut également ſe trouver dans les Thermometres à groſſes Boules, & dans les Thermometres à petites Boules.

Mais il y a une autre eſpece de ſenſibilité dans les Thermometres, qui ſeule même mériteroit ce nom; elle conſiſte véritablement dans un ſentiment plus exquis, en ce qu'un Thermometre, plus ſenſible qu'un autre aux changements de chaud & froid, nous apprend plûtôt ceux qui ſe ſont faits dans l'air. Les Thermometres à air l'emportent en ce genre de ſenſibilité ſur ceux à Eſprit de Vin; l'air reçoit plus vîte les impreſſions du chaud & du froid que l'Eſprit de Vin le plus rectifié ne les peut recevoir. Or entre les Thermometres

à

à Eſprit de Vin, ceux-là ſeront les plus ſenſibles dans ce point de vûë, dont les Boules ſeront plus petites. Les changements du froid au chaud, d'un degré de chaud à un autre degré de chaud plus grand, ſe font dans l'air avant de ſe faire dans la liqueur du Thermometre. L'air, plus chaud que les corps qu'il touche, leur communique de ſa chaleur; la Boule du Thermometre partage avec la couche d'Eſprit de Vin appliquée contre ſa ſurface, les impreſſions de chaleur qu'elle a reçûës. Cette premiére couche d'Eſprit de Vin partage la ſienne avec la ſeconde couche; ainſi la chaleur, diſtribuée de couches en couches, eſt moins grande vers le centre de ſa Boule d'Eſprit de Vin que vers ſa ſurface, & eſt d'autant moins grande que la Boule a plus de diametre. Il en eſt ici comme du feu qu'on allume autour de deux vaſes, dont l'un eſt grand, & l'autre petit, quoiqu'on le faſſe agir également ſur toute la ſurface des deux vaſes, la liqueur contenüe dans le petit boüillira plûtôt que celle qui ſera contenüe dans le grand. Auſſi ſi la Boule étoit ſuppoſée groſſe juſqu'à un certain point, il ſe feroit ſouvent des changements du froid au chaud & du chaud au froid, qui ne ſeroient pas marqués dans toute leur étendüe par le Thermometre, car il faudroit alors un temps aſſés conſidérable avant que l'Eſprit de Vin placé près du centre de la Boule, eût pris le degré de chaleur de l'air extérieur; & s'il arrive qu'avant d'avoir pris ce degré de chaleur, l'air commence à ſe refroidir, la liqueur de la Boule ſe refroidira avant d'avoir pris un degré de chaleur égal à celui que l'air avoit ci-devant. Les paſſages du froid au chaud ſont ſouvent ſi ſubits, l'air qui nous environne reſte pendant ſi peu de temps dans un même état, qu'il eſt même à croire que les Thermometres à plus petites Boules ne donnent que très-rarement toute l'étendüe du froid ou du chaud de l'air, & cet inconvénient eſt encore plus grand pour les Thermometres à groſſes Boules.

Mais le remede qu'on peut apporter à ce défaut des Thermometres à groſſes Boules eſt bien ſimple. Rien n'exige que la partie que nous nommons la Boule du Thermometre ſoit

une Boule. Toute figure lui eſt bonne. Tout ce qui y eſt eſſentiel, c'eſt qu'elle ait une certaine capacité. Qu'on lui donne la forme d'une Boîte applatie, ou d'une Lentille, dont les parois laiſſent entr'eux une diſtance moindre que n'eſt le diametre des Boules des petits Thermometres, & alors on rendra les Thermometres à gros Tubes auſſi ſenſibles, & même plus ſenſibles, que le ſont ceux à petites Boules. Plus on applatira les Boîtes, plus on augmentera la ſenſibilité de la ſeconde eſpece. Celle de la premiére ſera auſſi toûjours telle qu'on la voudra ; car en augmentant la grandeur des Boîtes, on eſt toûjours maître de les rendre d'une aſſés grande capacité. Il eſt vrai que dès qu'elles auront une telle figure, qu'il ne ſera peut-être pas poſſible de les faire faire par ceux qui ſoufflent des Boules à la Lampe, mais il eſt aſſés indifférent à ceux qui ont beſoin de Thermometres, qu'on faſſe dans les Verreries les Boîtes & les Tubes, ou qu'on n'y faſſe que les ſeuls Tuyaux, comme on les y a toûjours faits. Si pourtant les Boules n'excédent pas quatre pouces de diametre, la marche de la liqueur des Tubes ne ſera pas long-temps à ſe fixer au terme correſpondant à celui que donne une petite Boule; cela ne ſçauroit aller à un quart d'heure, ni même à un demi-quart d'heure, ſelon les expériences que j'en ai faites. Enfin au lieu de prendre pour la Boîte une Boule d'un ſi grand diametre, on peut en prendre de forme cylindrique. Elle peut être un gros Tuyau qui n'aura qu'autant de diametre, & même moins qu'en ont les Boules des Thermometres ordinaires, on déterminera ſa hauteur ſur la capacité qui convient à la quantité de liqueur qu'elle doit contenir.

Le plus & le moins de ſenſibilité de la ſeconde eſpece ſera quelquefois cauſe que les marches de divers Thermometres, qui devroient être les mêmes, paroîtront différentes. Qu'en deux heures il ſe faſſe dans l'air un changement de chaleur capable de faire monter la liqueur d'un degré & demi, peu après ces deux heures le Thermometre le plus ſenſible marquera ce degré & demi de plus, pendant que celui qui eſt moins ſenſible ne ſe ſera peut-être élevé que d'un degré.

Mais si la chaleur de l'air reste constante pendant quelque temps, le premier se soûtiendra au même point, & le second arrivera à un point semblable. De-là il suit que les temps les moins équivoques pour juger de l'état de la temperature de l'air par les Thermometres, ce sont ceux où la liqueur est restée au même degré d'élévation pendant un quart d'heure, ou environ.

M. Taglini, Professeur à Pises, a fait imprimer, en 1725, une These sur les Thermometres, qui est dans un tout autre goût que celles qui paroissent si souvent dans nos Colleges; elle n'a la forme de These que par ses positions. C'est un petit ouvrage où on a soigneusement rassemblé & discuté tout ce qui a rapport aux Thermometres. Nous n'acquiescerons pourtant pas à toutes ses assertions, & sur-tout à la derniére, elle est trop directement contraire aux principes sur lesquels nous avons cherché à construire des Thermometres dont les degrés de chaud & de froid fussent comparables; elle ôte même toute espérance d'en avoir jamais de tels. Il y soûtient que les degrés fixes de chaud & de froid, que les Physiciens ont cherché jusqu'ici, n'ont point encore été trouvés, & qu'il est impossible de les trouver. Des deux pourtant que nous avons pris pour termes, il n'y en a qu'un qui y soit attaqué directement, celui de chaleur déterminé par l'eau boüillante. Il combat, à la vérité, les degrés fixes qu'on voudroit établir par le froid de la glace, & même par la congélation produite par le froid de l'air. Mais il ne dit rien contre le froid de la glace artificielle faite dans un temps où l'air fonderoit vîte la glace naturelle, & nous croyons avoir prouvé ci-dessus que le degré de froid de cette glace artificielle ne doit pas être confondu avec celui de toute autre glace, & qu'il pouvoit être regardé comme un terme fixe. Nous avoüerons pourtant que ce terme de froid, ou de moindre chaleur, ne nous paroît pas plus fixe que celui de l'eau boüillante, que M. Taglini ne veut pas reconnoître pour tel, & que j'eusse crû hors de toute atteinte. La théorie eût dû même nous apprendre, quand on a eu besoin d'un degré de chaleur

fixe, que nous le pouvions trouver là. Mais il n'arrive que trop ſouvent, à nôtre honte, que nous devons à des expériences faites aſſés tard des connoiſſances où le raiſonnement eût dû nous conduire de bonne heure. Sans être Phyſicien, on a toûjours ſçû que de l'eau boüillante eſt moins chaude que de l'Huile boüillante, que du Plomb, que du Cuivre, que du Fer, que de l'Argent, fondus juſqu'à boüillir. On a donc toûjours reconnu qu'il y avoit des degrés de chaleur où l'eau ne pouvoit atteindre; il y en a donc un qu'elle ne ſçauroit paſſer, & par conſéquent qui eſt un degré fixe. Peut-être a-t-on eû tort de croire que l'eau ſoit arrivée à ce degré de chaleur, dès qu'il commence à s'en élever quelques boüillons. C'eſt ce que prouveroit tout au plus l'expérience rapportée par M. Taglini, qui lui a fait voir que l'eau, qui étoit contenüe dans une Boule adaptée à un Tuyau de verre, ne s'étoit élévée qu'à une certaine hauteur, la Boule ayant été miſe dans un pot où de l'eau boüilloit, & qu'ayant forcé l'eau du pot à boüillir plus fort, l'eau du Tube s'y étoit élevée plus haut, & ſi haut qu'elle étoit même ſortie hors de ce Tube. Si le diametre de la Boule eût été moins grand par rapport à celui du Tube, ou que le Tube eût eu plus de hauteur, l'eau ſeroit toûjours reſtée dans le Tube; & quand elle auroit été arrivée à un certain terme, elle y ſeroit reſtée, quelque choſe qu'il eut fait pour augmenter la force des boüillonnements de l'eau du pot. C'eſt ce que j'ai éprouvé ſur des Boules de quatre pouces & demi, adaptées à de gros Tubes de plus de ſix pieds de long. J'ai auſſi éprouvé qu'il falloit laiſſer la Boule pendant un temps aſſés conſidérable dans l'eau boüillante, avant que celle du Tube montât juſqu'où elle peut monter, au moins plus d'un quart d'heure, parce que l'eau qui monte dans le Tube s'y refroidit.

Le ſçavant Profeſſeur n'a obmis aucune des raiſons capables de faire douter du terme fixe donné par l'eau boüillante, ou au moins de faire douter ſi ce terme eſt ſaiſiſſable. Il fait obſerver combien les eaux different les unes des autres, que leurs différences en peſanteur ſont connües, & nous en

doivent faire imaginer dans leurs compoſitions ; que de-là il ſuit que le degré de chaleur qui ſuffit pour faire boüillir une certaine eau, ne ſuffit pas, ou eſt plus que ſuffiſant pour en faire boüillir d'autres. Tout cela a bien l'air d'être vrai : mais en conclüerons-nous qu'il faut caractériſer par le poids, ou par d'autres moyens, l'eſpece d'eau dont nous nous ſervirons pour marquer le terme de chaleur de l'eau qui bout, comme nous l'avons fait pour l'Eſprit de Vin ? Ce ſeroit au pis aller à quoi nous ſerions réduits : mais il y a bien de l'apparence que cette précaution ſeroit très-inutile. Tant qu'on s'en tiendra à des eaux communes, ce que l'une aura de chaleur plus que l'autre, lorſqu'elle boüillira, ne donnera pas apparemment des différences ſaiſiſſables. Quand il s'agit de meſures ſenſibles, nous n'avons beſoin que d'égalités ſenſibles. L'impoſſibilité d'avoir des meſures exactes, de quelque eſpece que ce ſoit, ſe prouveroit très-ſolidement ; peut-être n'y en a-t-il jamais eu deux poids de marc, deux aulnes, &c. d'une égalité parfaite. Des meſures qu'on feroit parfaitement égales, ceſſeroient de l'être ſelon que la chaleur, la ſéchereſſe ou l'humidité de l'air agiroient ſur elles. Nous avons pourtant des meſures de tout genre d'une juſteſſe qui nous ſuffit, parce qu'elle eſt telle qu'il n'en réſulte pas des inégalités importantes.

Après tout j'avoüerai ſans peine, que je n'eſpere pas qu'on conſtruiſe beaucoup de Thermometres dont les degrés ſoient exactement égaux, ou exactement proportionnels. Les Barometres ſimples, tout ſimples qu'ils ſont, n'ont pas toûjours des marches parfaitement égales; mais il ſera aiſé de faire des Thermometres qui différeront peu ſenſiblement, & qui nous donneront des idées des degrés de froid & de chaud à peu près auſſi exactes que nous avons beſoin de les avoir. Il en ſera de ces inſtruments comme de tous les autres ouvrages de l'art, on les fera d'autant plus parfaits, qu'on apportera plus d'attention à les conſtruire; que des mains plus adroites & plus exercées s'y occuperont. Ceux que j'ai fait faire n'ont pas différé dans les rapports de leur marche de plus d'un quart de degré, & certainement mille gens feront mieux

que je n'ai fait faire. Enfin quand on ne pourroit pas remplir dans la derniére exactitude toutes les conditions demandées pour la perfection de nos Thermometres, au moins auroit-t-on toûjours un à peu-près, & alors on auroit des Thermometres bien supérieurs à ceux à Esprit de Vin dont on se sert aujourd'hui, où tout est inconnu, capacité des Boules & des Tubes, valeur des degrés & qualité de la liqueur.

Si la grandeur de nos nouveaux Thermometres déplaît, on pourra par leur moyen en avoir d'aussi petits qu'on souhaitera, dont la graduation sera proportionnelle à celle des grands ; on les remplira du même Esprit de Vin, & on se servira des grands comme d'étalons pour graduer les petits. On pourra même construire des Thermometres assés petits, en les mesurant réellement comme nous avons appris à mesurer ceux d'un plus grand volume, à cela près que les divisions n'en seront bien précises que de cinq en cinq degrés; par exemple, au lieu de les graduer avec une mesure d'un degré, on les gradüera avec une mesure de cinq degres. Tous les termes de cinq en cinq seront donc exactement déterminés. On divisera chacun de ces espaces en cinq parties pour faire autant de degrés intermédiaires, & cette façon de diviser ne produira pas d'erreurs sensibles dans ces petits instruments.

Au reste quand on a voulu nier l'existence, & même la possibilité de tout degré de chaleur fixe, on n'a pas pensé que les Physiciens de Paris en ont un très-commode dans les Caves de l'Observatoire. C'est, à la vérité, un fait bien singulier, & un de ceux qu'on n'auroit pas prévû, que des Caves dont la profondeur n'est pas extrême, & dont la longueur n'est pas excessive, & à qui on ne s'est pas embarrassé d'ôter toute communication avec l'air extérieur, que ces Caves, dis-je, renferment un air dont la température est toûjours sensiblement la même. Les épreuves qu'on en a faites sont pourtant démonstratives ; M. de la Hire a observé que dans les plus grandes chaleurs de nos Etés, & dans le plus grand froid de 1709, la liqueur du Thermometre est restée assés

conſtamment ſur le même degré ; auſſi ce degré de température des Caves de l'Obſervatoire eſt-il un des termes qu'on a pris ſoin de marquer ſur les meilleurs des Thermometres qu'on a faits juſqu'ici. Un des premiers uſages qu'on a crû devoir faire des Thermometres conſtruits ſur les principes que nous avons donnés a été de le reconnoître. On a trouvé que le degré de chaleur de ces Caves étoit à 10 degrés $\frac{1}{4}$ au deſſus du terme de la congélation dans un Thermometre dont le volume de la liqueur condenſée par la congélation artificielle étoit 1000, & dont le volume de cette liqueur dilatée par l'eau boüillante étoit 1080, ou, ce qui revient au même, le volume de la liqueur de ce Thermometre, qui eſt réduit à 1000, par la congélation de l'eau, eſt 1010 $\frac{1}{4}$ dans les Caves de l'Obſervatoire.

Nous pourrons de même, par le moyen des nouveaux Thermometres, ramener à des degrés connus & comparables les obſervations faites ci-devant ſur des Thermometres qui ſubſiſtent encore, tel qu'eſt celui de M. de la Hire, dont on ſe ſert à l'Obſervatoire depuis tant d'années.

Lorſque nous n'avions ci-deſſus pour objet que la ſeule conſtruction du Thermometre, nous avons dit que nous ne croyons pas qu'il convînt de rarefier extrêmement l'air qu'on renferme dans le Tube, ni de laiſſer cet air dans l'état de condenſation qu'il a dans des temps froids ; que ce qui nous paroiſſoit de mieux, eſt que l'air y fût dilaté à peu-près au point où il l'eſt dans les jours les plus chauds. Les raiſons qui nous ont déterminé à prendre ce parti moyen ſont aiſées à voir. Quand l'Eſprit de Vin ſe rarefie, l'air contenu dans le Tube tend à ſe rarefier ; il fait donc des efforts pour s'oppoſer à la dilatation de l'Eſprit de Vin, qui ne ſçauroit ſe faire ſans condenſer l'air, ces efforts pourroient briſer le Tube ou la Boule, lorſque la chaleur eſt conſidérable. Il ſemble auſſi y avoir un inconvénient, & beaucoup plus grand, à ne renfermer dans le Tube qu'un air extrêmement rarefié. L'air qui entre dans la compoſition de l'Eſprit de Vin, trouve alors de la facilité à s'en dégager ; & s'il s'en dégage, l'Eſprit de Vin

n'eſt plus préciſément le même que celui dont on a déterminé les qualités. Or que l'air contenu dans l'Eſprit de Vin s'en dégage, ſi cet Eſprit de Vin eſt environné d'un air trop rarefié, d'une eſpece de vuide, c'eſt ce qu'une obſervation faite ſur nos Thermometres a montré très-clairement. Après avoir fait prendre à l'Eſprit de Vin de la Boule d'un de ces Thermometres un degré de chaleur qui étoit peu au deſſous de celui de l'eau boüillante, je le couchai preſque horizontalement, je laiſſai refroidir ſa liqueur pendant qu'il étoit dans cette poſition. Bien-tôt le volume de l'Eſprit de Vin, renfermé dans la Boule, diminua ; le vuide, qui ordinairement ſe fait dans le Tube, ſe fit alors dans la partie la plus élevée de la Boule ; je le vis croître, devenir inſenſiblement un ſegment de ſphere de plus grand en plus grand. Mais à meſure que ce vuide croiſſoit, j'obſervois continuellement de petites bulles qui s'élevoient de toutes parts de la ſurface de l'Eſprit de Vin, & qui ſe réüniſſoient enſuite à la grande bulle. Ces bulles ne pouvoient être priſes que pour des bulles d'air qui ſe dégageoient de l'Eſprit de Vin. Cette obſervation nous a conduit à en faire pluſieurs autres, que nous ne ſçaurions placer ici ſans ajoûter beaucoup à la longueur d'un Mémoire déja exceſſivement long ; nous ne pourrions nous diſpenſer de les rapporter dans toute leur étendüe ; outre qu'elles ſont aſſés curieuſes par elles-mêmes, elles nous apprendront à conſtruire des Thermometres qui ne feront point ſujets à des dérangements qu'on a vû arriver à ceux qu'on a conſtruits juſqu'ici, & dont les nôtres même ne ſeroient pas exempts.

Nous ferons ſeulement faire attention à la ſource des dérangements dont nous voulons parler. On n'eſt pas certain ſi un Thermometre, après pluſieurs années, ou même après un temps plus court, eſt tel qu'il étoit dans le temps de ſa conſtruction. L'Eſprit de Vin peut perdre peu-à-peu, à la longue, cet air qui s'en eſt ſéparé en un temps court dans l'expérience que nous venons de rapporter ; peut-être même que quelques-unes des parties des plus ſpiritueuſes de l'Eſprit

de

de Vin s'élevent dans le Tube, & y reſtent en vapeur ; peut-être auſſi que l'Eſprit de Vin reprend l'air qui l'avoit abandonné, comme nous voyons que l'eau ſe recharge avec le temps de celui qui en avoit été chaſſé pendant qu'elle boüilloit ; & peut-être que de même les parties ſpiritueuſes qui ſe ſont élevées de l'Eſprit de Vin, viennent enſuite s'y réünir, qu'ainſi il ſe fait une ſorte de circulation qui entretient l'Eſprit de Vin renfermé toûjours à peu-près dans un même état. C'eſt ce qui a été difficile à décider juſqu'ici, & ce qui pourra l'être ſûrement dans la ſuite. On n'aura qu'à expoſer la Boule d'un grand Thermometre à la congélation artificielle de l'eau, la ſurface de la liqueur ſe trouvera dans le Tube vis-à-vis la ligne marquée pour le terme de la congélation, s'il ne s'eſt fait aucun changement dans la liqueur depuis que le Thermometre a été conſtruit, & s'il y eſt arrivé des changements, elle ſera au deſſous & au deſſus de ce terme, ſelon la nature des changements. On a donc ainſi une méthode de s'aſſûrer continuellement de l'état de ſon inſtrument, de le vérifier, & on ſçait juſqu'où on doit compter ſur les obſervations qu'il fournit.

Il ſeroit à ſouhaiter que les Phyſiciens de différents Pays puſſent avoir des Thermometres de cette eſpece, leurs obſervations nous inſtruiroient alors chaque année ſur le plus grand chaud & le plus grand froid des différents climats. On ne ſe trouvera pas à portée par-tout de faire ſouffler des Boules ou des Boîtes au bout des Tuyaux ; mais pour peu qu'on puiſſe avoir des Tuyaux, & qu'on ait une ſorte d'induſtrie, qui ne manque gueres à ceux qui aiment les recherches dont il s'agit, il ſera aiſé de ſe faire ſoi-même un Thermometre. On adaptera le Tube à quelque Bouteille de capacité convenable. Si on eſt arrêté par la difficulté de ſceller enſemble le goulot de la Bouteille, & le bout inférieur du Tuyau, l'équivalent peut être fait par un lut, ou une eſpece de colle ſur laquelle l'Eſprit de Vin n'ait pas priſe ; de la Gomme arabique, de la colle de Poiſſon, qui ſe diſſolvent ſi aiſément à l'eau, ne ſe diſſolvent point à l'Eſprit de Vin.

J'ai luté, avec l'une & l'autre de ces colles, des Tubes à des Bouteilles qui m'ont fait des Thermometres. Il y a lieu de croire qu'ils seront assés durables ; c'est sur quoi on ne peut être instruit que par le temps, & sur quoi je ne le suis pas assés. Je ferai seulement remarquer qu'extérieurement il faut couvrir de quelques couches d'un Vernis, qui résiste aux impressions de l'humidité, la surface de la colle : un simple Vernis de Lacque y suffira.

Mais inutilement aura-t-on en différents Pays des Thermometres bien construits sur les principes qui rendent leurs degrés comparables, la comparaison du chaud & du froid des différents Pays & des différentes saisons ne se fera jamais exactement, si ceux qui veulent bien se charger de faire les observations qui y sont nécessaires, & de les communiquer au Public, ne sont attentifs à bien choisir les places où ils mettront leurs Thermometres, au moins quelque temps avant d'observer leur marche. Dans une même Ville, dans une même Maison, on trouvera à la même heure de grandes différences entre les degrés de différents Thermometres, qui tous marqueroient pourtant le même s'ils étoient posés les uns à côté des autres. La liqueur de ceux qui seront dans des chambres, n'y fit-on jamais de feu, sera à des hauteurs fort différentes de celles où sera la liqueur des Thermometres qui seront exposés à l'air libre; il y a tel jour où l'on verra la liqueur de ces derniers monter & descendre de 8 à 10 degrés, pendant que la liqueur des autres aura à peine monté ou descendu d'un degré. Il est donc absolument essentiel que l'Observateur expose son Thermometre à l'air extérieur. L'exposition qu'il doit choisir est celle du Nord, & telle que le Soleil ne puisse donner dessus à aucune heure du jour. Ce ne sera pas même assés, si en rendant compte de ses observations, il n'avertit s'il y a des murs voisins qui renvoyent les rayons du Soleil du côté du Thermometre, ou s'il n'y en a pas ; si son Thermometre est placé à un premier, à un second, ou à un troisiéme étage. Toutes ces circonstances sont essentielles à marquer pour mettre en état de faire d'exactes

comparaiſons. J'ai vû en Eté deux Thermometres, expoſés à l'air libre & au Nord, dans différentes Maiſons, dont la liqueur de l'un étoit, dans les jours où le Soleil paroiſſoit, d'un degré ou d'un degré & demi plus élevée que celle de l'autre, parce que l'air qui l'environnoit étoit échauffé par la réverbération des murs voiſins. J'ai auſſi obſervé, dans des jours chauds, que la liqueur d'un Thermometre mis à la fenêtre d'un rez-de-chauſſée, étoit d'un degré plus bas que celle d'un autre qui étoit au premier étage, à la fenêtre au deſſus de la précédente. Cependant les Thermometres, dont je parle, étoient de ceux de nouvelle conſtruction, & mis les uns à côté des autres auroient marqué les mêmes degrés. Les inſtruments les plus parfaits demandent de l'habileté & de l'attention dans ceux qui s'en ſervent.



NOUVELLES PROPRIETÉS DE L'HYPERBOLE.

Par M. MAHIEU.

23 Decemb. 1730.

LE dessein de ce Mémoire est de découvrir l'analogie qui est entre le Triangle, le Cercle & l'Hyperbole.

J'ai crû que cette comparaison pouvoit être utile, à cause que l'on ne connoît jamais bien ce que les choses sont en elles-mêmes, si l'on ne connoît aussi ce qu'elles sont considérées par rapport à celles à qui elles ressemblent, & dont elles tirent leur origine.

J'établis la comparaison que je fais du Triangle, du Cercle & de l'Hyperbole, sur un principe qui est un Corollaire d'une Proposition d'un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie en 1724. Ce principe fait remarquer que les coupées & les appliquées, prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, peuvent être représentées par une suite infinie de bases changeantes qui appartiennent à des Triangles, qui pris deux à deux, ont deux côtés égaux, chacun à chacun. On verra dans les Mémoires suivants que cette propriété est très-étendüe, & qu'elle continüe à se faire remarquer jusques dans des Courbes d'un ordre plus élevé, dont les appliquées sont les coordonnées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, ensorte qu'on pourroit réciproquement faire usage de l'Hyperbole pour décrire ces Courbes, & de ces Courbes pour décrire l'Hyperbole.

Au reste les principes de ce Mémoire sont simples : quoique simples, ils conduisent à une proposition qui semble un véritable paradoxe, qui est que deux espaces inégaux, l'un considéré dans le Cercle, & l'autre dans l'Hyperbole, contiennent un même nombre de lignes égales. Je ferai voir dans les Mémoires suivants, que ce qui semble un paradoxe, se rencontre dans toutes les Courbes, en les comparant deux à

deux de la même maniére que j'ai comparé le Cercle & l'Hyperbole, & je déduirai de cette comparaison de nouvelles Courbes, que je nommerai les *déplacées*.

LEMME.

Si quatre Triangles, comparés deux à deux, ont deux côtés égaux chacun à chacun, ensorte que la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux autres Triangles, les bases des deux premiers Triangles seront en raison réciproque avec les bases des deux autres Triangles. I.

1.° Si parmi les quatre angles qui sont sur les deux premiéres bases & sur les deux derniéres, il y en a deux, qui pris ensemble, sont égaux à deux droits.

2.° Si parmi les quatre angles qui sont opposés aux deux premiéres bases & aux deux derniéres, il y en a deux qui sont la différence de la somme des angles sur la base des deux autres Triangles.

3.° S'il y a deux angles obliques égaux sur les bases, & deux inégaux.

4.° Si les perpendiculaires ou les éloignements de perpendiculaires comparés deux à deux étant égaux, il se trouve parmi les quatre angles sur les deux premiéres bases & sur les deux derniéres deux angles inégaux semblablement posés.

Soit les quatre Triangles ACB, FHG, KLM, NPO, dont les deux premiers ACB, FHG, ont deux côtés $AC + CB$ égaux aux deux côtés $FH + HG$, & les deux derniers KLM, NPO, ont pareillement deux côtés $KL + LM$ égaux aux deux côtés $NP + PO$; ensorte que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles. Fig. 1. & 2.

Je dis que les bases AB, FG, KM, NO, sont en raison réciproque.

1.° Lorsque les deux angles quelconques CBA, HGF, pris ensemble, étant égaux à deux droits, les deux angles

quelconques *LMK, PON*, pris enſemble, ſont pareillement égaux à deux droits.

2.° Lorſque l'angle *FHG* étant la différence des angles ſur la baſe du Triangle *ACB*, l'angle *NPO* eſt pareillement la différence des angles ſur la baſe du Triangle *KLM*.

3.° Lorſque l'angle quelconque *A* étant égal à l'angle *F*, l'angle quelconque *K* eſt pareillement égal à l'angle *N*.

4.° Lorſque les perpendiculaires *CE, HI*, ou les éloignements de perpendiculaires, *AE, FI*, étant égaux, & les deux angles *CBA, HGF* inégaux, les deux perpendiculaires *LR, PS*, ou les deux éloignements de perpendiculaire *KR, NS*, ſont pareillement égaux, & les deux angles *LMK, PON*, pareillement inégaux.

PRÉPARATION.

Pour ne faire qu'un ſeul cas des quatre, faites l'angle *ACD* égal à l'angle *FHG*, qui eſt la différence des angles ſur la baſe du Triangle *ACB*, & l'angle *KLQ* égal à *NPO*, qui eſt la différence des angles ſur la baſe du Triangle *KLM*; puiſque l'angle *ACD* eſt égal à l'angle *FHG*, l'angle *CDB* eſt égal à l'angle *B*, par conſéquent les lignes *CD, CB, GH*, ſont égales, & les deux Triangles *ACD, FHG*, ſont égaux en tout ſens. D'où il ſuit que lorſque l'angle *FHG* eſt la difference des angles ſur la baſe du Triangle *ACB*, l'angle *HGF*, ou ſon égal *CDA*, eſt le complement à deux droits de l'angle *CBD*.

On prouvera de même dans les autres cas qu'il y a toûjours deux angles ſur les deux premiéres baſes & ſur les deux derniéres, qui, pris enſemble, ſont égaux à deux droits.

DÉMONSTRATION. Dans les Triangles *ACB, AB*, eſt la ſomme des éloignements de perpendiculaires, *AD* ou *FG* en eſt la différence; par conſéquent $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = AB \times FG$, on prouvera de même que $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = KM \times NO$: or *(hyp.)* $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; donc $AB \times FG = KM \times NO$.

SCHOLIE. Lorſque l'un des angles *B* eſt droit, l'angle *G* II.
qui eſt ſon complement à deux droits eſt auſſi droit, les lignes *AB, FG,* ſont égales & moyennes proportionnelles entre *KM* & *NO*.

THEOREME I.

Les coupées & les appliquées priſes ſur les aſymptotes d'une III.
portion déterminée de l'Hyperbole, peuvent être repréſentées par les baſes croiſſantes & décroiſſantes d'une ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun.

DÉMONSTRATION. La ſuite infinie des Triangles qui ont Fig. 1 & 2.
deux côtés égaux chacun à chacun, peut être repréſentée par les quatre Triangles *ACB, FHG, KLM, NPO,* qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & quatre angles ſur les quatre baſes, enſorte que les deux angles *CBA, HGF,* qui ſont ſur les deux premiéres baſes, étant égaux à deux droits, les deux *LMK, PON,* ſemblablement poſés ſur les deux derniéres baſes ſoient pareillement égaux à deux droits, donc (*Hyp. & par Lem. 1.*) $AB \times FG = KM \times NO$. C'eſt pourquoi nommant $AB (a)$, $FG (b)$, $KM (x)$, $NO (y)$, ſi l'on ſubſtitüe ces valeurs dans l'Equation, il vient $ab = xy$, qui eſt l'Equation de l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

SCHOLIE I. La ſuite infinie des baſes ſe partage en IV.
deux ſuites infinies; celle qui eſt la ſuite des baſes qui ont deux angles aigus, repréſente les coupées; celle qui eſt la ſuite des baſes qui ont un angle obtus, repréſente les appliquées.

Concevés ſur l'aſymptote *AQ* les baſes qui ont un angle Fig. 4.
obtus, que je nomme *y*, & ſur l'aſymptote *AP*, toutes les baſes qui ont deux angles aigus, que je nomme *x*. Il eſt évident que les *x* ſont croiſſantes en allant de *A* vers *P*, & les *y* décroiſſantes en allant de *M* vers *A*.

SCHOLIE II. Parmi ces baſes, celle qui a le plus grand V.
angle obtus, & celle qui a le moindre angle aigu, ne différent ni entr'elles, ni avec les deux baſes qui ont chacune un angle droit, que d'une grandeur infiniment petite, c'eſt pourquoi

elles peuvent être prises l'une pour l'autre : ces deux bases représentent la puissance de l'Hyperbole.

THEOREME II.

VI. *Les appliquées & les coupées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, représentent non seulement les bases changeantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais elles représentent aussi les bases changeantes d'une infinité de suites de Triangles qui, considérés séparément, ont les côtés inégaux, & dont la différence des quarrés des côtés est le quarré d'une même ligne.*

Fig. 1 & 3. Soit les deux Triangles *ACB, FHG,* qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & deux angles *CBA, HGF,* qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits qui représentent deux Triangles d'une suite infinie. Soit deux autres Triangles *KLM, NPO,* qui représentent deux Triangles d'une autre suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, plus grands ou plus petits que les deux côtés des deux premiers Triangles, ensorte néantmoins que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles, & que les deux angles *LMK, PON,* pris ensemble, soient égaux à deux droits, je dis que $AB \times FG = KM \times NO$, ce qui est évident par le Lemme 1. Soit $AB\ (a)$, $FG\ (b)$, $KM\ (x)$, $NO\ (y)$. Substituant ces valeurs, il vient $ab = xy$. *C. Q. F. D.*

VII. SCHOLIE. On pourroit déduire de ce Théoreme plusieurs propositions sur l'infini qui sont connuës, comme, par exemple, qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres : car le nombre des bases de chaque suite infinie est d'autant plus grand que les côtés d'une suite de Triangles, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, sont plus grands.

2.° On pourroit aussi en déduire qu'il y a différents ordres d'infiniment grands : car, puisque les bases sont infinies lorsque les côtés d'une suite de Triangles ne sont que finis, les suites des bases seront nécessairement infiniment infinies, lorsque

lorsque ces côtés seront infinis : or les côtés des Triangles inégaux deviennent infinis; car parmi les suites infinies, il ne sçauroit se rencontrer aucun Triangle isoscéle.

COROLLAIRE I. Dans l'Hyperbole chaque coupée prise sur l'asymptote est à son appliquée comme le sinus de la somme de deux angles est au sinus de la différence des mêmes angles sur la base de tout Triangle, dont la différence des quarrés des côtés est le quarré de la puissance de l'Hyperbole, & dont la base est égale à une coupée. VIII.

PRÉPARATION. Soient deux Triangles *ACB, FHG,* qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ensorte que l'angle *FHG* opposé à la base du second soit la différence des deux angles sur la base du premier Triangle *ACB;* des points *B* & *G* des deux lignes égales *BC* & *GH*, abbaissés les perpendiculaires *BV* & *GT,* à cause de l'angle extérieur *BCV* égal aux deux intérieures *A* & *B*. *BV* est le sinus de la somme des angles sur la base du Triangle *ACB,* & *GT* est le sinus de l'angle *FHG,* qui est l'angle de leur différence: or *(par Lemme 1.)* lorsque l'angle *FHG* est la différence des angles *A* & *B,* l'angle *A* est égal à l'angle *F;* d'où il suit que les Triangles rectangles *ABV, FGT,* sont semblables; par conséquent *AB* . *FG* : : *BV* . *GT,* ou, par ce qui précéde, la coupée de l'Hyperbole, prise sur les asymptotes, représentée par *AB,* est à l'ordonnée qui peut être représentée par *FG,* ce que le sinus *BV* est au sinus *GT. C. Q. F. D.* Fig. 1.

PROBLEME I.

Un point d'une Hyperbole entre ses asymptotes étant donné, trouver autant de Triangles inégaux que l'on voudra, dont les bases changeantes, prises deux à deux, sont les coupées & les appliquées de l'Hyperbole ; 2.° Décrire l'Hyperbole au moyen des Triangles qui ont les côtés inégaux. IX.

Soit le point donné *N;* par ce point tirés la ligne *NF* parallele à l'asymptote *AQ*. Prenés sur la ligne *AT,* perpendiculaire à l'asymptote *AP,* une ligne *AB* égale à la moitié de la différence de la coupée *AF* & de l'appliquée *FN;* par Fig. 4.

ce point *B*, à l'ouverture d'une ligne égale à la moitié de la ſomme de *AF* & de *FN*, décrivés un arc de Cercle qui coupera *AP* en un point *C*, par le point *C* tirés à la ligne *AT* tant de lignes *CB* que vous voudrés, les Triangles inégaux *ABC*, *ABC*, ſont ceux que l'on cherche. Pour trouver différents points de l'Hyperbole au moyen de ces Triangles, par les points *B* à l'ouverture des côtés *BA*, décrivés des arcs de Cercles qui couperont leurs hypothénuſes en *r*. Prenés ſur l'aſymptote *AP* une ligne *AG* égale à la ſomme des côtés *AB* & *BC* de l'un de ces Triangles rectangles *ABC*, & par le point *G* tirés une ligne *GH* parallele à l'aſymptote *AQ* & égale à la différence *Cr* des côtés *AB* & *BC*; je dis que le point *H* eſt un point de l'Hyperbole. Il faut démontrer que la ligne *AC* eſt moyenne proportionnelle entre *AF* & *NF*.

DÉMONSTRATION. $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$.

CONSTR. $\overline{BC}^2 = \frac{\overline{AF}^2 + 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$

Et $\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AF}^2 - 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$.

Par conſéquent $\overline{AC}^2 = \frac{4AF \times FN}{4} = AF \times FN$.

X. COROL. I. D'où il ſuit que la raiſon pour laquelle l'Hyperbole approche de plus en plus de ſon aſymptote ſans y toucher, eſt la même que celle pour laquelle une infinité de Cercles, qui ont un point *A* commun, approchent de plus en plus de la ligne droite, ou, ce qui eſt la même choſe, de leur tangente *AP*, ſans qu'aucun de ces Cercles puiſſent toucher à leur tangente *AP* en plus d'un point *A*.

XI. COROL. II. D'où il ſuit encore que la raiſon pour laquelle on peut faire paſſer entre un Cercle & ſa tangente une infinité d'autres Cercles ſans ſe toucher entr'eux, ni à leur tangente, qu'en un ſeul point, eſt la même que celle pour laquelle on peut faire paſſer entre une Hyperbole *GIK* & ſes aſymptotes *AQ* & *AP*, une infinité d'autres Hyperboles, comme par exemple, *LES*, ſans qu'elles puiſſent ſe toucher entr'elles ni à leurs aſymptotes.

Figure 7.

PROBLEME II.

Les deux côtés d'un Triangle étant donnés, trouver le lieu de toutes les bases changeantes d'une suite de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & décrire au moyen de ces bases l'Hyperbole par des points très-proches. XII. Fig. 4, 5, & 6.

Premiére Méthode.

Au milieu d'une ligne *BC* double du plus grand côté, élevés une perpendiculaire égale au plus petit côté *AI*, & par le point *A* à l'ouverture de la ligne *AI*, décrivés un quart de cercle qui rencontre la ligne *BC* en *K*; par le point *A* à l'ouverture du plus grand côté *AB* ou *AC*, décrivés deux arcs de cercle *BE*, *CD*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en *D* & en *E* la ligne *DE* parallelle à *CB*. L'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace *IGKBE* contient toutes les bases qui ont un angle obtus. Fig. 5.

Démonstration. Les bases ne sçauroient être en plus grand nombre que celui qui est exprimé par la hauteur du petit côté *AI*, c'est pourquoi si l'on conçoit une ligne *FGH* qui se meut parallelement à elle-même, en allant de *I* vers *A*, le nombre des lignes paralleles sera égal au nombre des bases de la suite des Triangles qui ont deux côtés égaux *AI*, *AB*, ou *AC*. Je dis de plus que toutes ces lignes paralleles sont les bases que l'on cherche : car, par construction, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux lignes *AB* & *AI*, & deux angles *AGF* & *AGH*, qui pris ensemble sont égaux à deux droits. Par conséquent (*par Théor. 1.*) *FG* est une coupée de l'Hyperbole, & *GH* une ordonnée : c'est pourquoi si on prend sur l'asymptote *AP* une ligne *AF* égale à *FG*, & que par le point *F* on tire une ligne *FN* parallele à l'asymptote *AQ*, & égale à *GH*, le point *N* (*Théor. 1.*) sera un point de l'Hyperbole.

Scholie. On doit par cette méthode décrire l'Hyperbole par des points aussi proches que l'on veut. Car l'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, XIII.

& l'eſpace *IKBE* contient toutes celles qui ont un angle obtus, on n'a qu'à les choiſir auſſi proches l'une de l'autre que l'on voudra. *C. Q. F. D.*

DEUXIÉME MÉTHODE, *un peu différente de la premiere.*

XIV. A l'ouverture du petit côté *AK*, décrivés un demi-cercle
Fig. 6. partagé en deux également au point *I*, à l'ouverture du plus grand côté *AB*; par le point *A* décrivés un arc de cercle juſqu'à ce qu'il rencontre en *D* la ligne *ID* parallele à *BC*.

On prouvera, comme dans le premier cas, en faiſant couler le long de *AI* une ligne *FG* parallelement à elle-même, que l'eſpace *CIDB* eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus, & l'eſpace *IKBD*, celui de toutes les baſes qui ont un angle obtus.

XV. SCHOLIE. Dans l'un & l'autre cas, quand même la ligne *FGH* ne ſeroit point parallele à la ligne *AB*, *FG*, ne laiſſeroit pas d'être une coupée de l'Hyperbole, & *GH* l'ordonnée qui lui répond. Car, dans ce cas, comme dans les deux précédents, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux deux côtés *AI* & *AB*, & deux angles qui, pris enſemble, ſont égaux à deux droits.

XVI. COROLL. I. Chaque ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, répond à une portion déterminée de l'Hyperbole, qui eſt le lieu de toutes les baſes changeantes de la ſuite.

XVII. COROLL. II. Le plus grand de deux côtés inégaux d'une ſuite infinie de Triangles, qui fait trouver toutes les coupées & toutes les ordonnées d'une portion déterminée de l'Hyperbole eſt égal à la moitié de la ſomme, & le moindre côté à la moitié de la différence de la plus grande coupée, & de la moindre ordonnée de la portion déterminée de l'Hyperbole.

DÉMONSTRATION. Par le Probleme 1er, les deux côtés de ce Triangle ſont trouver la plus grande coupée *AF*, & la moindre ordonnée *FN*.

La moindre coupée *AC*, & la plus grande ordonnée *CI*

égale à *AC*, & par le Probleme 2[d], ils ſont trouver toutes les ordonnées qui ſont moyennes entre *AC, AF, FN* & *CI*.

Coroll. III. D'où il ſuit que pour trouver, au moyen de l'Hyperbole, le lieu des baſes d'une ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés donnés, égaux chacun à chacun, il faut tirer deux lignes qui faſſent au point *A* un angle quelconque, prendre ſur la premiére une ligne *AF* égale à la ſomme, & ſur la ſeconde une ligne *AD* égale à la différence des côtés, & par les points *F* tirer les paralleles *FN, DN*, aux lignes *AQ, AF*, & décrire une Hyperbole qui paſſe par le point *N*. XVIII.

L'eſpace compris entre la puiſſance de l'Hyperbole *IC*, & entre l'ordonnée *NF*, eſt le lieu des baſes qui ont un angle obtus, & l'eſpace *MIND* eſt celui des baſes qui ont deux angles aigus.

Coroll. IV. La différence de l'eſpace qui eſt le lieu des baſes qui ont deux angles aigus d'avec celui qui eſt le lieu des baſes qui ont un angle obtus, conſidérée dans le cercle, eſt un demi-cercle; conſidérée dans l'Hyperbole, elle eſt zero abſolu. XIX.

La premiére partie de cette Propoſition eſt évidente par la ſeule inſpection de la Figure 6 : car, ſi de l'eſpace *CIDB*, qui contient toutes les baſes qui ont deux angles aigus, on ôte l'eſpace *IHKBD* qui contient toutes les baſes qui ont un angle obtus, il reſte le demi-cercle *CIHK*.

La ſeconde eſt auſſi évidente : car ſi, dans l'Hyperbole, on ôte des deux eſpaces *MDNI, ICFN*, dont le premier contient toutes les baſes qui ont deux angles aigus, & le ſecond toutes les baſes qui ont un angle obtus, l'eſpace mixtiligne *IZN*, il reſte de part & d'autre, les deux eſpaces rectilignes égaux *MDZI, ZCFN*.

Coroll. V. Les eſpaces qui ſont le lieu d'une même ſuite de baſes infinies ſont inégaux, conſidérés dans le Cercle & dans l'Hyperbole; car s'ils étoient égaux, on trouveroit la quadrature du cercle. Dans l'Hyperbole, la différence des deux rectangles rectilignes *MDZI, ZCFN*, ſeroit un eſpace rectiligne égal au demi-cercle *CIHK*. XX.

PROBLEME III.

Construire un Compas à tracer une Hyperbole.

XXI. Soit un compas $AKEG$ à trois branches, & à tête mobile, les deux branches AK & KE sont égales entre elles, & à une des lignes AB perpendiculaires à l'asymptote AP, la branche KG est plus grande que chacune des deux autres, & égale à l'hypothenuse BC; je dis que si la pointe A du Compas étant fixe en A, l'on fait couler le long d'une rainure les pointes E & G, ensorte que la pointe qui est en G chasse la branche GH parallele à AQ, pendant que la pointe qui est en E, chasse la branche EH parallele à la ligne AI, qui partage en deux également l'angle QAP des asymptotes, les deux lignes GH, EH, se couperont en un point H, qui sera un point de l'Hyperbole; par le point E tirés la ligne EV parallele à AQ & à GH.

Fig. 4.

DÉMONST. *(constr.)* l'angle $QAP = VEP$, *(hyp.)* l'angle $HEG = \frac{1}{2} QAP$ *(constr.)* donc l'angle $VEH = EHG = HEG$; partant le Triangle EGH est isoscéle, & le côté EG est égal au côté GH.

Soit $KG\ (a)$, $KE\ (b)$, $AC = c$, $AG = x$, $EG = y$; par le Théoreme 1, on aura $\overline{\overline{KG}^2 - \overline{KA}^2\ (\overline{AC}^2)} = AG \times EG = AG \times GH$, ou en termes algébriques $\overline{a^2 - b^2\ (c^2)} = xy$. *C. Q. F. D.*

XXII. SCHOLIE. La précédente Proposition peut servir à confirmer qu'il y a différents ordres d'angles infiniment petits; car lorsque les trois branches du Compas sont infinies, les lignes finies AG, EG, sont infiniment petites par rapport aux branches du Compas, par conséquent les angles AKG, AKE, EKG, sont infiniment petits; c'est pourquoi si l'on suppose que le Compas se soit mû jusqu'à ce que le point K ait infiniment approché de l'asymptote AP, il est évident que pendant ce mouvement les points E & G auront parcouru un espace infini, & que pendant cet espace infini,

l'angle *EKG* aura toûjours diminué, par conſéquent il ſera devenu infiniment plus petit qu'il n'étoit. *C. Q. F. D.*

COROL. Dans l'Hyperbole le lieu des baſes d'une ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, contient le même nombre de baſes égales chacune à chacune, qui répondent aux mêmes angles comme le lieu des baſes dans le Cercle. XXIII.

Je dis que l'eſpace *MDNI*, qui eſt le lieu des baſes qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de baſes qui répondent aux mêmes angles que l'eſpace *VOSE*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus dans les deux Cercles, dont l'un a pour rayon la moitié de la différence, & l'autre la moitié de la ſomme de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*. Figure 8.

Pareillement l'eſpace *ICFN*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont un angle obtus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de baſes qui répondent aux mêmes angles que l'eſpace *BRES*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont un angle obtus dans les mêmes Cercles.

Soit le Compas à trois branches *AKEG*, dont la plus grande branche *KG* eſt égale à la moitié de la ſomme, & les deux plus petites *AK* & *KE* à la moitié de la différence de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*.

Concevés qu'en même temps que la ligne *GH* décrit par un mouvement continu la portion déterminée de l'Hyperbole *ICFN*, la ligne *OKL* ſuit le point *K*, enſorte qu'elle ſe meut parallelement à l'aſymptote *AF*, & qu'elle entraîne avec elle les lignes égales *AO*, *AK*, & la ligne *AL* égale à *KG*, à cauſe que ces trois lignes ont leur point fixe en *A*. Lorſque le Compas à trois branches aura décrit la portion déterminée de l'Hyperbole, la ligne *OKL* aura tracé le demi-cercle *VBR* avec ſon anneau circulaire *BKRELS*; d'où il ſuit qu'à chaque ſécante *OL* répond dans l'Hyperbole une ligne *AG* ou *TH* dans l'eſpace *MDNI*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, & qu'à chaque *KL*, dans le Cercle, répond dans l'Hyperbole une

ligne *EG* ou *GH* dans l'eſpace *ICFN*, qui eſt le lieu des baſes qui ont un angle obtus, par conſéquent le nombre des baſes dans le Cercle & dans l'Hyperbole eſt le même, ce qui ſemble un véritable Paradoxe.

2.° Je dis que les baſes, dans le Cercle & dans l'Hyperbole, ſont égales chacune à chacune, & qu'elles répondent à des angles égaux.

Il faut démontrer que la longueur de chaque *OL*, priſe dans le Cercle, eſt égale à la longueur de chaque *AG* ou *TH*, priſe dans l'Hyperbole, & que la longueur de chaque *KL* eſt égale à la longueur de chaque *EG* ou *GH*, de plus que les lignes ſont adjacentes aux mêmes angles, tirés la ligne *KQ* parallele à l'axe *AB*.

Les Triangles iſoſcéles *OAK*, *AKE*, ont deux côtés égaux chacun à chacun ; de plus à cauſe des paralleles *PA* & *KQ*, l'angle du milieu *OAK* eſt égal à l'angle du milieu *AKE*, par conſéquent $OK = AE$. D'où il ſuit que $KL = EG = GH$, ce qui eſt évident, à cauſe des perpendiculaires égales *AP*, *KQ*, & des obliques égales *AK*, *KE*, *AL*, *KG*.

XXIV. COROLL. I. La moitié de la différence *AQ* de chaque coupée *AG*, d'avec ſon appliquée *GH* ou *EG*, eſt égale à l'ordonnée *PK* d'un Cercle, dont le rayon *AK* eſt égal à la moitié de la différence de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*; de plus le nombre des différences dans la portion déterminée de l'Hyperbole eſt égal au nombre des ordonnées dans le Cercle.

XXV. COROLL. II. La moitié de la ſomme de chaque coupée *AG* & de chaque appliquée *GH* eſt égale à l'ordonnée *PL* d'un Cercle qui a pour rayon une ligne *AL* égale à la moitié de la ſomme de la plus grande coupée *AF* & de la moindre appliquée *FN*; de plus le nombre de ces lignes, dans la portion déterminée de l'Hyperbole, eſt égal à celui des ordonnées compriſes entre la tangente *BS* & le rayon *AE*.

DÉMONSTRATION. $PK = \frac{AG - GH}{2} = \frac{AG - EG}{2}$;

ajoûtés

ajoûtés de part & d'autre les grandeurs EG & KL, on aura $PL = \frac{AG-EG}{2} + EG$, ou $PL = \frac{AG+EG}{2} = \frac{AG+GH}{2}$. *C. Q. F. D.*

Corol. III. Lorſque le Compas n'a que deux branches égales AK & KE, & que la branche KE pouſſe par ſon extrémité E la grandeur conſtante EG, & la ligne GH qui fait un angle quelconque ſur la ligne AP, la ligne KG devient une grandeur changeante, je dis que ſi pendant le mouvement du Compas on prend ſur GH les différentes valeurs de GK, la ligne qui paſſera par ces points ſera une Parabole. XXVI.

Soit $AK = KE = a$, $EG = b$, $AG = x$, $KG = y$, on aura *(Théor. 2.)* $\overline{KG}^2 = \overline{AK}^2 + AG \times EG$, ou, en termes algébriques, $y^2 = a^2 + bx$, qui eſt une équation à la parabole.

Corol. IV. Lorſque le point fixe eſt en G, & le point mobile en A, & que la branche KG eſt égale à la branche AK, alors EK devient une grandeur changeante. Si l'on ſuppoſe que la branche AK pouſſe la branche AQ, & que pendant le mouvement du Compas on prenne ſur AQ les différentes valeurs de EK, la courbe qui paſſera par ces points ſera encore une Parabole. XXVII.

Soit $AK = KG = a$, $EG = b$, $AE = x$, $KE = y$, à cauſe du Triangle iſoſcéle, AKG, $\overline{AK}^2 - AE \times EG = \overline{EK}^2$, ou, en termes algébriques, $a^2 - bx = y^2$.

Corol. V. Lorſque le Compas n'a que deux branches inégales AK, KE, & que le point D qui décrit la Courbe, tombe ſur une des branches inégales KE, alors le Compas décrit une Courbe du troiſiéme genre, qui eſt une double ellipſe; par les points K & D, tirés les perpendiculaires KG, DC, & par le point D la ligne DH parallele à la ligne AC. XXVIII. Fig. 9.

Soit $AK (a)$, $KE (b)$, $ED (d)$, $AF (x)$, $FD (y)$.

Soit $d . c :: FD (y) . DC (\frac{cy}{d})$, & $d . \sqrt{d^2 - c^2} :: FD (y) . FC = \frac{y\sqrt{d^2-c^2}}{d}$, à cauſe du Triangle rectangle DCE,

$CE = \sqrt{d^2 - \frac{c^2y^2}{d^2}} = \frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2y^2}$, à cauſe des Triangles ſemblables DEC, EKG.

$DE\ (d) . CE\ (\frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2y^2}) :: KD\ (\overline{b-d}) . HD$, ou $GC = \frac{b-d}{d^2} \times \sqrt{d^4 - c^2y^2}$,

& $DE\ (d) . DC\ (\frac{cy}{d}) :: KE\ (b) . KG = \frac{bcy}{d^2}$.

Partant $GF = \frac{b-d}{d^2}\sqrt{d^4 - c^2y^2} - \frac{y\sqrt{d^2-c^2}}{d}$,

ou $GF = \frac{\overline{b-d}\sqrt{d^4-c^2y^2} - dy\sqrt{d^2-c^2}}{d^2}$.

Or $AG = \sqrt{\overline{AK}^2 - \overline{KG}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2c^2y^2}{d^4}}$
$= \frac{1}{d^2}\sqrt{d^4a^2 - b^2c^2y^2}$: d'où l'on tire une ſeconde valeur de $GF = x - \frac{1}{d^2}\sqrt{d^4a^2 - b^2c^2y^2} = \frac{d^2x - \sqrt{d^4a^2 - b^2c^2y^2}}{d^2}$.

Donc $\overline{b-d}\sqrt{d^4 - c^2y^2} - dy\sqrt{d^2 - c^2} = d^2x - \sqrt{d^4a^2 - b^2c^2y^2}$; pour abbréger, lorſque $d = c$, l'équation devient

$\overline{b-d} \times d\sqrt{d^2 - y^2} = d^2x - d\sqrt{d^2a^2 - b^2y^2}$,

ou $\overline{b-d}\sqrt{d^2 - y^2} = dx - \sqrt{d^2a^2 - b^2y^2}$.

Faiſant évanoüir les incommenſurables, l'équation devient

$$\left.\begin{array}{lll} 2\overline{b-d}^2y^4 & +4b^2x^2y^2 & +d^2x^4 \\ & -2d\times\overline{b-d}\,x^2y^2 & -2d^2a^2x^2 \\ & -2da^2\times 2\overline{b-d}\,y^2 & -2d^2\overline{b-d}^2x^2 \\ & +2d\times\overline{b-d}^2\times 2\overline{b-d}\,y^2 & +d^2a^4 \\ & & -2d^2a^2\overline{b-d}^2 \\ & & +d^2\overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Lorſque $y = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} x^4 & -2\overline{b-d}^2x^2 & +a^4 \\ & -2a^2 & -2a^2\times\overline{b-d}^2 \\ & & +\overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$ Partant

$$x^2 = a^2 + \overline{b-d}^2 \pm \sqrt{4a^2\,\overline{b-d}^2}$$

ou $x^2 = a^2 \pm 2a \times \overline{b-d} + \overline{b-d}^2.$

$$x = a \pm \overline{b-d} \qquad -x = -a \mp \overline{b-d}.$$

Lorſque $x = 0$,

$$\left.\begin{array}{lll} 2\overline{b-d}^2 y^4 & -2da^2 \times 2\overline{b-d}\,y^2 & +d^2a^4 \\ & +2d \times \overline{b-d}^2 \times 2\overline{b-d}\,y^2 & -2d^2a^2\overline{b-d}^2 \\ & & +d^2\overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

qui eſt un quarré parfait, partant $y^2 = \frac{da^2 - d\overline{b-d}^2}{2\overline{b-d}}$,

$$y = \pm\sqrt{\frac{da^2 - d\overline{b-d}^2}{2\overline{b-d}}}.$$

Lorſque $\overline{b-d}$ eſt égal à a, la valeur de y eſt zero abſolu au point où x eſt zero. Par conſéquent les deux doubles ellipſes oppoſées ſe touchent à l'origine.

Lorſque a eſt plus grand que $b-d$, il y a deux valeurs de y à l'origine. Par conſéquent dans ce cas, les deux doubles ellipſes ſe coupent en croix.

Lorſque $b-d$ eſt plus grand que a, la valeur de y à l'origine des x eſt imaginaire. Par conſéquent dans ce cas, les deux doubles ellipſes ne ſe touchent, ni ne ſe coupent point, mais elles ſont ſéparées l'une de l'autre d'un intervalle qui eſt plus ou moins grand, ſelon la quantité dont $b-d$ ſurpaſſe a.

Lorſque a eſt égal à b, les deux doubles ellipſes oppoſées ſe confondent & ſe changent en une ſimple ellipſe, dont l'Equation eſt $\frac{d^2x^2}{\overline{2a-d}^2} = d^2 - y^2$.

On donnera la ſuite dans un autre Mémoire, où on rendra raiſon de ce qui ſemble dans celui-ci un Paradoxe.



MÉMOIRE SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX.

Par M. DU FAY.

15 Novemb. 1730.

LA découverte de la plus grande partie des Phoſphores que nous connoiſſons, eſt dûë au haſard; peu touchés de l'utilité qui pouvoit en réſulter, & encore moins inſtruits des routes qu'il falloit tenir, les Chimiſtes ont de tout temps aſſés négligé la recherche des Phoſphores. Je n'entrerai point dans le détail de tous ceux qui ſont connus, & dont la plûpart n'ont aucun rapport avec ceux dont j'entreprends de parler, & je ne m'arrèterai qu'à celui qui a fait tant de bruit, ſous le nom de *Pierre de Boulogne.* Tout le monde ſçait qu'un Artiſan, moins occupé de ſon mêtier que du deſir de faire en Chimie quelque découverte utile, s'aviſa de calciner cette Pierre, eſpérant que ce pourroit être une Mine d'Argent, & trouva qu'elle avoit cette propriété ſinguliére, & alors crûe unique, d'être lumineuſe dans l'obſcurité, après avoir été expoſée pendant quelques moments au jour dans l'air libre. Cette découverte fut extrêmement célébrée, pluſieurs perſonnes écrivirent ſur ce ſujet, & entrerent dans un grand détail ſur la nature de cette Pierre, les lieux où elle ſe trouve, ſes différentes préparations, ſes propriétés, &c. Poterius, Licetus, Celius, Mentzelius, & pluſieurs autres en firent une Hiſtoire fort ample, & juſqu'alors on n'avoit entendu parler d'aucune autre matiére qui eût la même propriété. Enfin Balduinus, Chimiſte Allemand, donna dans les Ephémerides d'Allemagne, un Traité intitulé *Aurum auræ,* à la fin duquel il y a une Section qui a pour titre, *Phoſphorus hermeticus,* dans laquelle il décrit la préparation & les effets d'un

In App. ad annum 4 & 5, natur. curioſ. p. 171.

Phoſphore qui paroît avoir infiniment de rapport avec la Pierre de Boulogne, mais tout cet ouvrage eſt écrit ſi énigmatiquement, & en des termes ſi obſcurs, que j'avoüe qu'il m'a été impoſſible d'y rien entendre. Mentzelius, dont l'ouvrage eſt poſtérieur à celui de Balduinus, compare d'une maniére fort détaillée, la Pierre de Boulogne avec ce nouveau Phoſphore, mais ſans l'avoir vû, & ſimplement ſur les effets qui ſont rapportés dans le Traité de Balduinus.

Kunkel, Boyle, M. Lémery, Theichmeyer en dernier lieu, ont donné ſous le nom de *Phoſphore hermetique de Balduinus,* un procédé qui réüſſit parfaitement, & qu'on peut croire en effet être le même que celui de Balduinus, puiſqu'il en a réellement toutes les propriétés, quoiqu'à dire le vrai, on ne trouve rien dans la compoſition de ce dernier qui ait aucun rapport avec le premier, celui-ci étant une diſſolution de Craye par l'Eau forte évaporée & calcinée, au lieu que celui de Balduinus eſt la Tête-morte d'un Alkaeſt, dont la préparation eſt décrite en termes ſi pompeux & ſi obſcurs, qu'on n'en peut faire aucun uſage. Quoi-qu'il en ſoit, celui qu'on trouve dans ces Auteurs a beaucoup de conformité pour ſes effets avec la Pierre de Boulogne, & c'eſt, à ce que je crois, la ſeule préparation connuë qui ait cette propriété; on n'a même trouvé juſqu'à preſent dans les Minéraux, ni dans les autres matiéres ſimples, que la ſeule Pierre de Boulogne qui ait cette vertu ſinguliére de s'abbreuver, pour ainſi dire, des rayons de lumiére, & de les conſerver aſſés longtemps, pour paroître lumineuſe dans l'obſcurité pendant quelques minutes.

Le P. Kirker dit en avoir trouvé de pareilles, & qui avoient les mêmes propriétés auprès d'une Mine d'Alun à Tolfa. Mentzelius décrit cinq eſpeces de cette Pierre, qui ſe trouvent toutes aux environs de Boulogne, & dont quelques-unes ont des différences conſidérables. Il ſemble que cela devoit naturellement faire ſoupçonner qu'il ſe pouvoit rencontrer ailleurs des Pierres ſemblables, ou d'autres qui euſſent les mêmes avantages; il faut cependant que perſonne

De Arte magn. p. 581.

Sect. 2. cap. 5.

ne s'en soit avisé, & il semble qu'on se soit refusé aux découvertes qui s'offroient d'elles-mêmes dans une infinite d'opérations. Plus les expériences sont simples, plus elles tardent souvent à être découvertes ; on va être étonné sans doute de ce qu'une chose aussi commune, & qui demande aussi peu d'appareil, a pû demeurer si long-temps sans être connuë.

Il y a quelques années que je formai le dessein d'examiner, par les différents moyens que je pûs imaginer, la nature de toutes les Pierres fines. Parmi les épreuves que j'en faisois, celle de les calciner étoit une des principales. Comme je tâchois de n'obmettre aucune des Pierres qui peuvent être rangées dans la classe des Pierres fines, j'examinai aussi celles qui n'y sont que parce qu'il n'étoit pas trop aisé de les placer ailleurs; la Topaze commune est de ce nombre : comme il y en a de plusieurs sortes, il est bon d'avertir que celle dont je parle, n'est quasi connuë qu'en Médecine, on l'employe dans les préparations où il doit entrer des Topazes; c'est une Pierre très tendre, jauneâtre, pesante, talqueuse, & qui, lorsque j'en voulus faire la description, me rappella sur le champ l'idée de la Pierre de Boulogne, dont elle ne differe que par la forme extérieure, celle-ci étant ordinairement un peu arrondie & raboteuse, au lieu que la Topaze affecte le plus souvent la forme cubique, ou du moins est presque toûjours terminée par des surfaces paralleles. Sans en faire de comparaison plus détaillée, je calcinai cette Topaze dans un creuset, comme les autres Pierres, & lorsqu'elle fut refroidie, je trouvai qu'elle avoit une forte odeur de Soufre semblable à celle de la Pierre de Boulogne calcinée, je ne doutai plus qu'elle ne fût lumineuse ; je l'exposai à la lumiére du jour, & la portai ensuite dans l'obscurité, & je la trouvai semblable aux meilleures Pierres de Boulogne. Je comparai ensuite avec plus de soin cette Pierre, avec un assés grand nombre de celles que j'avois rapportées de Boulogne, il y a quelques années, & je trouvai que c'étoit en effet la même nature de Pierre, ensorte qu'il y en avoit quelques-unes d'entiérement semblables; ma surprise changea d'objet, & je ne

fus plus étonné que de ne m'en être pas avisé plûtôt.

J'avois soupçonné autrefois que la Bélemnite, ou Pierre de Lynx, pouvoit avoir quelque rapport avec la Pierre de Boulogne, à cause de sa disposition en rayons, je l'essayai sur le champ, elle se réduisit presque en poudre par la calcination, & n'avoit, étant refroidie, aucune odeur de Soufre, cela me parut d'un mauvais augure, mais ma conjecture se trouva très-fausse, car la Bélemnite me donna une belle lumiére, & même un peu plus vive que la Topaze; je ne songeai plus alors qu'à pousser plus loin ma découverte, & à essayer toutes les Pierres qui me vinrent dans l'idée.

Je ferois un volume entier, si je voulois rapporter toutes les expériences que je fis, & les différentes maniéres dont elles me réüssirent; mais, pour éviter un détail ennuyeux, je dirai simplement que j'essayai toutes les especes de Gyps, ou Pierres à plâtre, que je pûs recouvrer, & toûjours avec succès; toutes me donnerent de la lumiére, presque toutes avoient une odeur sulphureuse, mais quelques-unes étoient plus lumineuses que les autres, les Albâtres, & le Gyps de Montmartre, appellé improprement *Talc,* étoient de ce nombre.

Ayant épuisé les Gyps, je passai aux Pierres à chaux, & aux Marbres, qui sont pour la plûpart de même nature, tout se trouva Phosphore, tout me donna de la lumiére, il est vrai qu'elle étoit moins vive dans ces derniéres Pierres que dans les Gyps, & qu'il falloit un degré de feu beaucoup plus violent pour les calciner; souvent après la premiére, & même la seconde calcination, ces Pierres ne donnoient aucune lumiére, mais en les calcinant de nouveau, elles devenoient lumineuses, ensorte qu'il n'y en a aucune, de celles qui se peuvent réduire en Chaux, qui ne m'ait donné de la lumiére, lorsque je me suis obstiné à la calciner.

Les matiéres terreuses, telles que la Marne, les Bols, la Craye, les Moilons, les Pierres de Taille & de Liais, n'ont point donné de la lumiére par la calcination, quelque violente qu'elle ait été. Je résolus donc de tenter une autre voye, &

la facilité qu'elles ont presque toutes à se dissoudre dans les Esprits acides, me fit juger que j'en devois attendre le même effet que de la Craye dans le Phosphore de Balduinus; j'en essayai plusieurs qui me réüssirent très-bien, & il est vraisemblable que toutes celles qui se peuvent dissoudre dans l'Eau forte, deviendront lumineuses en suivant le même procédé.

Les Pierres à chaux, les Marbres, les Gyps, les Albâtres, la Bélemnite, les Coquilles pétrifiées tendres, & généralement toutes les Pierres qui se peuvent dissoudre par les acides, quoique lumineuses par la seule calcination, le sont aussi par le procédé de Balduinus. Enfin, à la réserve des Pierres dures ou impénétrables aux acides, comme les Agathes, les Jaspes, le Caillou, le Porphyre, le Grais, le Sablon, le Cristal de Roche, le Cristal d'Islande, le Sable de Riviére, la Pierre de Lar, la Pierre de la Croix, l'Ardoise, le Talc, les Pierres précieuses dont aucune ne m'a réüssi, il n'y en a peut-être point qui ne soit lumineuse, soit par la simple calcination, soit par la préparation que nous avons rapportée, ou même des deux maniéres.

Je ne crois pas cependant les Pierres dures, dont je viens de parler, absolument intraitables, & j'espere parvenir à les rendre lumineuses comme les autres, par un procedé que je n'ai point encore eû le temps de finir. Peut-être les Métaux mêmes ne sont-ils pas exempts d'une propriété commune à tout ce qui est renfermé dans les entrailles de la Terre, mais je réserve ce travail pour un autre temps.

Le Phosphore de Balduinus ne doit être regardé que comme faisant partie de la classe générale des matiéres qui deviennent lumineuses par la dissolution : Voici la maniére de les préparer toutes, qui m'a paru la plus simple. On fait dissoudre dans l'Eau forte, ou l'Esprit de Nitre, quelqu'une des Terres, Pierres, ou Crayes, dont nous venons de parler, & pour cela, on les pulvérise, & on les jette petit à petit dans l'Eau forte, afin que l'ébullition ne soit point trop violente, ce que l'on continuë jusqu'à ce qu'il ne se fasse plus

de

de fermentation. On verse la dissolution par inclination, & on la fait évaporer jusqu'à siccité dans un vaisseau de terre, ou de grès ; on prend un peu de cette matiére séche, on la met dans un Creuset, dont elle ne remplisse que la moitié, & sans le couvrir, on le place entre les charbons ardents; la matiére se fond, & après avoir boüillonné pendant quelque temps, elle se desséche, sans qu'il soit besoin de faire un plus grand feu que celui qu'il faut pour fondre du plomb; on laisse refroidir le Creuset, & l'ayant exposé à la lumiére, on le porte dans l'obscurité : il est inutile de dire ici que pour bien voir l'effet de tous ces Phosphores, il faut avoir tenu pendant quelque temps les yeux fermés; tout le monde en sçait les raisons, & il les faut observer exactement dans ces expériences, pour les voir dans toute leur beauté.

Entre les Pierres qui deviennent lumineuses par la dissolution, la Pierre de Taille m'a paru faire le plus bel effet, & la Bélemnite, qui par la simple calcination est une des plus lumineuses, m'a semblé la moins brillante par la dissolution; je n'entrerai point dans l'examen des autres, parce que ce détail n'auroit point de bornes. Il ne seroit pas non plus possible d'examiner en particulier toutes celles qui deviennent lumineuses par la seule calcination, il suffit de s'arrêter à celles qui font le plus bel effet, telles que sont la Bélemnite, la Topaze, la Pierre de Boulogne & le Gyps talqueux. Voici la maniére de les préparer toutes, qui est très-simple, & qui m'a parfaitement réüssi.

Je prends une, ou plusieurs de ces Pierres entiéres, ou pulvérisées, je les mets dans un Creuset que je couvre & que je place dans une Forge, je l'entoure de charbons, & je le chauffe à peu près comme si je voulois fondre de l'Argent; je le laisse en cet état environ une demi-heure, ou trois quarts d'heure, & ayant laissé refroidir le Creuset, ma Pierre se trouve lumineuse. La Pierre de Boulogne ne demande pas plus de préparation que les autres, & quoique le procedé de Cellius*, rapporté par M. Homberg, soit parfaitement bon, celui-ci réüssit également bien, & demande moins d'appareil.

* *Il Fosforo, ò vero la Pietra Bolognese preporata per far rilucere fra l'ombre.*

Si la Pierre n'eſt point lumineuſe, ou qu'elle ne le ſoit que foiblement, on la calcine une ſeconde, ou même une troiſiéme fois, & elle le devient.

Pour en voir l'effet, je les expoſe ordinairement pendant une minute au grand jour, & elles s'impregnent d'une lumiére, dont la vivacité & la durée ſont inégales; celle de la Topaze eſt fort vive & dure peu, mais j'ai ſouvent vû la Bélemnite la conſerver plus d'une heure. Toutes ces Pierres, de même que celle de Boulogne, deviennent lumineuſes étant expoſées au jour à travers l'eau, le verre, & tous les corps tranſparents; elles le deviennent auſſi, mais très-foiblement, au clair de Lune, à la lumiére d'un flambeau, ou d'une bougie, & même pendant le crépuſcule, enſorte qu'en Eté j'en ai vû prendre de la lumiére une heure entiére après le coucher du Soleil. Pluſieurs Auteurs ne conviennent pas de quelques-unes de ces expériences à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais cela vient ſans doute de ce qu'ils ſe ſont ſervi de Pierres qui avoient peu de vertu, car le fait eſt certain, & je l'ai éprouvé plus d'une fois. En général la lumiére eſt par-tout la même, elle ne differe que par le plus ou le moins de vivacité; ainſi quelque cauſe qui la produiſe, on en doit toûjours attendre le même effet. M. Lémery a remarqué que la Pierre de Boulogne ne prenoit pas tant de lumiére étant expoſée au Soleil que dans l'ombre, ſoit que la matiére de la lumiére, pouſſée avec trop d'impétuoſité, ſoit réfléchie en plus grande quantité par la Pierre, ſoit que le Soleil enleve promptement les parties les plus propres à conſerver le mouvement; quoiqu'il en ſoit, j'ai fait la même obſervation ſur la pluſpart des matiéres dont j'ai parlé dans ce Mémoire. Il eſt auſſi à remarquer que l'effet de ces Pierres eſt moins beau, & que quelques-unes n'en font aucun, lorſqu'elles viennent d'être calcinées, & qu'elles ſont encore chaudes, qu'étant refroidies; il m'a auſſi paru qu'elles faiſoient encore mieux le lendemain que le jour même de leur calcination.

Je dois ajoûter ici que, n'ayant pas toûjours calciné chacune de ces Pierres ſéparément, mais en ayant mis quelque-

fois plusieurs ensemble, j'ai remarqué que rien ne faisoit mieux que la Topaze calcinée dans le même creuset avec de la Bélemnite concassée ou pulvérisée ; & qu'en général celles qui demeurent entiéres dans la calcination, font mieux, lorsqu'on les entoure de poudre de la même pierre, ou de quelqu'autre; M. Homberg l'avoit remarqué à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais sans cela la Pierre ne laisse pas d'être lumineuse, & cette circonstance ne sert qu'à rendre sa lumiére plus vive.

J'ai tâché, par tous les moyens que j'ai crû pratiquables, de fixer le degré de feu le plus convenable pour ces sortes de calcinations, mais je n'ai pû y parvenir, & quand je l'aurois fait, on n'en auroit tiré aucune utilité, parce qu'il est presque impossible de ne pas réüssir dans toutes ces opérations ; j'ai poussé le feu sur la Topaze, la Bélemnite & la Pierre de Boulogne jusqu'à vitrifier tout l'intérieur du creuset, elles ont toûjours été lumineuses, elles m'ont cependant paru l'être un peu moins que lorsqu'elles étoient calcinées plus modérément; il résulte de-là qu'on ne peut manquer qu'en ne donnant pas le feu assés fort, auquel cas il faut recommencer, & on est assûré de réüssir. En général, les Gyps & Albâtres demandent le moins de feu, les Marbres & les Pierres à Chaux en demandent le plus, & il faut le degré moyen à la Bélemnite, la Topaze & la Pierre de Boulogne.

Je vais rapporter maintenant quelques observations sur plusieurs de ces Phosphores, qui méritent d'être remarquées. Nous avons déja observé que toutes ces matiéres ne rendent pas une lumiére égale, il se trouve encore beaucoup d'autres variétés dans leurs effets. Celles qui deviennent lumineuses par dissolution, donnent une lumiére rougeâtre, & semblable à un charbon de feu, mais cette propriété ne leur dure guéres plus d'un mois; la lumiére des Pierres à Chaux & des Marbres est blanche, & assés vive dans les commencements, mais leur vertu n'est pas non plus de longue durée, & je n'en ai point vû qui l'eût conservée deux mois après sa calcination. Les Albâtres & les Gyps sont, à peu près, dans le même cas, excepté celui de Montmartre que j'ai conservé

lumineux pendant plus de ſix mois, mais ſa vivacité alloit toûjours en diminuant. Je ne puis encore aſſigner aucun terme à la durée de la propriété des autres Pierres, n'ayant pas même remarqué de diminution ſenſible dans la plûpart, quoique j'en aye de calcinées depuis huit mois, & qu'elles ayent été expoſées toutes très-ſouvent à la lumiére, ce qui paroît leur devoir faire le plus de tort.

J'ai voulu voir l'effet que feroient ces différents Phoſphores dans l'eau, & il n'y en a aucun de ceux que j'ai eſſayés qui y ait entiérement perdu ſa lumiére. Les Marbres & les Pierres à Chaux étant nouvellement calcinés, y font un effet ſingulier. Lorſqu'on leur a fait prendre de la lumiére, en les expoſant à l'air, ſi on les porte dans l'obſcurité, & qu'on les plonge ſubitement dans l'eau, leur lumiére augmente tout à coup, à meſure qu'elles ſe diſſolvent & s'échauffent, & un moment après elle s'évanoüit preſque entiérement; l'eſpece de pâte liquide, en laquelle ſe réduiſent alors ces Pierres, demeure cependant encore un peu lumineuſe, & même reprend de la lumiére, quoique noyée d'eau, ſi on l'expoſe de nouveau au jour; il eſt vrai que cette propriété lui dure très peu, & qu'au bout de 24 heures, elle n'en avoit plus aucune. Les mêmes Pierres éteintes à l'air pendant huit jours, prennent encore de la lumiére, & ne font plus le même effet étant plongées dans l'eau, elles y conſervent leur lumiére ſans cette augmentation ſubite, mais ſans diminution ſenſible, & cependant elles perdent leur vertu en peu de temps; les Gyps & Albâtres plongés dans l'eau font le même effet que la Chaux éteinte à l'air, toutes les autres Pierres n'y ſouffrent aucun changement, l'eau ſe charge ſeulement de la poudre la plus ſubtile, & paroît d'une lumiére blancheâtre ou laiteuſe, les particules plus groſſes demeurent au fond de la liqueur, & ſont plus lumineuſes que le reſte. L'Eſprit de Vin & l'Huile ne font pas plus d'effet que l'eau, & j'ai conſervé pendant pluſieurs jours des morceaux de ces Phoſphores dans chacune de ces liqueurs, ils ont fait leur effet à l'ordinaire, mais ils ont perdu leur propriété plûtôt qu'ils n'auroient fait étant conſervés ſéchement.

L'Eau forte & les autres Esprits acides n'éteignent pas la lumiére de la Topaze, ni de la Pierre de Boulogne; l'ayant même perduë au bout de quelques minutes, comme elles auroient fait dans l'expérience ordinaire, elles la reprennent à travers la liqueur dans laquelle elles ne se dissolvent point, quelque temps qu'elles y demeurent, & j'en ai conservé pendant très long-temps sans qu'il leur soit arrivé plus de changement que dans l'eau commune. M. le Comte de Marsilly dit que la Pierre de Boulogne fermente dans l'Eau forte, je l'ai examiné avec soin, & il m'a paru que lorsqu'elle étoit bien nette, & dégagée de toute matiére terreuse, elle ne fermentoit, ni ne se dissolvoit point dans les Acides. Le Phosphore de Balduinus, & tous ceux qui se font par dissolution, ne s'éteignent pas non plus dans les Acides, mais ils s'y dissolvent de nouveau, lentement, & sans ébullition, & ils ne cessent de faire leur effet que lorsqu'ils sont entiérement dissouts. La Bélemnite s'éteint dans l'Eau forte, & fait lorsqu'on l'y jette, un bruit semblable à un fer rouge qu'on plonge dans l'eau, sa lumiére augmente dans l'instant, & se perd un moment après. Le Gyps fait à peu près le même effet, horsmis qu'il ne fait pas ce bruit dont je viens de parler, mais il s'y dissout avec ébullition, & perd sa lumiére; il faut entendre la même chose des Albâtres & des Sélénites : toutes ces Pierres exhalent une forte odeur de Soufre, en les plongeant dans l'Eau forte, ce que ne font point celles qui n'y perdent pas leur lumiére sur le champ.

Aucune de ces matiéres ne m'a paru faire d'effet sensible dans les dissolutions de Sels alkalis, elles n'y font que comme dans l'eau commune, c'est-à-dire, qu'elles y conservent leur lumiére.

Il y a encore un grand nombre d'expériences à faire sur ce sujet, & elles peuvent être variées à l'infini, par le nombre prodigieux de ces sortes de Phosphores, car le champ est encore infiniment plus vaste qu'il ne l'a paru par ce Mémoire, dans lequel nous n'avons parlé que des seuls Minéraux, & il ne faut pas croire que le regne des Végétaux & celui

des Animaux ne nous fourniſſe pas un auſſi grand nombre de pareils Phoſphores. Dans une matiére auſſi étenduë, il ne m'a été poſſible d'en eſſayer qu'un petit nombre, mais tous ceux que j'ai eſſayés m'ont réüſſi. L'Yvoire, les Os d'Animaux, les Ecailles d'Huîtres, les Coquilles d'Oeufs & les autres matiéres ſemblables, étant brûlées ſimplement dans le feu, ou dans un Creuſet, deviennent lumineuſes, & quelques-unes conſervent leur lumiére aſſés long-temps. Les Bois, les Fruits, les Herbes, & tout ce qui peut être réduit en cendres, donne auſſi de la lumiére, il ne faut que diſſoudre ces cendres dans l'Eau forte, & procéder comme dans la préparation de Balduinus, l'effet en eſt le même. Enfin il eſt à croire qu'il ne ſe trouvera plus rien ſur la Terre qui ne mérite le nom de Phoſphore à auſſi juſte titre que la Pierre de Boulogne. Dans quel étonnement ne ſeroient point ceux qui ont fait des volumes entiers pour faire l'éloge des propriétés merveilleuſes de cette Pierre, s'ils voyoient aujourd'hui qu'il eſt preſque impoſſible de trouver quelque matiére dans le monde qui n'ait pas les mêmes avantages! Et ce ſera un phénoméne très-ſingulier, qu'une matiére qu'on ne pourra rendre lumineuſe, ni par calcination, ni par diſſolution.

Je ne crois pas cependant que les obſervations les plus importantes qu'il y ait à faire, roulent ſur les particularités de ces différentes matiéres, elles doivent avoir pour objet tous ces Phoſphores en général. Nous ſçavons que ces Chaux s'impregnent avec beaucoup de facilité de la ſubſtance de la lumiére, qu'elles la conſervent quelque temps, & la perdent enfin ; mais nous ne ſçavons pas trop bien comment la plûpart des matiéres acquiérent cette propriété par la ſeule calcination, pourquoi d'autres ont beſoin de l'addition des Sels acides, ce qui fait perdre à quelques-unes cette propriété en peu de jours ſi elles demeurent expoſées à l'air, comment elles la recouvrent par une nouvelle calcination, enſorte que leur lumiére devient auſſi belle que la premiére fois, comme je l'ai éprouvé ; il faudroit peut-être bien des années & bien des calcinations répétées pour épuiſer cette propriété, &

peut-être n'y parviendroit-on pas. La lumiére qu'elles prennent n'est pas toûjours la même, elle est souvent blanche, d'autres fois rouge, quelquefois bleüe. La cause de ces différences n'est point encore connüe ; la couleur du feu pendant la calcination, celle des rayons qu'on fait tomber sur la Pierre par le moyen du prisme, en l'exposant au jour, les milieux par lesquels passent ces rayons, les corps qui les réfléchissent, la quantité ou la vivacité de la lumiére, la durée du temps qu'elle y demeure exposée, toutes ces circonstances causent des variétés considérables, & méritent d'être observées avec grand soin ; peut-être une connoissance beaucoup plus exacte de la nature de la lumiére sera-t-elle le fruit de cet examen. Jusqu'à présent la rareté de la Pierre de Boulogne a rendu ces recherches très-difficiles ; présentement tout en peut tenir lieu, & plus il y a de différentes matiéres qui produisent les mêmes effets, plus on aura de facilité ; nous trouverons dans l'une très-aisément ce qui nous eût échappé dans l'autre ; enfin il est à croire que cela nous menera à de nouvelles connoissances qui pourront avoir leur utilité. J'ai déja fait plusieurs expériences dans les vûës que je viens d'indiquer : mais outre qu'il en reste encore un bien plus grand nombre à essayer, je ne les ai point faites avec assés de précision pour y pouvoir compter ; je pourrai cependant les donner dans une autre occasion, mais je souhaiterois que d'autres personnes voulussent prendre la peine d'y travailler aussi de leur côté, & j'ose assûrer que le champ est assés vaste pour occuper plusieurs Physiciens, & pour fournir un grand nombre de nouvelles découvertes & d'observations des plus curieuses & des plus singuliéres.



RÉFLÉXIONS SUR LE MOUVEMENT DES EAUX.

Par M. PITOT.

16 Décemb. 1730.

I. LES avantages qu'on tire du mouvement des Eaux sont connus de tout le monde. Comme cette partie des Mathématiques est une des plus utiles, elle a fait l'objet des recherches de plusieurs habiles Mathématiciens. Heron, Majottus, Guglielmini, Castelli, Borelli, Toricelli, & sur-tout M.rs Mariotte & Varignon, ont porté cette science à un point de perfection, qu'il semble qu'on n'a plus rien laissé à desirer. Nous avons crû cependant que les réfléxions suivantes pourroient avoir leur utilité, principalement pour le Calcul des Machines mûes par des chûtes & courants d'Eau, dont nous avons traité dans les Mémoires de l'Académie des années 1725, 1727 & 1729. Ce que nous disons ici peut être regardé comme une suite de ce que nous avons donné dans ces différents Mémoires.

II. Comme la science du mouvement des Eaux est une de celles qu'on peut appeller *Physico-Mathématique*, on a commencé par des expériences, pour connoître, à peu-près, les loix de leurs équilibres, de leurs vîtesses, par rapport à la hauteur des Réservoirs, du temps de leurs écoulements, de la force de leurs impulsions, &c. & l'on a donné ensuite des démonstrations géométriques de presque tout ce que les expériences n'avoient fait qu'indiquer. Un seul principe qui sert de base & de fondement à presque toute cette théorie, ne paroissoit pas susceptible de démonstration géométrique, mais M. Varignon l'a démontré dans les Mémoires de 1703. Voici ce principe : *Les vîtesses de l'Eau, à la sortie des ouvertures faites au bas des Réservoirs ou des Tuyaux de conduite, sont*

sont entr'elles comme les racines des hauteurs de l'Eau au dessus des ouvertures.

III. Par ce principe on peut trouver ou connoître quelle doit être la hauteur du Réservoir, ou la longueur du Tuyau, pour que la vîtesse uniforme avec laquelle l'Eau coulera & sortira du Tuyau, soit égale à une vîtesse donnée, & réciproquement la hauteur du Tuyau étant donnée, on trouvera la vîtesse. Mais puisque les dépenses d'un même Tuyau sont proportionnelles aux vîtesses de l'Eau, on connoîtra par-là les dépenses des Tuyaux suivant leurs différentes longueurs & grosseurs, & réciproquement. Voici en deux mots comment on peut faire ces calculs, & la regle qu'on doit suivre; il est vrai que M. de la Hire a parlé de cette regle dans les Mémoires de 1702, mais nous avons besoin de la rappeller ici.

IV. On a trouvé, par expérience, qu'un corps en tombant dans l'air libre, parcourt un espace de 14 pieds dans la premiére seconde de sa chûte, & l'on sçait que si ce corps continuoit à se mouvoir avec toute la vîtesse acquise par sa chûte de 14 pieds, il parcourroit 28 pieds par seconde d'un mouvement uniforme. Voilà donc un rapport constant, c'est-à-dire, que nommant x la hauteur de la chûte d'un corps, ou de l'Eau d'un Réservoir, & u la vîtesse uniforme que ce corps doit acquérir en tombant de la hauteur x, on aura, par le principe, $\sqrt{14} . 28 :: \sqrt{x} . u$, & $28\sqrt{x} = u\sqrt{14}$, qu'on réduit à $56x = uu$. Par cette égalité ou formule on fera tous les calculs entre les hauteurs des Réservoirs & les vîtesses des Eaux : car on voit, 1.° Que si la hauteur x est connüe ou donnée, pour trouver la vîtesse u on multipliera la hauteur ou la valeur de x par 56, & la racine quarrée sera la valeur de u, ou de la vîtesse uniforme acquise par la chûte de la hauteur x. 2.° Mais si la vîtesse u est donnée, on en prendra le quarré, qu'on divisera par 56, & le quotient sera la hauteur x. On voit aussi que si l'on décrit la parabole, dont $56x = uu$ est l'équation, les abscisses x marqueront les hauteurs des Réservoirs, & les ordonnées u

les vîtesses uniformes des Eaux. Ces regles conviennent également à toutes sortes de chûtes d'Eau, de quelle grandeur & figure que soient les ouvertures des Réservoirs & des Tuyaux de conduite.

V. Donc la vîtesse de l'Eau dans les Tuyaux est toûjours uniforme, égale à la vîtesse d'un corps acquise en tombant de la hauteur du niveau de l'Eau du Réservoir au dessus de son ouverture, & par conséquent la vîtesse ou la chûte de l'Eau dans les Tuyaux est toûjours double, ou se fait dans la moitié moins de temps que par sa chûte de la même hauteur dans l'air libre.

Figure 1. VI. Voilà la raison d'où vient que la vîtesse de l'Eau à l'orifice *T*, quoique plus grande que sa vîtesse en *P*, sa quantité est cependant la même; car pour que la quantité d'Eau en *T* fût proportionnelle à sa vîtesse, il faudroit que la vîtesse à l'orifice *P* fût égale à celle de *T*, ce qui ne sçauroit être, les Tuyaux étant de différentes hauteurs.

VII. Cette considération peut être utile dans les Machines mües par des chûtes d'Eau, pour placer avantageusement la Roüe de Moulin, ou la Roüe qui porte les Aubes; & calculer exactement l'action de l'Eau sur les Aubes, ou la
Figure 2. force motrice de la Machine. Car soit, par exemple, deux Roües de Moulin *V* & *X*, placées au bas d'un Réservoir, l'une en *P*, & l'autre en *T*, je dis qu'on ne doit pas calculer la force de l'Eau sur les Aubes de la Roüe *X* par la méthode ordinaire; car pour connoître la force de l'impulsion de l'Eau sur les Aubes d'une Roüe ou de toute autre surface, sa vîtesse étant connüe, on prend, par la méthode ordinaire, le poids d'un solide d'Eau qui a pour base la surface choquée, & pour hauteur celle d'où l'Eau doit tomber pour acquérir cette vîtesse. Or lorsque la hauteur du Réservoir est connüe, la valeur de ce solide l'est aussi, dont le poids, à raison de 70 livres le pied-cube, est la valeur de la force de l'impulsion, ou choc perpendiculaire de l'Eau sur les Aubes de la Roüe de Moulin. Mais si au contraire la vîtesse de l'Eau est donnée, on trouvera facilement la hauteur du Réservoir par l'égalité

$56x = uu$, comme il a été expliqué ci-dessus.

Voilà le calcul qui convient aux Aubes de la Roüe *V*, parce qu'on peut les regarder comme placées immédiatement au dessous de l'ouverture *P*. Mais si on vouloit appliquer ce même calcul aux Aubes de la Roüe *T*, l'Eau ayant parcouru l'espace *PT* dans l'air libre, on trouveroit une force plus grande qu'elle ne seroit réellement, & on se tromperoit ; en voici la raison, & en même temps la méthode de faire les Calculs pour les Roües disposées de cette sorte. Puisque les forces des impulsions sont égales aux solides d'Eau qui ont pour base la surface des Aubes, laquelle surface doit être égale à l'orifice du Tuyau, & pour hauteur celle du niveau de l'Eau du Réservoir, si le Tuyau descendoit jusqu'en *T*, l'impulsion de l'Eau sur l'Aube placée en *T* seroit à l'impulsion sur l'Aube placée en *P*, comme la hauteur *TK* à la hauteur *PK*, parce qu'alors ses impulsions sont en raison composée de celle des vîtesses, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$, & de la raison des quantités d'Eau écoulées en temps égaux par les orifices *T* & *P* ; or cette raison étant la même que celle des vîtesses, l'impulsion sur l'Aube en *T* sera à l'impulsion sur l'Aube en *P* comme les quarrés des vîtesses, ou comme *TK* à *PK*. Mais si le Tuyau ne descend que jusqu'en *P*, les quantités d'Eau écoulées seront les mêmes, & alors les impulsions seront nécessairement dans la raison simple des vîtesses, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$.

VIII. On voit par-là l'avantage qu'il y a de conduire l'Eau avec un Tuyau le plus près qu'il est possible de la Roüe de Moulin, ou de mettre les Aubes le plus près qu'on peut de l'ouverture faite au bas des Réservoirs, au lieu de la laisser tomber dans l'air libre, ou même sur un plan incliné par le moyen d'une rigole en forme de gouttiére, comme je l'ai vû pratiquer à plusieurs Roües pour mouvoir des Soufflets & Marteaux de Forges, à moins qu'on ne soit assujetti par la quantité d'Eau que l'on a à dépenser, mais en ce cas il vaut mieux faire les ouvertures & les aubes plus petites.

IX. Ce que nous venons de dire des chûtes d'Eau verticales, ſe doit entendre des chûtes inclinées à l'horiſon, en prenant leurs hauteurs verticales pour leurs hauteurs propres, ce qui a été démontré par tous ceux qui ont écrit des Hydrauliques ou Mouvements des Eaux.

X. L'Eau coulante ou courante ſur des plans inclinés doit accélérer ſa vîteſſe ſuivant les racines des hauteurs perpendiculaires, ou, ſi l'on veut, ſuivant les racines des longueurs du plan parcouriies, cela eſt connu. Or puiſque les lits des Fleuves, des Riviéres & des Aqueducs, ſont des plans inclinés, la vîteſſe de leurs Eaux doit, par cette raiſon, s'accélérer & augmenter depuis leurs ſources juſqu'à leurs embouchûres : ainſi, ſuivant ce principe, on trouveroit aiſément par l'équation de l'Art. IV, la vîteſſe du courant des Riviéres, leurs pentes, étant données, & réciproquement la hauteur ou l'inclinaiſon de leurs pentes, les vîteſſes étant connües. Mais deux cauſes principales dérangent totalement cette regle; ces cauſes ſont, la premiére, la réſiſtance que les Eaux des Fleuves & grandes Riviéres trouvent à leurs embouchûres en ſe déchargeant dans la Mer, & la ſeconde, les frottements des Eaux contre les ſurfaces du fond & des bords.

Sans cette réſiſtance & ces frottements, les Eaux des Riviéres s'accéléreroient, comme nous venons de dire, depuis leurs ſources juſqu'à leurs embouchûres, leurs rapidités ſeroient beaucoup plus conſidérables, plus grandes vers leurs fonds qu'à leurs ſurfaces, & leurs largeurs ou profondeurs dimiñüeroient depuis leurs ſources juſqu'aux embouchûres.

XI. Je conſidére d'abord quel ſeroit l'état des Fleuves, ſi la réſiſtance & les frottements, dont nous venons de parler, étoient nuls, & je ſuppoſe de plus que toute l'Eau d'un Fleuve part d'une ſeule & même ſource, & coule ſur un plan parfaitement droit, en telle ſorte que les Eaux gardent toûjours le même niveau de pente, la profondeur du lit ſoit par-tout la même.

Par ces ſuppoſitions, il eſt évident, 1.° Que dans toute la longueur du Fleuve, il s'écoulera en temps égaux des

quantités ou des maſſes égales d'eau. 2.° Que la vîteſſe des Eaux augmentant ou s'accélérant toûjours depuis la ſource juſqu'à l'embouchûre, & la profondeur étant ſuppoſée par-tout la même, la largeur entre ces bords doit toûjours diminuer, & cela dans le rapport réciproque des vîteſſes, ou en raiſon renverſée des racines des hauteurs, ou des longueurs parcouruës depuis la ſource. Ainſi ſi les Eaux d'un Fleuve, après avoir parcouru l'eſpace *EF* depuis la ſource *E*, la largeur entre ces bords eſt *AB*; lorſqu'elles ſeront parvenuës en *G*, la profondeur étant ſuppoſée la même par-tout, la largeur *CD* doit être à la largeur *AB*, comme la vîteſſe de l'Eau en *F* eſt à ſa vîteſſe en *G*: car, en temps égaux, il doit paſſer entre *AB* & *CD* des quantités ou des maſſes égales d'Eau.

XII. Si l'on nomme *EF* (a), *FG* (x), *AB* $(2b)$, & *CD* $(2y)$, puiſqu'on peut exprimer les vîteſſes de l'Eau en *F* & en *G*, par $\sqrt{EF}$ & $\sqrt{EG}$, ou par $\sqrt{a}$ & $\sqrt{x}$, on aura $2y . 2b :: \sqrt{a} . \sqrt{x}$, d'où l'on tire cette équation $abb = xyy$, qui montre que dans ſes ſuppoſitions chaque bord du Fleuve eſt une hyperbole du ſecond genre : ces hyperboles ont la ligne *EFG* pour aſymptote commune.

XIII. Comme les Eaux des Fleuves ſont plus baſſes vers le fond, par rapport à la hauteur de leurs ſources, que celles de la ſurface, leur vîteſſe doit, par cette raiſon, être plus grande près du fond que vers la ſurface. Or la hauteur de la ſource & la profondeur des Eaux étant connuës, il ſeroit aiſé de déterminer par le principe général, la différence entre la vîteſſe du fond & celle de la ſurface, & réciproquement cette différence étant connuë, on trouveroit la hauteur de la ſource. Guglielmini donne ſur ce principe une méthode pour trouver l'origine ou la hauteur de la ſource d'un Fleuve, en connoiſſant par expérience deux vîteſſes des Eaux priſes dans des profondeurs différentes.

XIV. Nous avons dit ci-deſſus que la vîteſſe ou la rapidité des Eaux des Fleuves & des Riviéres ſeroient très-conſidérables, ſi elles n'étoient rallenties par la réſiſtance qu'elles

trouvent à l'embouchûre, en ſe déchargeant dans la Mer, & beaucoup plus encore par les frottements conſidérables qu'elles ſouffrent dans tout leur cours, en roulant ſur des plans inégaux & très-raboteux. Pour déterminer ce que les Fleuves doivent perdre de leurs vîteſſes, depuis leurs ſources, par la réſiſtance des Eaux de la Mer à leurs embouchûres, je conſidére d'abord la vîteſſe que prendroit une ſurface plane, pouſſée en même temps par deux fluides mûs dans des directions directement oppoſées.

Si la ſurface *AC* eſt pouſſée par l'action du fluide *BADC* dans la direction *EL*, & en même temps par le fluide *MAPC* dans la direction *EK*, directement oppoſée, & qu'on nomme *M* la maſſe du premier fluide, & *V* ſa vîteſſe *m*, la maſſe du ſecond, *u* ſa vîteſſe, & *x* la vîteſſe que la ſurface doit prendre dans la direction *EL*, en ſuppoſant que le premier fluide doive l'emporter ſur le ſecond. $u + x$ ſera la vîteſſe reſpective du fluide *MAPC* contre la ſurface, & $V - x$ celle du fluide *BADC*. Or, il eſt évident que la vîteſſe x doit être telle que le produit des maſſes de chaque fluide par le quarré de leurs vîteſſes reſpectives contre la ſurface, ſoient égaux, on aura donc cette égalité

$\overline{uu + 2ux + xx} \times m = \overline{VV - 2Vx + xx} \times M$, de laquelle on tirera la valeur de x. Si les maſſes ſont égales, ou que les fluides ſoient les mêmes, tous deux de l'Eau, ou tous deux de l'air, on aura $x = \frac{VV - uu}{2V - 2u} = \frac{V + u}{2}$; & ſi l'on ſuppoſe de plus que le fluide *MAPC* ſoit en repos, on aura $u = 0$ & $x = \frac{1}{2}V$.

D'où l'on voit que ſi *BADC* repréſente le cours d'un Fleuve, *AC* ſon embouchûre ou ſon entrée dans la Mer, *AMPC*, qu'il y ait une ſurface en *AC* ou non, l'Eau du Fleuve doit perdre la moitié de ſa vîteſſe à la rencontre des Eaux de la Mer; l'on voit encore que les Eaux du Fleuve conſervent toûjours leur même niveau de pente. Si les derniéres parties, ou la derniére tranche *AC* eſt retenuë de la moitié, toutes les autres ſeront retenuës d'une quantité qui

rendra leurs vîteſſes uniformes & égales à la moitié de la plus grande vîteſſe des Eaux avant leurs rencontres avec celles de la Mer ; & il eſt encore évident que cette diminution doit ſe faire ſentir juſqu'aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du Fleuve depuis ſon embouchûre, en remontant vers ſa ſource, car la vîteſſe acquiſe depuis la ſource juſqu'au quart de ſa longueur eſt égale à la moitié de la vîteſſe que les Eaux doivent acquérir par leurs chûtes de toute la pente du Fleuve.

XV. Voilà la premiére cauſe qui diminuë la vivacité ou la rapidité des Fleuves, & qui rend leur cours preſque uniforme. Les frottements ſont une cauſe de diminution beaucoup plus conſidérable, comme nous allons voir; mais on ne ſçauroit les réduire au calcul, il faut avoir recours à l'expérience. Nous comprenons ici ſous le nom de *frottement des Eaux*, les détours des filets d'Eau à la rencontre des petites éminences du fond raboteux des Riviéres. Si *AB* eſt le fond ou lit d'une Riviére, les filets d'Eau *ab* rencontrant des petites éminences en *b*, ſe détournent dans une direction comme *bc*, & ſont en même temps entraînés par les filets ſupérieurs, ce qui rallentit néceſſairement leurs vîteſſes de quelque choſe: or ces détours, quoi-que petits, ſont en ſi grand nombre dans tout le cours d'une Riviére, que cette cauſe, eſt, je penſe, la plus conſidérable qui arrête & retarde les Eaux.

XVI. Une preuve bien ſenſible que les frottements rallentiſſent conſidérablement le courant des Eaux, eſt que plus les Fleuves & les Riviéres baiſſent ou diminuënt, plus leurs vîteſſes ſe rallentiſſent, & au contraire plus elles augmentent ou s'enflent, plus leurs rapidités augmentent; & on ſçait que dans les grandes Eaux, leur courant devient double, triple, & quelquefois quadruple de celui de leur état moyen. Elles coulent cependant ſur la même pente, & le même plan incliné.

XVII. Mais voici une 2.de preuve de la quantité conſidérable des frottements. Par les nivellements de M. Picard, de la justeſſe deſquels on ne ſçauroit douter, la Riviére de Loire a au moins trois fois plus de pente que la Seine, &

cependant la vîteſſe des Eaux de la Seine eſt preſque double de celle de la Loire; la raiſon eſt que le lit de la Loire a peu de profondeur, puiſqu'elle n'eſt ſouvent pas navigable, & qu'elle ne porte que des Batteaux très-petits, en comparaiſon de ceux de la Seine : or il eſt bien certain qu'une petite quantité d'Eau recevant tous les frottements, doit être bien plus rallentie qu'une plus grande quantité. Mais auſſi lorſque les Eaux de ces deux Riviéres groſſiſſent, la vîteſſe ou le courant de la Loire augmente en plus grande raiſon que le courant de la Seine; ce qui rend la Loire plus ſujette à déborder & à changer de lit, toutes choſes d'ailleurs égales.

Le Rhône & le Rhin ont la profondeur de leurs lits beaucoup plus grande que la Seine & la Loire, c'eſt auſſi par cette raiſon que ces Fleuves ſont beaucoup plus rapides.

XVIII. Voyons quelle ſeroit, à peu près, la rapidité extrême des Riviéres, ſi les frottements étoient nuls, & la réſiſtance de l'air. Je fais ce calcul pour la Seine, dont la pente depuis Paris juſqu'à la Mer eſt environ de 110 pieds, & comme Paris eſt preſque dans le milieu entre les ſources & l'embouchûre de la Seine, prenons 200 pieds pour toute la pente de cette Riviére. Si l'on ſubſtituë dans $56x = uu$, 200 à la place de x, on aura la vîteſſe $u = 106$, donc il faut prendre la moitié, à cauſe de la réſiſtance des Eaux de la Mer, pour avoir 53 pieds par ſeconde pour la vîteſſe extrême que les Eaux de la Seine auroient, ſi les frottements étoient nuls : cette vîteſſe eſt la même, à peu près, que celle d'un jet d'Eau de 50 pieds de hauteur à la ſortie de ſon ajoûtoir.

Les frottements des Eaux contre le ſond & les bords des Riviéres ſont donc très-avantageux ; car ſans eux les Riviéres ne ſeroient pas navigables, tant par leur trop grande rapidité, que par le peu de profondeur qu'elles auroient.



RECHERCHES

RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LES OS DU CRANE DE L'HOMME.

Par M. HUNAULD.

I.

VE'SALE, & après lui des Anatomiſtes de grande réputation *, nous ont dit, qu'en éxaminant la calotte du Crâne humain, on ne remarque ſur ſa face concave, à l'endroit des ſutures, que des lignes plus ou moins irréguliéres, au lieu qu'à ſa face convexe les dents (comme tout le monde le ſçait) y ſont très-ſenſibles. On peut encore expoſer cette même remarque d'une autre façon, en diſant, que les dents qui uniſſent les os coronal, pariétaux & occipital entr'eux, ne ſe trouvent qu'à la Table externe & au Diploë, & qu'il n'y a point de dentelure à la Table interne de ces os. 6 Décemb. 1730.

Prévenu en faveur d'une obſervation qui vient de ſi bonne part, & que j'avois vérifiée pluſieurs fois, je fus fort étonné en y trouvant par la ſuite des exceptions. Je voulus m'aſſûrer, en éxaminant quantité de Crânes, ſi ces exceptions n'étoient point un jeu de la Nature, & voici ce que j'ai trouvé:

Les Crânes qu'on étudie le plus, & dont on ſépare les os pour la démonſtration, ſont aſſés ſouvent des Crânes de Sujets morts au de-là de la jeuneſſe. On ne trouve point pour l'ordinaire de dents à la Table interne de ces Crânes, & plus les Sujets ſont avancés en âge, & plus l'union des os en dedans de la calotte du Crâne paroît en forme de lignes; ces lignes même s'effacent entiérement dans la vieilleſſe. Au contraire, dans le bas âge il y a des dents à la Table interne

* *Veſale, de Corporis humani fabricâ, lib. 1. cap. 6. Euſtachi, Oſſium examen. Fallope, expoſitio de Oſſibus, cap. 13. Spigel, de humani Corporis fabricâ, lib. 2. cap. 7. Mem. de l'Acad. Royale des Sc. de 1720. p. 347.*

de la calotte du Crâne, & les ſutures paroiſſent à ſa ſurface concave. Ces dents & ces ſutures y ſont d'autant plus apparentes que les Sujets ſont plus jeunes. Voilà une variété bien certaine, bien conſtante, & qui fait porter à faux l'obſervation de Véſale, & des autres Anatomiſtes que je viens de citer. C'eſt de cette variété dont je vais tâcher de développer les cauſes.

Une Voûte a plus d'étendüe à ſa ſurface convexe qu'à ſa ſurface concave, & plus une Voûte eſt épaiſſe, & plus ſa ſurface interne eſt petite par rapport à l'externe. Cette différence d'étendüe eſt cauſe que les piéces qui compoſent une Voûte doivent être taillées obliquement pour être appliquées les unes à côté des autres. Si l'on ſuppoſe que les piéces d'une Voûte faſſent également effort pour s'augmenter ſuivant toutes leurs dimenſions, la preſſion de ces piéces les unes contre les autres, ſera plus forte vers la ſurface concave que vers la ſurface convexe. Ces idées ſimples, appliquées à ce qui ſe paſſe dans l'augmentation du Crâne, fourniront, je crois, la raiſon que je cherche.

Dans l'enfance le Coronal, les Pariétaux & l'Occipital commencent peu-à-peu à s'ajuſter enſemble par le moyen des dents & des échancrûres qui ſe trouvent à leurs bords. Ces os ſont alors très-minces, & les dents qui ſe trouvent gravées dans toute leur épaiſſeur, ſont auſſi longues à la Table interne qu'à l'externe ; ainſi les ſutures coronale, ſagittale & lambdoïde, paroiſſent à la ſurface concave de la calotte du Crâne de même qu'à la ſurface convexe. Mais bientôt enſuite les choſes changent. Les os du Crâne ſe preſſent mutuellement les uns & les autres à meſure que leur étendüe augmente : comme en même temps leur épaiſſeur devient plus conſidérable, il faut néceſſairement que les dents ayent moins de longueur à la Table interne qu'à l'externe, & il faut que la pointe de ces mêmes dents ſoit taillée obliquement, car la calotte du Crâne, ainſi qu'une Voûte, a moins d'étendüe à ſa ſurface concave qu'à ſa ſurface convexe ; ainſi les bords des os qui la compoſent, pour pouvoir s'appliquer à côté

les uns des autres, doivent être taillés obliquement.

A mesure que l'épaisseur du Crâne augmente, les dents deviennent de plus en plus moins longues à la Table interne qu'à l'externe. Cette inégalité de longueur fait que les échancrures, qui ne sont que les interstices des dents, ont aussi moins d'étendüe à la surface concave du Crâne qu'à la surface convexe; par conséquent si l'on regarde le dedans de la calotte du Crâne, quand il commence à acquérir une certaine épaisseur, les sutures y doivent paroître moins considérables qu'à sa surface externe.

Voilà donc déja les dents moins longues & les échancrûres moins profondes à la Table interne qu'à l'externe; mais il y faut encore quelque chose de plus, car avec l'âge les échancrures se remplissent entiérement à la Table interne, & les dents y disparoissent entiérement.

Lorsque les os de la calotte du Crâne commencent à se presser réciproquement par l'augmentation de leur étendüe, la partie de la pointe des dents, qui appartient à la Table interne, pressée contre les échancrûres de l'os opposé, trouve moins de résistance vers la substance spongieuse du Diploë Figure 1. que contre la Table interne des échancrûres où ces dents sont engagées: cette partie de la pointe des dents qui appartient à la Table interne, se dirigera donc vers le Diploë. Le peu d'épaisseur de la Table interne rend cette détermination facile. La Table interne de la dent, en se portant ainsi vers le Diploë, forme un talus, & perd le niveau du dedans du Crâne, mais la Table interne du fond de l'échancrûre en profite bientôt en s'avançant sur le talus de la dent opposée, & elle s'y avance d'autant plus, que les os faisant plus d'effort les uns contre les autres vers leur surface concave qu'ailleurs, y sont plus disposés à s'étendre vers les endroits où il se trouve une diminution de résistance.

Voilà donc en même temps deux nouvelles causes qui contribüent à effacer les sutures du dedans de la calotte du Crâne. 1.° Toute la pointe des dents, qui se releve vers le Diploë, cesse de paroître en dedans du Crâne. 2.° La Table

interne qui s'avance du fond de chaque échancrûre, diminüe la longueur des dents du côté de leur racine ; ainsi par ce double moyen, peu-à-peu & avec le temps, les dents se trouvent effacées au dedans du Crâne, il n'y paroît plus de suture, & l'union des os ne s'y fait appercevoir que par des lignes.

On peut facilement s'assûrer de la vérité de ce que je viens de dire ; car dans les Crânes d'un certain âge, après qu'on en a séparé les os, on voit à la surface concave la pointe des dents taillée en talus. Ce talus se remarque encore mieux en rajustant ces os séparés. On voit aussi la Table interne du fond de chaque échancrûre qui s'avance considérablement vers l'os opposé, & le bord de ces avances est très-mince.

La pointe des dents qui appartient à la Table interne, se porte vers le Diploë, & non pas vers le dedans du Crâne, Figure 1. parce que les fibres *A B*, dont la dent *BD* est une continuation, en se déterminant vers le Diploë *D*, affectent plus la ligne droite, au lieu qu'en se réfléchissant en dedans du Crâne *C*, elles feroient un angle *ABC*. Or le suc qui coule continuellement dans ces fibres, tend plûtôt à leur donner la *rectitude*, ou, ce qui est la même chose, à les diriger vers *D*.

On ne peut pas dire que par la même raison la partie de la dent, qui appartient à la Table externe, devroit se réfléchir à l'extérieur du Crâne ; car 1.° la Table externe est plus épaisse que l'interne, ainsi la Table externe des dents d'un os, & la Table externe des échancrûres de l'os opposé se touchent par une plus grande surface que leurs Tables internes. 2.° Les dents ne sont pas pressées, contre les échancrûres qui les reçoivent, aussi fortement à la Table externe qu'à la Table interne. Je pourrois encore assigner une autre cause qui rend l'effort des os, les uns contre les autres, plus grand à leur Table interne qu'à l'externe, c'est l'action continuelle du Cerveau, qui causée par le battement continuel des arteres, oblige la Table interne à s'étendre, & augmente la pression de ce côté-là.

Il arrive ſouvent, par un effet de cette preſſion plus forte à la Table interne qu'à l'externe, que la partie de la dent *BD,* qui s'eſt déterminée vers le Diploë *D,* devient plus longue que la partie de la dent qui eſt à la ſurface convexe. Les fibres de la Table interne d'un os trouvant dans la Table interne de l'os oppoſé beaucoup de réſiſtance à leur allongement, s'allongent d'autant du côté où elles rencontrent moins de réſiſtance. Voilà d'où vient la longueur des pointes qui ſont engagées dans le Diploë.

On ſçait aſſés combien les dents qui forment les ſutures, contribüent à affermir l'union des os; cependant on pourroit dire que ſi les deux Pariétaux, par exemple, étoient ſeulement appliqués l'un contre l'autre, ſans qu'il y eût de dents à leur bord ſupérieur, ils ne pourroient être enfoncés, à moins qu'il n'arrivât fracture, par un fardeau appuyé ſur la ſuture ſagittale, ni par un coup donné ſur la même ſuture ou aux environs (je ſuppoſe que la partie inférieure de ces os ſoit bien retenüe). En voici la raiſon. La Table externe des Pariétaux eſt plus grande que leur Table interne, à cauſe que la calotte du Crâne a plus d'étendüe à ſa ſurface convexe qu'à ſa ſurface concave : ainſi la Table externe d'un Pariétal eſt retenüe par la Table interne de l'autre Pariétal. En effet l'enfoncement ne peut arriver que le bord ſupérieur du Pariétal droit n'avance ſur le côté gauche, & que le bord ſupérieur du Pariétal gauche n'avance ſur le côté droit, d'où il naît un obſtacle à la dépreſſion de la partie ſupérieure des deux Pariétaux. Mais lorſque le Crâne n'a encore que peu d'épaiſſeur, & que la Table interne d'un os eſt, à très-peu de choſe près, auſſi étendüe que l'externe, ſi l'on ſuppoſe que les Pariétaux ne ſe touchent que par un bord tout uni, ils vacilleront, & ne ſe ſoûtiendront pas l'un l'autre, mais les dents d'un Pariétal s'avançant ſur la Table interne du Pariétal oppoſé, & *vice versâ,* aſſujettiſſent le bord ſupérieur des Pariétaux, & s'oppoſent à leur enfoncement. Ce que je viens de dire des deux Pariétaux, regarde tous les os unis par ſuture dentelée.

Pour revenir aux Sutures, les dents qui les composent, ne sont pas toutes de la même longueur. Les petites dents qui ne sont séparées que par de petites échancrûres, disparoissent les premiéres. Plusieurs dents d'une longueur inégale, placées à côté les unes des autres, se confondent, & n'en font plus qu'une d'une largeur considérable, lorsque les interstices qui les séparent, sont remplis. Il se trouve encore des dents beaucoup plus longues que les autres : celles-ci disparoissent plus tard, ou ne disparoissent même jamais entiérement. Toutes ces inégalités donnent à l'union des os, en dedans du Crâne, la figure de lignes irréguliéres.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que s'il ne paroît point de dents à la surface concave du Crâne, ce n'est point pour empêcher, comme on le dit ordinairement, que la Dure-mere ne soit blessée dans les cas de fracture ou d'enfoncement à l'endroit des sutures, mais c'est par une suite nécessaire de la conformation des os du Crâne & de sa figure.

Lorsque les dents de la Table interne sont effacées, & que les sutures ont disparu du dedans du Crâne, les os qui le composent, ne laissent pas encore quelquefois de s'étendre. Le Diploë, en s'épaississant de nouveau, écarte les deux Tables; ces Tables même augmentent en épaisseur : aussi voit-on dans les Sujets d'un certain âge, & sur-tout dans ceux dont les Crânes sont fort épais, que les dents n'occupent pas la moitié de l'épaisseur des os ; ensuite les os s'unissent & se soudent insensiblement ensemble, de sorte que la plûpart des différentes piéces de la calotte du Crâne n'en font plus qu'une. Ils commencent à se souder par la Table interne, parce que la partie interne de la membrane, dont je parlerai dans la suite de ce Mémoire, s'ossifie la premiere ; ou, si l'on veut, en attendant une autre cause, on peut dire que le suc osseux tendant toûjours à étendre & à dilater les fibres des os dans le temps même que le Crâne ne peut plus augmenter de volume les surfaces par lesquelles les os se touchent à force de se presser, s'unissent & se soudent ensemble. Or comme la pression de ces os est plus forte à la Table interne qu'à

l'externe, les os commencent à se souder par leur Table interne, ainsi s'effacent jusqu'aux lignes qui en dedans du Crâne distinguoient auparavant les différents os. Peu-à-peu la soudure gagne, pour ainsi dire, de la Table interne vers l'externe, les dents d'un os se soudent avec les dents d'un os voisin, & ce n'est qu'après beaucoup de temps que le suc osseux, en passant & repassant d'un os à l'autre, fait disparoître de la surface convexe du Crâne les marques même des sutures.

Ces observations & les suivantes, que m'a fourni l'examen d'un grand nombre de Crânes, sont aussi assûrées que s'il avoit été possible de les faire toutes successivement sur un même Sujet. On ne peut en vérifier toutes les circonstances, qu'en examinant des Crânes de différents âges, & en séparant avec attention les os qui les composent.

Au reste il paroîtra peut-être que je me suis un peu trop étendu sur la matiére que je viens de traiter; mais si l'on fait attention que personne ne l'avoit encore examinée avec des yeux Physiciens, on verra que j'ai été obligé de peser un peu plus que je n'eusse fait, sur les raisons que j'ai donné. J'eusse encore été beaucoup plus long, si j'eusse voulu suivre la plûpart des Auteurs jusques dans les petits détails de quantité de petites choses où ils sont entrés à l'occasion des Sutures, détails qui quelquefois sont peu justes, souvent inutiles, & toûjours ennuyeux, lorsqu'une saine théorie ne les accompagne pas.

II.

Les os nommés Surnuméraires, Clefs, ou *Ossa Wormiana*, suivent, quand ils se trouvent, la même analogie que les autres os du Crâne. Comme ils font partie de la Voûte du Crâne, ils paroissent plus grands au dehors qu'au dedans, & plus le Crâne où ils se trouvent est épais, plus leur surface interne est petite à l'égard de l'externe. Les dents qu'ils avoient d'abord gravées dans les deux Tables, disparoissent peu-à-peu de l'interne, & leur union avec les autres os ne s'y remarque que comme une ligne. Il leur arrive encore avec l'âge ce qui arrive aux autres os du Crâne, c'est de s'unir avec eux en

dedans, pendant qu'à la surface convexe ils en paroissent encore distingués, de sorte qu'on jugeroit d'abord qu'ils ne pénétrent pas, & qu'ils n'ont jamais pénétré jusques dans la concavité du Crâne. Je ne nie pas pour cela qu'il n'y ait de petits os surnuméraires qui ne s'étendent pas jusqu'au dedans du Crâne.

J'ai vû des os surnuméraires tout-à-fait différents de ces derniers, & dont personne, je crois, n'a encore parlé. Ils paroissent à l'intérieur du Crâne, & ne s'étendent pas jusqu'à la Table externe, il y en a dans beaucoup de Crânes, ils sont placés à l'endroit des sutures. Ils tombent ordinairement quand on démonte les piéces du Crâne, & lorsqu'on remonte ces piéces, on croit, sans y faire trop d'attention, que le vuide, qu'ils ont laissé en se détachant, est causé par la rupture d'une dent.

Il me semble avoir remarqué que dans les petits Crânes les dents disparoissent, & les sutures s'effacent plûtôt que dans des Crânes plus grands & plus étendus. Si cela est, c'est apparemment une suite de la différence qui se trouve entre la surface concave & la surface convexe dans une Voûte plus ou moins cintrée.

III.

L'examen des Sutures vrayes ou dentelées m'a conduit naturellement à l'examen des Sutures fausses ou écailleuses. La différence qui se trouve entre ces deux sortes de Sutures, montre assés que leurs usages doivent être différents. Dans l'une les os s'unissent par le moyen des avances & des enfoncements qui sont à leurs bords : dans l'autre le bord d'un os est appliqué sur le bord d'un autre os, & pour s'ajuster ainsi, ils sont tous les deux taillés en bizeau. Presque tous les Anatomistes ont ou proposé des raisons de cette différence, ou ont adopté quelques-unes des raisons qu'on avoit proposé avant eux ; cependant en les examinant toutes, on sent bien qu'on n'en a point encore trouvé de suffisantes. Celle que je vais proposer, me paroît mieux fondée.

Un fardeau appuyé sur une Voûte où le poids seul de la Voûte

Voûte tend à déjetter en dehors les murs ou les piliers qui la soûtiennent : c'est par une résistance placée en dehors de la Voûte qu'on s'oppose à cet effort. Voilà à quoi servent les murs-boutans & les arcs-boutans.

Un fardeau considérable *A*, placé sur le sommet de la Tête, tend à enfoncer en dedans la suture sagittale *B*, ou, ce qui est la même chose, le bord supérieur *CC* de chaque Pariétal *CD, CD*; cela ne se peut faire que le bord inférieur *D, D*, des Pariétaux ne soit écarté & déjetté en dehors. Un coup donné sur le haut de la Tête fait la même chose. Or, c'est à cet écartement en dehors des bords inférieurs des Pariétaux que s'opposent les Temporaux *FF*. Etant appliqués fortement, comme ils le sont, contre la partie inférieure de chaque pariétal, ils font la fonction de véritables murs-boutans qui retiennent & assujettissent les Pariétaux. Figure 2.

Un effet de la suture dentelée est de contribüer à empêcher que les pieces qui la forment, ne s'enfoncent en dedans, comme je l'ai fait voir plus haut; mais elle ne s'oppose point à leur écartement en dehors; il n'y a que la partie de quelques dents engagée dans le Diploë qui y pourroit faire un obstacle, mais bien foible. Une suture dentelée qui uniroit les Pariétaux avec les Temporaux, résisteroit à une compression faite sur la partie latérale de la Tête, ou à un coup porté sur le même endroit, mais elle ne s'opposeroit pas à l'écartement en dehors causé par un fardeau ou un coup sur le sommet de la Tête, & c'est-là ce que font merveilleusement bien les Temporaux par la portion écailleuse, ou le bizeau qui est à leur bord supérieur, & qui s'applique si parfaitement à l'écaille ou bizeau du bord inférieur des Pariétaux. Ce que je viens de dire de la portion écailleuse de l'os des Tempes se doit également entendre des deux portions écailleuses de l'os sphénoïde, qui s'appliquent de la même maniére sur l'angle antérieur & inférieur de chaque Pariétal.

Pendant que la suture écailleuse s'oppose à l'écartement du bord inférieur des Pariétaux, la suture sagittale qui est dentelée, s'oppose, comme je l'ai dit, à l'enfoncement de

leur bord ſupérieur. C'eſt par ce double moyen que les Pariétaux ſont en état de ſoûtenir des fardeaux auſſi conſidérables que ceux qu'on voit ſur la Tête de quantité de gens; la ſuture ſagittale a même d'autant moins à ſouffrir de l'action d'un fardeau que les Temporaux arc-boutent plus fortement. Si l'on fait attention que dans la ſuture ſagittale, ainſi que dans les autres ſutures dentelées, les dents d'un os ſont appuyées ſeulement ſur la Table interne de l'os oppoſé, laquelle eſt fort mince, & que les dents ont beaucoup moins d'épaiſſeur que le reſte de l'os, on verra combien il importe que la partie inférieure des Pariétaux ſoit ſolidement aſſujettie: ainſi les Temporaux arc-boutants avec force, ſoûtiennent une partie du fardeau appuyée ſur la ſuture ſagittale, & la ſoulagent de cette façon.

A preſent, on peut bien facilement répondre à une queſtion que ſe ſont fait la plûpart des Anatomiſtes, & qui leur a paru ſi embarraſſante. Ils demandent pourquoi la portion écailleuſe des Temporaux recouvre en dehors la portion écail-
Figure 2. leuſe des Pariétaux, & pourquoi au contraire le bord des Pariétaux n'eſt pas à l'extérieur *.

Pour que les Temporaux puiſſent faire la fonction de murs-boutans, il faut qu'ils ſoient, pour ainſi dire, inébranlables dans leur ſituation. C'eſt auſſi ce qu'on reconnoît en démontant les piéces d'un Crâne, lorſqu'après avoir ôté les Pariétaux, on tire en dehors le bord ſupérieur des Temporaux encore unis avec l'os occipital & l'os ſphénoïde. On ne ſera point étonné de leur fermeté, en conſidérant de quelle façon chaque os des Tempes eſt engagé & aſſujetti par le moyen de l'Occipital & du Sphénoïde.

Un coup porté ſur le bas des Pariétaux fait tout le contraire d'un coup donné ſur la ſuture ſagittale, ou d'un fardeau appuyé ſur la même ſuture ; il tend à enfoncer en dedans la partie inférieure des Pariétaux, & à déjetter en dehors leur partie ſupérieure. Tout l'artifice dont j'ai parlé, & qui eſt ſi

* *Véſale, lib. 1. cap. 6. Fallope, expoſitio de Oſſibus, cap. 13. Memoires de l'Académie Royale des Sciences de 1720, p. 349. &c.*

propre à empêcher l'effet d'un fardeau ou d'un coup sur le sommet de la Tête, ne s'oppose nullement à l'effet d'un coup donné sur le bas d'un Pariétal. Voici ce qui résiste à un pareil coup.

Le bord supérieur du Coronal est soûtenu pour l'ordinaire par les Pariétaux; mais aux parties latérales du Coronal, on voit la Table interne, qui beaucoup plus longue que l'externe, fait une avance assés considérable *BC* qui soûtient un pareil prolongement *FG* de la Table externe des Pariétaux: ainsi un Pariétal poussé vers le dedans par un coup donné à sa partie inférieure, est retenu par cette avance de la Table interne du Coronal. Il y a de plus au bord supérieur de l'os des Tempes, entre la portion écailleuse & la portion pierreuse, une échancrûre d'une figure particuliére, où s'engage la partie *H* du Pariétal. C'est ce qui assujettit encore fortement la partie inférieure de ce dernier os. Fig. 3. & 6. Figure 4. Fig. 5. Fig. 5. & 6.

Ce n'est pas seulement au bord du Coronal & des Pariétaux qu'il se trouve des especes d'*avances* & d'*enfoncements*, ou de la Table interne ou de l'externe; la coupe de la plûpart des os n'est pas perpendiculaire à l'os. Le bord d'un os a souvent deux coupes, de sorte qu'il s'unit avec son voisin en deux différents sens; il le soûtient, pour ainsi dire, & il en est soûtenu. Ces coupes sont plus ou moins obliques, par rapport au corps de l'os. La coupe de la partie supérieure *DF*, du bord antérieur de chaque Pariétal qui regarde en-haut, n'est pas aussi apparente que la coupe de la partie inférieure *FG* des mêmes Pariétaux qui regarde intérieurement. Il en est ainsi de la double coupe du Coronal *AB*, *BC*, qui s'ajuste avec celle de chaque Pariétal. La partie supérieure du bord de l'os des Tempes qui s'articule avec l'os sphénoïde regarde en dedans, & la partie inférieur du même bord regarde en bas. La partie du bord de l'os sphénoïde qui s'articule avec l'os des Tempes a par conséquent une double coupe, mais en sens contraire. On n'a fait jusqu'à present, ce me semble, aucune mention de cette double coupe de la plûpart des os du Crâne, ni de ses effets, qui sont Fig. 3. 4. 5. & 6. Fig. 6. Fig. 5. Fig. 3. & 4.

de rendre l'union des os entre eux plus ferme & plus ſolide.

Au reſte, il faut faire remarquer que les dents de la partie inférieure du bord antérieur des Pariétaux ſont tellement diſpoſées avec les dents du Coronal, qu'elles concourrent par leur union à l'action que j'ai attribué aux Temporaux, en empêchant l'écartement en dehors de la partie inférieure des Pariétaux.

I V.

On ne connoît d'autre union entre les différents os du Crâne, que celle qui ſe fait par la différente diſpoſition de leurs bords. On regarde tous les os du Crâne comme des piéces qui ne ſont unies entre elles, que parce que leurs bords différemment configurés s'ajuſtent les uns avec les autres. On ſçait que la plûpart de ces piéces ſe ſoudent enſemble peu à peu dans la vieilleſſe ; mais ce qu'on ne ſçait point, c'eſt que toutes ces piéces dans tous les âges n'en ſont véritablement qu'une ſeule; qu'elles ne ſont pas ſeulement appliquées les unes contre les autres, & que dans tout le Crâne, dès le moment de ſa formation, il n'y a pas une ſeule interruption de continuité.

Pour s'aſſûrer de cette vérité qui en a d'abord ſi peu les apparences, il faut avec ſoin enlever le Péricrane deſſus une ſuture, on apperçoit alors la continuité d'un os avec ſon voiſin par le moyen d'une membrane qui eſt placée entre deux, & qui fait partie de l'une & de l'autre. On remarque des filets membraneux qui ſortant du fond des échancrûres, s'implantent dans les dents de l'os oppoſé, & qui lorſqu'on remuë en différents ſens un des os qui forme la ſuture, s'étendent & ſe relâchent. Après avoir détaché exactement la Dure-mere, on apperçoit la même choſe au dedans du Crâne. Tout cela ſe remarque très-bien dans la Tête d'un Enfant mort d'Hydrocephale.

Cela ſe concevra ſans peine, ſi l'on fait attention à la maniére dont ſe forment les différents os du Crâne. Le Crâne dans un Fœtus peu avancé n'eſt qu'une membrane qui ſe métamorphoſe inſenſiblement en os. Un endroit de cette

membrane commence peu à peu à s'ossifier; cette ossification gagne & se continuë par des lignes qui partent comme d'un centre de l'endroit où l'ossification a commencé. Dans différents endroits de cette calotte membraneuse, commencent en même temps d'autres ossifications, qui de même font du progrès & s'étendent. Lorsqu'elles sont parvenuës à un certain point, le bord de chaque ossification commence à prendre en partie la conformation que le bord de l'os doit avoir par la suite, & à s'ajuster avec l'ossification voisine.

Au bord supérieur du Pariétal droit, l'ossification se continuë en forme de dents qui gagnent jusqu'à la partie gauche de la calotte membraneuse. L'ossification du Pariétal gauche se continuë de même à son bord supérieur par des dents qui gagnent jusque du côté droit dans les intervalles membraneux, que les dents du Pariétal droit en se formant, laissent entr'elles. Par là on s'apperçoit, qu'entre les deux Pariétaux, il doit rester une portion de membrane, qui est interposée entre le Pariétal droit & le gauche, & qui lorsqu'elle sera ossifiée ne fera plus qu'un os de deux Pariétaux.

Au reste, on ne doit pas être plus étonné de trouver entre les deux Pariétaux, par exemple, une portion membraneuse, que d'en trouver entre les pieces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus. Quand on leve avec adresse dans un Enfant la Dure-mere & le Péricrane à l'endroit de la Fontanelle, ne voit-on pas une membrane qui est continüe avec les deux Pariétaux & le Coronal, laquelle fait partie de ces trois os, & qui s'ossifie avec l'âge? on n'apperçoit point d'autre différence entre ces différentes portions membraneuses, si ce n'est que les unes s'ossifient très-promptement, & les autres avec plus ou moins de lenteur. Les membranes qui séparent les piéces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus, s'ossifient peu après la naissance; celle qui se trouve à la Fontanelle disparoît, excepté à l'endroit des sutures, à trois ou quatre ans plus ou moins. Il en est de même de la membrane qui sépare en deux le Coronal, & qui cependant quelquefois subsiste jusqu'à la vieillesse. Celle qui est

entre les deux Pariétaux, ainsi que celles qui sont entre les os du Crâne & de la face, s'ossifient presque toutes dans un âge avancé, les unes plûtôt, les autres plus tard.

Je n'ai jamais observé cette membrane avec plus de plaisir que dans l'endroit des sutures écailleuses. On y découvre que cette membrane est composée de deux lames, de même que le Crâne est composé de deux Tables. Après avoir emporté le Péricrane de dessus la suture écailleuse du Temporal avec le Pariétal, vous voyés de la portion écailleuse de l'os temporal partir, pour ainsi dire, une membrane qui va former la Table externe du Pariétal. En dedans du Crâne, après avoir emporté la Dure-mere, on voit une membrane continüe à la Table interne du Temporal, & à la portion écailleuse du Pariétal.

Cette observation, aussi-bien que quelques autres, prouve que les portions écailleuses des os ne sont pas formées par les deux Tables.

V.

En examinant le Crâne de plusieurs Fœtus de différents âges, il m'a paru que les fibres osseuses, qui s'étendent du milieu de l'os comme d'un centre vers sa circonférence, & qui étant unies ensemble par le moyen de petites fibres transverses, forment les Mailles dont parle M. Malpighi, il m'a paru, dis-je, que ces fibres sont composées de petites lames appliquées les unes sur les autres, à peu-près comme les écailles des Poissons. L'existence de ces lames est prouvée, parce qu'on les apperçoit dans les Crânes qui se décomposent par une longue exposition aux injures de l'air, & dans les os qui s'exfolient ; mais, comme je viens de le dire, on les peut encore observer dans les os du Crâne d'un Fœtus peu avancé, lorsqu'ils sont tous nouvellement débarrassés des autres parties, ou qu'on les a un peu laissés dans l'eau. En courbant alors légerement ces os suivant la longueur de leurs fibres, on voit ces petites lames qui se soûlevent & s'écartent les unes des autres par une de leur extrémité.

VI.

Il y a dans le Crâne des choſes qui ſont ſenſibles, qui ſont de conſéquence, qui ne demandent que des yeux pour être apperçûës, & qui ont, je crois, échappé à tous les Anatomiſtes. Telle eſt la différence qui ſe trouve preſque toûjours entre les deux trous par où les jugulaires communiquent avec les ſinus latéraux, ainſi qu'entre les foſſes où eſt logée la tête des mêmes jugulaires. Ce trou & cette foſſe ſont ſouvent du côté droit une ou deux fois plus grands que du côté gauche. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter la vûë ſur pluſieurs Crânes. Cette inégalité dans les trous & les foſſes des deux jugulaires internes eſt une ſuite d'une obſervation qu'a fait M. Morgagni ſur un Sujet [a], & qui m'a paru conſtante; c'eſt que le ſinus latéral droit eſt plus large, & contient plus de ſang que le gauche; ainſi le ſang du ſinus latéral droit, pour entrer dans la jugulaire droite, a dû ſe conſerver un paſſage plus grand dans le Crâne que celui du gauche. L'inégale quantité du ſang dans les deux ſinus latéraux, vient de ce que le ſinus longitudinal ſupérieur, comme l'a entrevû M. Vieuſſens, & comme le trajet de ce ſinus, qui eſt gravé ſur les os, le fait appercevoir même dans les Crânes décharnés, ne ſe diviſe pas également dans les deux ſinus latéraux. Ce ſinus décharge le ſang qu'il contient dans le ſinus latéral droit, ainſi que l'a parfaitement bien developpé [b] l'illuſtre M. Morgagni, & le gauche n'en reçoit qu'une médiocre quantité par une, ou deux, ou quelquefois trois petites communications qu'il a ordinairement avec le droit.

Comme il ſe trouve dans quelques Sujets que le ſinus longitudinal ſupérieur ſe décharge également dans les deux ſinus latéraux; alors le diametre des jugulaires & des troux par où elles prennent naiſſance eſt égal du côté droit & du côté gauche. Quand le ſinus longitudinal ſe détourne dans le ſinus latéral gauche, comme il arrive très-rarement, puiſque

[a] *C'eſt dans l'explication de la première Figure de la première Planche de ſes ſixiémes Adverſaires.*

[b] *Adverſaria VI. animadverſ. 1.*

dix Sujets ouverts exprès n'en ont fourni à M. Morgagni qu'un ſeul exemple, c'eſt du côté gauche que le ſinus, la jugulaire, la foſſe & le trou ſont plus grands.

Cette différence entre ces parties du côté droit & du gauche, avec quelques autres raiſons, m'ont fait dire, il y a long-temps, qu'il y a de la différence entre la ſaignée qu'on fait à la jugulaire droite, & celle qu'on fait à la gauche.

VII.

Je crois qu'on peut retrancher du nombre des os qu'on compte ordinairement dans la Tête, les deux cornets inférieurs ou les lames ſpongieuſes inférieures du nés. Il m'a ſouvent paru que ce ne ſont point des os particuliers, mais des portions de l'os ethmoïde. Je les ai vû attachés à l'os ethmoïde dans des Têtes de différents âges, chacun par une lame dont la figure eſt ſouvent différente, & qui quelquefois eſt percée. Ces lames deſcendent de devant en arriére, & vont de la partie antérieure latérale de l'os ethmoïde au bord ſupérieur des cornets inférieurs. J'ai des os ethmoïdes ſéparés du reſte de la Tête, auſquels les cornets inférieurs ſont reſtés attachés. Comme les lames oſſeuſes qui font cette union ſont très-minces & très-fragiles, on les caſſe preſque toûjours, & d'autant plus facilement qu'ils ſont retenus avec l'os maxillaire par leur apophiſe en forme d'oreille qui eſt engagée dans le ſinus maxillaire. Les cornets inférieurs ſe ſoudent avec l'os du Palais, & enſuite avec l'os maxillaire, mais cette union ne les doit pas faire regarder comme faiſant partie de l'un ou de l'autre de ces os. Preſque tous les os qui ſe touchent, s'uniſſent & ſe ſoudent enſemble avec l'âge, les uns plûtôt, les autres plus tard. Une piéce oſſeuſe peut être regardée comme un os particulier, lorſque dans l'âge où les os ſont bien formés, on ne trouve point entr'elles & les piéces voiſines une continuité non interrompuë d'oſſification.

Pour avoir un os ethmoïde auquel les cornets inférieurs reſtent attachés, je choiſis une Tête où ces cornets ne ſoient point encore ſoudés avec les os du Palais & les os maxillaires. J'ouvre le ſinus maxillaire par ſa partie externe, je détruis

le

le bord de l'os maxillaire ſur lequel l'oreille du cornet inférieur eſt appliquée. Pour ne point en même temps détacher le cornet de l'os ethmoïde, il faut un peu d'adreſſe & de patience, & avec cela ne réüſſit-on pas toûjours. L'oreille du cornet étant ainſi dégagée, on ôte l'os maxillaire que ſuit ordinairement l'os du Palais, & le cornet reſte attaché à l'os ethmoïde.

Au reſte, il n'eſt pas beſoin de cette préparation, ſi l'on veut ſeulement s'aſſûrer de la continuité des lames ſpongieuſes inférieures avec l'os ethmoïde ; il ne faut que conſulter des Têtes où il n'y a rien de détruit, on verra preſque toûjours que du bord ſupérieur de chaque cornet inférieur s'éleve une lame qui va s'attacher à l'os ethmoïde, & lorſque les cornets inférieurs ſont ſéparés de l'os ethmoïde, on apperçoit ſur leur bord ſupérieur de petites éminences oſſeuſes qui ne paroiſſent être que les reſtes de la lame rompüe.



REMARQUES

Sur un Ecrit de M. Davall, *qui se trouve dans les Transactions Philosophiques de la Société Royale de* Londres, *n.° 402, an. 1728, touchant la comparaison qu'a fait M.* Delisle, *de la grandeur de* Paris *avec celle de* Londres, *dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1725, page 48.*

Par M. DE MAIRAN.

UN des principaux motifs de feu M. *Delisle* dans ce qu'il nous a laissé sur l'étenduë des grandes Villes, étoit de concilier ou d'éclaircir quelques observations Astronomiques, dont le résultat pouvoit devenir assés différent, par la différence des lieux où elles auroient été faites, quoique dans l'enceinte d'une même Ville. C'est ce dont il nous avertit dès le commencement de cette recherche, de l'utilité de laquelle il donne des preuves & des exemples. Après cela, M. *Delisle* compare entr'elles quelques-unes des Villes, tant anciennes que modernes, dont la grandeur nous est connüe, soit par observation, soit par le témoignage des Auteurs qui en ont parlé, telles qu'*Alexandrie, Rome, Babylone, Bysance, Ispahan, le Caire, Londres,* &c. *Paris* qui nous intéresse plus qu'aucune autre Ville du monde, lui sert de base & de terme de comparaison, par rapport aux autres, & sur-tout par rapport à la Ville de *Londres ;* il fait, comme on le sçait, celle-ci plus petite que *Paris,* tout au moins d'une vingtiéme partie. C'est sur le Plan de *Morden,* qu'il s'est reglé, & plus encore sur des dimensions très-exactes qu'il avoit reçû de *Londres* même. Cette fameuse Ville nous fournit tous les jours de bien plus dignes sujets d'émulation que celui que pourroit faire naître l'étenduë de ses murailles : elle n'a pas dédaigné cependant ce leger avantage, & elle a trouvé dans

la *Société Royale* qu'elle renferme, & en la perſonne de M. *Davall* un défenſeur contre la déciſion de M. *Deliſle.* Selon M. *Davall*, non ſeulement ce vingtiéme de plus attribué à l'étendüe de *Paris* s'évanoüit, mais il ſuit du calcul même de M. *Deliſle* & d'une erreur de fait où il paroît être tombé, que *Londres* doit être plus grand que *Paris*, d'environ la quatorziéme partie.

On ne peut diſconvenir que M. *Deliſle* ne ſe ſoit mépris, en énonçant la méthode qu'il a ſuivie pour dreſſer ſon Plan de *Paris*, & pour faire la comparaiſon de cette Ville avec celle de *Londres ;* mais après avoir éxaminé ſon Mémoire, & le Plan dont il s'agit, il me paroît évident que ſa mépriſe ne tombe que ſur ſon énoncé, & non ſur ſes opérations, ou ſur les conſéquences qu'il en a tirées; & partant que la concluſion de M. *Davall*, en ce qu'elle a de favorable à l'étendüe de *Londres*, ne ſuit nullement de l'erreur qu'il a reprochée à M. *Deliſle.* C'eſt là tout ce que je me propoſe de prouver dans ces Remarques. Outre que l'on ſera peut-être curieux de ſçavoir ſur quoi roule la difficulté, il m'a ſemblé que nous ne pouvions refuſer un tel éclairciſſement à la mémoire du ſçavant Géographe que cette queſtion intéreſſe.

M. *Deliſle*, après avoir donné le détail de la Méthode qu'il avoit ſuivie pour tracer le Plan de Paris qu'il publia en 1716, & qui eſt le même dont il s'eſt ſervi pour déterminer la grandeur de cette Ville, méthode toute géométrique, & bien différente en cela de la plûpart de celles qu'on avoit employé juſqu'alors, ajoûte qu'il en lia les parties ou les triangles avec les Obſervations éxactes de M.rs de l'Obſervatoire pour la deſcription de la Méridienne de France. Il n'oublia pas de tracer cette Méridienne à travers la Ville, ce qui le mit en état, « dit-il, après les précautions rapportées ci-deſſus, de diviſer « l'étendüe de la Ville par Méridiens & par Paralleles, comme « on fait ſur une Carte générale, ce qui ſert à indiquer à quelle « portion du Ciel les différentes parties de cette Ville répondent. «

Juſques-là M. *Deliſle* rapporte fidellement ce qu'il a fait en traçant ſa Carte de *Paris*, & cette Carte en eſt la preuve.

Mais voici où ſa mémoire ne l'a pas ſervi de même, comme le prouve encore la même Carte.

» J'y ai tracé les Paralleles de 15 en 15 ſecondes, & les » Méridiens de 20 en 20 ſecondes ; & comme ſous le Parallele » de *Paris* 15 degrés de Latitude en valent 20 de Longitude, » & qu'il en eſt ainſi des minutes & des ſecondes, en donnant » 5 minutes de plus à l'intervalle des Méridiens qu'à celui des » Paralleles, je me ſuis fait des Quarrés parfaits.

Ce qu'il y a de faux dans cet énoncé, c'eſt que ſous le Parallele de *Paris* 15 degrés de Latitude ne vaillent que 20 degrés de Longitude ; ils en valent près de 23 : c'eſt ainſi que le donne la *Regle* ſi connüe, du Sinus du complément de Latitude, &c. Mais il y a grande apparence que M. *Deliſle,* au lieu du complément, aura pris ici la Latitude même, qui à l'égard de *Paris,* étant introduite dans l'Analogie au lieu de ſon complément, répondroit en effet à environ 20 degrés ou $19 \frac{11}{12}$ de Longitude pour 15 de Latitude. Il ne faut pour cela qu'avoir regardé à droite à l'ouverture des Tables des Sinus, au lieu de regarder à gauche. Voilà, dis-je, vrai-ſemblablement la ſource de l'erreur que M. *Davall* a relevée, & qui lui a fait tirer des concluſions ſi favorables à l'étendüe de *Londres.* Ecoutons-le lui-même : je ne ſçaurois mieux mettre le Lecteur au fait de ce calcul, & du raiſonnement qu'il fournit à M. *Davall,* qu'en rapportant ſes propres paroles.

» En liſant ce Mémoire de M. *Deliſle*, dit-il, après avoir » tranſcrit l'énoncé qu'on vient de voir, je me ſuis d'abord » apperçû, que la méthode qu'il a ſuivie pour comparer l'étendüe de *Paris* avec celle de *Londres*, & par laquelle il conclut » que la premiére de ces deux Villes eſt d'un vingtiéme plus » grande que l'autre, eſt fondée ſur une fauſſe hypotheſe ; ſçavoir, que ſous le Parallele de *Paris* 20 degrés de Longitude » ſont égaux à 15 de Latitude, & par conſéquent, que ſi l'on » trace les Méridiens de 20 en 20 ſecondes, & les Paralleles » de 15 en 15, les figures données par leurs interſections » ſeront des Quarrés parfaits : car l'Equateur & ſes Paralleles » ſont entre eux comme les Sinus de leurs diſtances reſpectives

du Pole. D'où il suit que comme le Rayon ou Sinus de 90 degrés est au Sinus de la distance d'un parallele quelconque du Pole, ou au Sinus du complément de la Latitude : ainsi le degré donné de l'Equateur, ou d'un grand Cercle quelconque, est à la portion semblable du Parallele donné. Prenant donc la Latitude moyenne de *Paris* de 48° 51′, le rapport des degrés d'un grand Cercle à ceux du Parallele de *Paris* sera, par les Tables des Sinus, comme 10000000 est à 6580326 ; au lieu que selon M. *Delisle* ce rapport n'étant seulement que comme 20 & 15, ou comme 100 & 75, il suit que les figures que M. *Delisle* appelle des Quarrés, n'en sont point, mais des Rectangles, dont le plus grand côté, qui contient 15 secondes d'un grand Cercle, se trouve dans la même proportion avec le plus petit, qui contient 20 secondes du Parallele de *Paris*, que 750 &c. avec 658 &c. ou à peu-près comme 8 à 7 ; & que les intervalles qu'il devroit avoir donné en compensation aux Méridiens pour faire de ces figures des Quarrés parfaits, devroient avoir été $\frac{15\times100}{658}$ &c. secondes, ou approchant de $22''\frac{4}{5}$, ou $22''$ $48'''$ du Parallele de *Paris*.

Or « continüe M. *Davall* » M. *Delisle* dit que ces figures sont des Quarrés parfaits, & qu'il les a calculées comme des Quarrés, dont le côté étoit de $15''$ d'un grand Cercle, & selon lui *Paris* contient 63 de ces Quarrés, qui sont 3538647 toises quarrées, lequel nombre étant divisé par 63, le quotient 56196 sera le nombre de toises quarrées contenües dans chaque Quarré, dont la racine donne 237 toises pour le côté de chacun d'eux, ce qui fait tout juste $15''$, ou $\frac{1}{240}$ de degré d'un grand Cercle.

M. *Delisle* a donc fait par cette supputation « conclut M. *Davall* » la superficie de chaque rectangle*, & par conséquent celle de toute la Ville de *Paris* trop grande d'environ $\frac{1}{7}$.

* Il faut entendre *de chaque quarré*, car autrement la supputation de M. *Delisle* pourroit être juste.

Tout ce raisonnement se réduit, si je ne me trompe, à ceci.

1.° Que M. *Delisle* a pris ou tracé un Plan de *Paris*, tel qu'il devoit être dans toutes ses dimensions.

2.° Qu'il a divisé ce Plan par des Quarrés, au lieu de le diviser par des Rectangles.

3.° Que ces Quarrés se trouvent plus petits que n'auroient été les Rectangles ; d'où il suit, que l'aire totale de *Paris* contient un plus grand nombre de ces Quarrés qu'elle n'auroit contenu de Rectangles.

4.° Que malgré le trop de petitesse de chacun de ces Quarrés, M. *Delisle* les a évalués au même nombre de toises quarrées, que celui qu'auroit contenu réellement chaque Rectangle.

D'où il suit enfin, que l'aire totale de *Paris* résultante de la somme de ces Quarrés, se trouve plus grande qu'il ne faut d'une quantité, qui a le même rapport à sa véritable aire, que celle de chaque Rectangle à chacun de ces Quarrés.

Pour répondre à l'objection, il ne s'agit que d'éclaircir, & de prouver ce que nous avons déja avancé, que l'erreur reprochée à M. *Delisle,* n'est que dans l'exposé de sa méthode, & nullement dans la méthode même, ni dans les résultats.

Car 1.° c'est sur sa Carte de *Paris* déja faite, & publiée en 1716, augmentée seulement peut-être de quelques additions pour les nouveaux bâtiments, que M. *Delisle* a calculé & déterminé l'étendüe & la superficie de *Paris*, & qu'il l'a comparée avec l'étendüe de *Londres.* Il n'y a qu'à lire son Mémoire pour s'en convaincre.

2.° Cette Carte de *Paris,* qui est en effet divisée par Méridiens de 20 en 20 secondes, & par Paralleles de 15 en 15, ne contient point des Quarrés parfaits résultants de l'intersection de ces deux sortes de Cercles, mais des Rectangles tels que M. *Davall* dit qu'ils doivent être, & dont le grand côté, de 15 secondes en Latitude, se trouve sur les Méridiens, & le petit qui n'est que de 20 en Longitude, sur les Paralleles. Il ne faut encore pour cela que jetter les yeux sur le Plan* de M. *Delisle.* On y verra que les côtés des Rectangles dont je parle, étant comparés entre eux, sont à peu-près dans le rapport de 7 à 8, comme le demande M. *Davall.* Il y a plus, les secondes sont tracées & numérotées sur le bord du Plan,

* Il se trouve avec ses autres Cartes sur une feüille de même grandeur.

comme le ſont les degrés ſur la plûpart des Cartes géographiques : ſçavoir, les ſecondes en Longitude, & dont 20 forment le petit côté du Rectangle, ſur les deux Paralleles qui terminent la ſuperficie de cette Carte au Septemtrion & au Midi ; & les ſecondes en Latitude, dont 15 forment le grand côté, ſur les deux Méridiens qui la terminent à l'Orient & à l'Occident ; & avec une telle juſteſſe, que ſi l'on porte le Compas ſur un de ces Méridiens, à 15 ſecondes d'ouverture, & qu'on l'applique enſuite ſur l'un des Paralleles gradués & diviſés en ſecondes de Longitude, on trouvera que 15 ſecondes du Méridien répondent ſenſiblement à $22'' \frac{1}{5}$ du Parallele. Ce qui eſt, comme l'on a vû, la portion réciproque que M. *Davall* leur donne.

Donc ſi M. *Deliſle* a calculé l'étendüe de *Paris* ſur de pareils Rectangles, il l'a très-bien calculée, & il n'y a point d'erreur dans ſon opération.

Mais, répondra-t-on, M. *Deliſle* dit poſitivement qu'il a calculé l'étendüe de *Paris* non ſur des Rectangles, tels que ceux qu'on vient de décrire, mais ſur des Quarrés parfaits ?

Je replique, qu'il eſt moralement impoſſible que M. *Deliſle* ait pratiqué dans le temps, ce que par un défaut de mémoire, & par inadvertance, il a rapporté dans la ſuite d'une maniére ſi peu fidelle. Il eſt, dis-je, impoſſible qu'ayant ſous ſes yeux ſa propre Carte, dont les principales dimenſions lui étoient connuës par voye géométrique, ou par des meſures immédiates, il l'ait couverte de ces prétendus Quarrés, malgré les Rectangles qu'il y voyoit, qu'il en ait déduit des réſultats qui ne pouvoient manquer de la défigurer dans toutes ſes parties, & qu'il ait démenti groſſiérement ſa premiére graduation, ſon échelle de 500 toiſes, & les diſtances qu'il avoit déterminées par ſes triangles.

Que M. *Deliſle* ait appellé des Quarrés ces Rectangles mêmes de ſa Carte gravée que nous avons entre les mains, c'eſt ce qui eſt encore évident par les paroles qui ſuivent ſon énoncé. *Les Quarrés chiffrés,* ajoûte-t-il, *m'ont ſervi de renvoi à une Table alphabétique, qui fait trouver tout d'un coup la ſituation*

des ruës dont on ne ſçait que le nom ; mais ce n'étoit pas là le principal uſage que j'en voulois faire. C'étoit de comparer par le moyen de ces quarrés la grandeur de Paris *à celle de* Londres. La Carte où les ruës ſont indiquées eſt donc la même qui a ſervi à comparer la grandeur de *Paris* à celle de *Londres*. Donc M. *Deliſle* s'eſt mal expliqué ſeulement, quand il a appellé des Quarrés, ce qui réellement & de fait n'étoit ſur ſa Carte que des Rectangles.

J'avoüe qu'on auroit de la peine à donner raiſon d'une telle mépriſe, mais quelque extraordinaire qu'elle paroiſſe, elle devient cependant moins difficile à concevoir, dès qu'on ſçait que M. *Deliſle* n'a pû voir imprimer ſon Mémoire, & que par conſéquent il a pû ne le pas relire ou retoucher avec la nouvelle attention qu'inſpire preſque toûjours, & avec raiſon, à un Auteur, l'idée de l'impreſſion.

Car M. *Deliſle* mourut le 25 Janvier 1726, comme on l'apprend dans ſon Eloge; & je puis prouver, tant par les dates qui ſont à la tête des Mémoires de 1724, & 1725, que par d'autres circonſtances, dont j'ai retenu la note, que nos premiers Mémoires de 1725, parmi leſquels ſe trouve celui de M. *Deliſle,* ne furent donnés à l'Imprimerie, tout au plûtôt, que vers le commencement du mois d'Août de l'année 1726, c'eſt-à-dire, plus de 6 mois après ſa mort.

C'eſt donc un ouvrage poſthume que le Mémoire de M. *Deliſle;* & l'on n'ignore pas quelle indulgence cette qualité doit concilier à ſon Auteur.

J'ai montré, ſi je ne me trompe, que l'inadvertance de M. *Deliſle* n'empêchoit pas qu'on n'eût tout lieu de croire ſes réſultats conformes à la vérité. Mais M. *Davall* a-t-il pû, ou dû entrer dans cette diſcuſſion; & faut-il l'accuſer de trop de ſévérité, quand il a pris pour des Quarrés, ce que M. *Deliſle* lui-même appelle des Quarrés dans ſon Mémoire? Enfin a-t-il vû la Carte de cet Auteur, ſur laquelle rouloit principalement, & la détermination qu'il fit de l'étenduë de *Paris,* & la comparaiſon de cette Ville avec *Londres!* on en jugera par cette inſtance de M. *Davall* même.

» Pour

Pour confirmer ce que je dis, & le mettre hors d'atteinte, «
nous avons M. *Delisle* lui-même pour témoin, qui, dans le «
plan de *Paris,* qu'il a fait graver, & qu'il a publié lui-même, «
& auquel il renvoye dans ce même Mémoire, n'a nulle- «
ment fait des Quarrés des figures ci-dessus mentionnées; mais «
il a donné à leurs côtés entr'eux le rapport de 8 à 7, qui «
est aussi approchant de leur vraye proportion qu'on puisse «
l'exprimer par lignes dans un Plan de la grandeur de celui-ci. «

Voilà, je l'avoüe, ce qui me paroît difficile à concilier. Il faut que M. *Davall* ait conçu que M. *Delisle* laissant là son Plan de *Paris*, le seul cependant dont il ait fait mention dans son Mémoire, & qu'il ait jamais donné, en a tracé tout exprès un autre sans égard au premier, tout différent, & même tout contraire, dans l'unique dessein de faire la comparaison de *Paris* avec *Londres.* Mais il n'y avoit, comme je l'ai déja remarqué, qu'à lire la suite de l'énoncé de M. *Delisle,* pour se convaincre que le Plan sur lequel il avoit mesuré l'étendüe de *Paris,* pour la comparer à l'étendüe de *Londres,* étoit celui-là même où l'on avoit vû les Rectangles.

Ce que je comprends encore plus difficilement, c'est la conclusion que tire M. *Davall* de la fausse hypothese de M. *Delisle*, en faveur de l'étendüe de *Londres.* Car voici comment il raisonne:

Or est-il que dans le Mémoire que nous venons d'éxa- «
miner, M. *Delisle* avoüe lui-même qu'en mesurant *Londres,* «
il a tracé des Quarrés, qui contiennent 15 secondes d'un grand «
Cercle, & dont il dit que *Londres* contient 60. Donc, & par «
les raisons précédentes, pour comparer *Paris* avec *Londres,* «
nous devons retrancher des 63 Rectangles que *Paris* contient, «
une quantité en raison de 8 à 7; mais parce qu'elle est un «
peu au de-là de la véritable, faisons seulement ce retranche- «
ment dans le rapport de 9 à 8, qui est un peu plus petit «
qu'il ne faut. Par-là le nombre des Quarrés contenus dans «
Paris, & dont le côté est 15 secondes d'un grand Cercle, sera «
réduit au rapport de 63 à 56. Et par conséquent selon la «
maniére même de mesurer de M. *Delisle,* la grandeur de «

» *Londres* ſera à celle de *Paris* comme 60 eſt à 56, ou comme
» 15 eſt à 14, c'eſt-à-dire, que *Londres* ſera plus grand que
» *Paris* d'un quatorziéme.

Comment conçoit-on que M. *Deliſle* meſurant l'étendüe de *Londres* ſur le même pied qu'il a meſuré l'étendüe de *Paris*, le rapport de grandeur entre ces deux Villes ne ſe trouve pas le même, quelle que ſoit la méthode qu'il y a employée? n'eſt-ce pas, dans le cas préſent, comme s'il s'étoit ſervi d'une toiſe de 5 pieds, au lieu d'une toiſe de 6 pieds? Il en réſultera une ſurface abſolüe plus grande ou d'un plus grand nombre de toiſes qu'il ne faut pour *Paris*, & pour *Londres*, mais les ſurfaces relatives & leurs rapports ne demeureront-ils pas les mêmes? M. *Deliſle* a dit expreſſément dans ſon Mémoire, & M. *Davall* n'a pas oublié de le rapporter, qu'*il avoit mis le Plan de* Londres *ſur la même échelle que celui de* Paris. Qu'*il y avoit tracé de même des Quarrés de 15 en 15 ſecondes d'un grand Cercle, & qu'alors il s'étoit trouvé en état de comparer immédiatement la grandeur de ces deux Villes.* Voilà donc une meſure commune, & par conſéquent un rapport de grandeur toûjours le même. Mais tâchons de démêler encore, s'il eſt poſſible, les ſuites que peut avoir eu cette méthode, en la prenant ſelon la derniére rigueur.

M. *Deliſle* ne parle pas de la quantité de ſecondes en Longitude qu'il a données à la portion des petits Cercles ou des Paralleles de *Londres*, relativement aux 15 ſecondes de Latitude qu'il a pris ſur les Méridiens ou grands Cercles. Ce qui, en ſuppoſant toûjours la fauſſe hypotheſe des Quarrés, peut être entendu de pluſieurs maniéres, mais dont aucune cependant ne favoriſe la conſéquence tirée par M. *Davall*.

Suppoſons premiérement que M. *Deliſle* a attribué 20 ſecondes au côté du Quarré qui exprime les degrés de Longitude du Parallele de *Londres*, en donnant le même intervalle aux Méridiens du Plan de cette Ville, qu'il avoit donné à ceux du Plan de *Paris*. C'eſt là tout ce qu'on peut imaginer de plus rigoureux d'après ſon ſilence là-deſſus, & en vertu de l'identité de méthode & d'échelle qu'il dit avoir employées pour les

deux Plans. Mais en ce cas, bien-loin que la conſéquence de M. *Davall* ſoit juſte, & que celle de M. *Deliſle* ſoit peu favorable à l'étendüe de *Londres*, il ſuit que *Londres* a réellement beaucoup moins de ſurface par rapport à *Paris*, que M. *Deliſle* ne lui en avoit donné. Car *Londres* étant plus ſeptemtrional que *Paris*, d'environ 2° 40′, ſon Parallele contiendra des degrés de Longitude plus petits, en raiſon des Sinus de complément des deux Latitudes, ou à peu-près de 17 à 18. Donc ſelon le calcul & le raiſonnement qu'a fait M. *Davall* à l'égard de *Paris*, & qu'en rigueur, on doit faire de même à l'égard de *Londres*, il faudra que 15 ſecondes d'un grand Cercle répondent encore à un plus grand nombre de ſecondes du Parallele de *Londres*, qu'elles ne faiſoient à l'égard du Parallele de *Paris*. Si l'on formoit donc, comme il le demande, des Rectangles dont le côté ſupérieur contînt 20″, l'autre côté qui lui eſt perpendiculaire, & auquel il en faut donner 15 d'un grand Cercle, devroit avoir un plus grand rapport avec lui ſur le Plan de *Londres*, que ſur le Plan de *Paris*. Ou ſi enfin l'on tombe dans l'erreur de ne donner à ce ſecond côté que la longueur de celui de 20″ du Parallele, comme on ſuppoſe qu'il avoit été pratiqué à l'égard de *Paris*, & que ces figures deviennent des Quarrés parfaits, ces Quarrés ſeront relativement encore plus défectueux par leur petiteſſe à l'égard de *Londres*, qu'ils ne l'étoient à l'égard de *Paris*. Donc la ſurface de *Londres* en contiendra un plus grand nombre qu'elle n'auroit contenu de Rectangles; donc ſi l'on évalüe la ſurface de chacun de ces Quarrés en toiſes quarrées, ſur le même pied que les Rectangles, & comme s'ils n'étoient pas défectueux, & que de leur ſomme on en déduiſe la ſurface totale de la Ville de *Londres*, cette ſurface paroîtra plus grande qu'elle n'eſt réellement, & plus encore que n'avoit paru celle de *Paris*; en raiſon inverſe des Sinus du complément de Latitude de ces deux Villes, c'eſt-à-dire, comme 18 eſt à 17. Donc l'erreur de M. *Deliſle* doit avoir plus influé ſur l'étendüe de la Ville de *Londres* en excès, qu'elle n'avoit fait ſur l'étendüe de la Ville de *Paris*, d'environ $\frac{1}{18}$. Nous

évaluions toûjours ici les degrés des Paralleles, de même que ci-dessus, sur l'hypothese de la Terre sphérique, & non sur le pied de celle du sphéroïde oblong, ou applati.

Secondement, si l'on veut que M. *Delisle,* ayant eû égard à la Latitude de *Londres,* ait transporté sur les Quarrés qui résultent de l'intersection des Méridiens, & des Paralleles tracés sur le Plan de cette Ville, une erreur proportionnelle à celle qui lui est reprochée touchant la dimension de *Paris ;* (car enfin il ne seroit pas raisonnable de penser que M. *Delisle* ne sçavoit pas que la Latitude de ces deux Villes est différente, & que *Londres* étant plus éloigné de l'Equateur que *Paris,* les degrés de Longitude de son Parallele, devoient être en moindre raison avec ceux de l'Equateur, & qu'il en falloit un plus grand nombre pour égaler la longueur de 15 degrés d'un grand cercle ; & il n'y a point d'équivoque qui puisse l'avoir fait tomber dans cette méprise :) si l'on fait, dis-je, cette supposition, le rapport conclu par M. *Delisle* demeure dans son entier, & il faut dire avec lui que *Paris* est plus grand que *Londres* d'un vingtiéme, sans y comprendre les Jardins considérables & les grands Enclos de ces deux Villes, ou d'un sixiéme, en y comprenant les grands Jardins, & les grands Enclos.

Que faudroit-il donc pour conclurre de l'énoncé, & de la méthode de M. *Delisle,* que *Londres* est plus grand que *Paris* d'une quatorziéme partie? rien de moins que de faire opérer ce sçavant Géographe d'une maniére toute différente de celle qu'il dit qu'il a fait, & la plus extravagante du monde. Il faudroit lui faire diviser le Plan de *Londres* en Rectangles convenables, tandis qu'il n'auroit divisé le Plan de *Paris* qu'en Quarrés défectueux ; ou, si l'on veut, qu'il ait divisé le Plan de *Londres* en des Quarrés, dont l'un des côtés pris sur un grand Cercle ou sur le Méridien, soit, comme il dit, de 15″, il faut que l'autre côté, qui fait partie du Parallele, réponde nécessairement, & quoiqu'ait voulu faire M. *Delisle,* au nombre de secondes en Longitude que doit comporter ce Parallele, sçavoir à environ 24″ 6‴. Car par ce moyen chaque partie

de la surface de *Londres* contenant un plus petit nombre de ses Quarrés, que pareille portion de la surface de *Paris* ne contient des siens, & attribuant à chaque espece de Quarré la même aire, & le même nombre de toises, il sera possible que *Londres* paroisse être plus petit que *Paris,* quoique réellement plus grand. En un mot, il faut faire opérer M. *Delisle* sur son Plan de *Paris*, dont la seule inspection devoit le redresser, de la maniére la plus inusitée, & la plus fautive, & lui faire ensuite mesurer l'étenduë de *Londres,* selon toutes les regles de l'Art. C'est-là aussi sans doute ce qu'a prétendu M. *Davall;* puisque, comme on a vû, des 63 Quarrés que M. *Delisle* donne à l'étendüe de *Paris,* il en retranche 7, & les réduit à 56, & qu'il n'ôte rien des 60 Quarrés que le même M. *Delisle* donne à l'étendüe de *Londres.* Je laisse à penser aux personnes équitables, & à M. *Davall* lui-même, quand il voudra bien y faire attention, s'il est possible d'imaginer rien de pareil.

Après tout ce qui a été remarqué ci-dessus, & que je crois suffisant pour justifier les calculs & les conclusions de M. *Delisle*, je ne sçaurois rien ajoûter de plus fort, sinon que j'ai vû les Plans de *Paris,* & de *Londres*, ou les deux feüilles mêmes sur lesquelles il avoit établi ses dimensions & son calcul, & qu'en ayant éxaminé toutes les parties, je n'y ai rien trouvé qui ne soit entiérement conforme à ce que je viens de dire. La feüille de *Paris* ne consiste que dans le Plan même gravé en 1716, dont nous avons parlé, augmenté seulement à la main de quelques nouveaux bâtiments considérables qui avoient été faits depuis, & celle de *Londres* est, comme il a été dit, la Carte de *Morden* rectifiée ou augmentée de même sur les nouvelles dimensions que M. *Delisle* avoit reçûës. Nulle division par Quarrés, & par-tout, dans l'une & dans l'autre, des Rectangles relatifs à la Latitude du lieu. C'est M. *Buach*, de cette Académie, digne disciple de feu M. *Delisle,* & ensuite son gendre, & l'héritier de ses Papiers, qui a bien voulu me communiquer ces deux Plans. J'ai prévenu en quelque façon la recherche qu'il méditoit là-dessus, par la commodité que

j'ai eu de voir avant lui, l'Ecrit de M. *Davall,* & par l'engagement où je me ſuis trouvé d'en dire mon ſentiment, à l'occaſion d'une diſpute qui s'étoit muë ſur ce ſujet. Mais le Public n'y perdra rien, ſi M. *Buach* ſe détermine, comme il le fait eſpérer, à meſurer lui-même, tant ſur les Mémoires de M. *Deliſle,* que ſur de nouvelles pieces, l'étenduë de *Paris* & de *Londres,* & à juſtifier par-là d'une maniére encore plus directe, & plus détaillée que je n'ai fait, le fameux Géographe que tout le monde ſçavant regrette, en demeurant riche du fruit de ſes travaux.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES PENDANT L'ANNÉE M. DCCXXX.

Par M. MARALDI.

ON a vû pluſieurs fois pendant l'année 1730, l'Aurore Boréale, mais elle n'a été éclatante & ſenſible que le 9 d'Octobre qu'on l'a vûë à 8^h du ſoir, élevée ſur l'horiſon de 15 à 20 degrés vers le Nord-oüeſt, partagée en deux Colomnes lumineuſes, inclinées à l'horiſon, de maniére que la partie ſupérieure de ces Colomnes regardoit l'Orient, & la partie inférieure le Nord. Il y avoit entre ces Colomnes un eſpace ſerein, ſans Lumiére, où étoient les Pleïades. Ces deux Colomnes occupoient chacune 16 à 18 degrés de longueur ſur 5 à 6 de largeur; le reſte du Ciel étoit fort ſerein, & on diſtinguoit pluſieurs Etoiles du Taureau & de Perſée, au travers même des Colomnes lumineuſes.

Celle qui étoit à droite des Pleïades, c'eſt-à-dire, plus vers l'Orient, commença à diminüer à $8^h\ 25'$, pendant que celle qui étoit à gauche augmentoit de grandeur, juſqu'à ce que l'autre fût entiérement ceſſée. Elle s'éleva enſuite, & à $8^h \frac{3}{4}$ elle étoit entre les Pleïades & les Etoiles de Perſée.

Elle diminüa ensuite, & cessa entiérement de paroître un peu après 9 heures.

Observations de la Pluye tombée à l'Observatoire pendant l'année 1730.

	pouc.	lign.		pouc.	lign.
EN Janvier	0	0 4/6	En Juillet	2	1 3/6
Février......	1	4	Août	0	8 1/6
Mars........	1	5 1/6	Septembre ...	1	3 1/6
Avril	1	6	Octobre	1	9 2/6
Mai.........	1	3 2/6	Novembre...	1	1 2/6
Juin........	2	6 3/6	Décembre....	0	11 1/6
	8	1 4/6		7	10 4/6

Donc la hauteur de la Pluye qui est tombée pendant toute l'année 1730 est de 16 pouces & 1/3 de ligne, qui est moindre de la hauteur des années moyennes établie l'année 1726 par M. Maraldi de 17 pouces 1/2. La hauteur des six premiers mois est de 8 pouc. 1 ligne & 2/3, & celle des six derniers est de 7 pouces 10 lign. & 2/3, avec la seule différence de 3 lignes.

La Pluye a été plus abondante dans le mois Juin & celui de Juillet qu'en aucun autre mois de l'année.

Il y a eû pendant le mois de Juillet de grands Vents de Sud-oüest qui ont causé plusieurs orages; le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, il tomba une grande quantité de Grêle, dont les grains étoient fort gros.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid marqué par le Thermometre est arrivé le 20 & le 27 de Janvier, la liqueur descendit le 20 à 24 degrés, & le 27 elle a été à 23 degrés, ce qui marque un froid modéré, puisque l'année 1709 elle descendit à 5 degrés.

La chaleur de l'Eté a été aussi modérée, car la liqueur du même Thermometre a toûjours été pendant les mois de

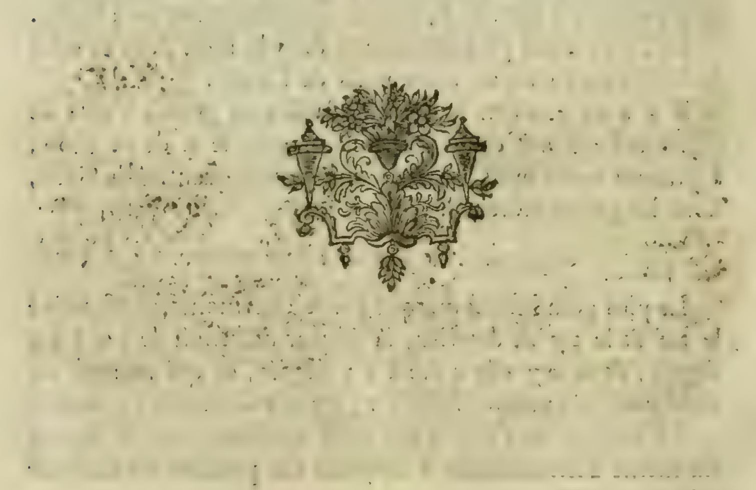
Juin & Juillet au deſſous de 60 degrés, & elle n'eſt montée qu'à 63 degrés le 4 & le 5 d'Août au lever du Soleil, le temps étant ſerein & tranquille. Le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, la liqueur étoit à 74 degrés, mais le 5, à la même heure, s'étant levé un vent de Sud-oüeſt, elle monta à 76 degrés. Dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, elle eſt montée juſqu'à 82 degrés.

Sur le Barometre.

On a obſervé la moindre hauteur du Barometre de 27 pouces 2 lignes le 9, le 10 & le 11 de Mars, le Ciel étant couvert, avec un petit vent de Sud-oüeſt. La plus grande hauteur a été obſervée de 28 pouces 5 lignes le 22 de Janvier par un temps ſerein & un vent de Nord. Le 23, le 25, & le 26 de Novembre il a été à 28 pouces 4 lignes.

Sur la Déclinaiſon de l'Aimant.

Le 20 Novembre on a obſervé avec une Aiguille de 4 pouces la déclinaiſon de l'Aimant de 14° 25′ vers le Nord-oüeſt.



MESSIEURS

MESSIEURS DE LA SOCIETÉ Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont envoyé à l'Academie l'Ouvrage qui ſuit, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles ; comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roy au mois de Fevrier 1706.

PHASCOLUS PEREGRINUS, flore roſeo, ſemine tomentoſo.

Phaſcolus Indicus, hederæ folio anguloſo, ſemine oblongo, lanuginoſo. *Raii Hiſt. 3. tom. 438.*

Par M. NISSOLE.

APRÉS avoir ſemé quelques Graines mêlées, que j'avois reçûës de Hollande, j'eûs le plaiſir de voir lever pluſieurs Plantes curieuſes, parmi leſquelles je trouvai

Premiérement, cette eſpece de Haricot qu'il me fût impoſſible de ranger ſous aucune des eſpeces de ceux qui ont été décrits par les Auteurs de Botanique que j'ai lûs, & c'eſt ce qui m'a déterminé à en donner la deſcription & la figure.

Sa racine eſt longue d'environ un pied ſur trois ou quatre lignes d'épaiſſeur au colet, blanche en dedans, & couverte en dehors d'une pellicule qui eſt ordinairement griſâtre, mais qui ſe trouve quelquefois de couleur brune tirant ſur le rougeâtre,

de ſorte qu'il y a beaucoup d'apparence qu'elle ſe charge toûjours de la couleur de la terre qu'elle occupe.

A deux pouces au deſſous du collet, elle eſt garnie de quelques fibres d'un demi-pied de long ſur deux lignes d'épaiſſeur à leur naiſſance, entremêlées en quelques endroits de quelque peu de chevelu. Toutes ces fibres, auſſi-bien que le corps de la racine qui les fournit, diminüent conſidérablement de groſſeur à meſure qu'elles s'étendent & s'enfoncent dans la terre, deſorte qu'elles ſont très-déliées à leur extrémité.

Il s'éleve de cette racine une tige de ſept à huit pieds de hauteur ſur deux lignes de groſſeur à ſa naiſſance, qui à un pouce au-deſſus de la terre ſe diviſe en pluſieurs branches qui ſont de différentes longueurs, ſouples & pliantes, & qui, comme celles des autres eſpeces de Haricot, s'entortillent aux Plantes voiſines, ou aux échalas qu'on leur a préparés pour les ſoûtenir. Toutes ces tiges ſont couvertes d'une petite pellicule d'un verd-brun, lorſque la Plante eſt encore jeune, mais qui dans la ſuite devient rougeâtre, & garnie de petits poils blancs fort déliés.

Les feüilles qui garniſſent ces tiges y ſont attachées alternativement ſur des queües fort déliées d'environ un pouce de long, qui fourniſſent ſur le dos de chacune, trois petits filets qui diſparoiſſent à leur extrêmité. Ces feüilles ſont fort irréguliéres, d'un verd-mat, & diſpoſées toûjours trois à trois ſur la même queüe. Les plus grandes & les plus réguliéres ont environ un pouce & demi de long ſur un pouce de large, elles ſont arrondies à leur baſe, & s'élargiſſent inſenſiblement juſque vers le milieu, & diminuant enſuite peu à peu ſe terminent en pointe, de ſorte qu'elles repréſentent aſſés bien un fer de picque. Il s'en trouve quelques-unes qui ſont découpées en trefle, & il y en a d'autres qui ont des découpures ſi différentes & ſi bizarres, que j'aurois été bien embarraſſé à les décrire.

Les fleurs qui ſont légumineuſes, de couleur de roſe pâle,

naissent aux aisselles des feüilles, elles sont soûtenües par des queües d'environ trois pouces de long. Il s'en trouve ordinairement quatre ou cinq sur la même queüe. L'extrémité de l'étendart ou feüille supérieure est recourbé, & d'une couleur un peu plus foncée que celle des autres parties de la fleur, car elle tire sur le rouge-brun.

Lorsque ces fleurs commencent à se faner, elles blanchissent insensiblement, & deviennent enfin jaunâtres, elles tombent ensuite, & l'on voit alors sortir du fond des calices qui soûtenoient les fleurs, les pistiles qui deviennent des gousses presque rondes d'environ deux pouces & demi de longueur, sur trois ou quatre lignes de grosseur. Ces gousses sont composées de deux cosses tannées, blancheâtres & luisantes en dedans, qui renferment six ou sept semences de figure presque cilindrique, longues d'environ quatre lignes sur une & demie de diametre; elles sont noirâtres & couvertes d'un petit duvet blanc. Elles sont attachées aux côtés par un petit filet blanc, bordé de noir, d'environ deux lignes de long, y en ayant, au côté qui lui est opposé, un noir de la même grandeur.

Dès que j'eus examiné la Plante qui suit, je trouvai qu'elle avoit beaucoup de rapport avec le *Luffa Arabum;* de sorte que je fus dans l'obligation de la ranger à la classe que M. Tournefort avoit déja établi dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, c'est pourquoi je la nommai

Luffa Arabum fructu echinato, fructus momordicæ vulgaris facie.

Mais j'appris dans la suite qu'elle avoit été nommée par M. Caspard Commelin, & qu'il en avoit donné la description & la figure dans le Catalogue des Plantes étrangeres, imprimé in 4.° à Leyden, sous le nom de

Momordica Americana fructu reticulato sicco.

Cependant si on y fait attention, & qu'on examine sérieusement les fruits du *Momordica vulgaris,* qui sont charnus & humides en dedans, & couverts d'une petite pellicule rouge,

avec cette différence que ceux du *Luffa* sont entiérement secs & arides, & dans lesquels on ne trouve que quelques filaments qui renferment quelques fruits noirâtres, on pourra voir facilement la différence de ces differentes especes de Plantes.

FIN.

FAUTES A CORRIGER

Dans les Mémoires de 1727.

PAge 356, ligne 21, pour 10° 20′ de Libra, *lisés* 10° 20′ d'Aries.

Page 357, ligne 15, pour est d'une année commune 34 jours & près de deux heures, ou de 399 jours & près de deux heures, *lisés* est d'une année commune 33 jours 21^h & $\frac{1}{4}$, ou de 398 jours 21^h 14′.

Dans les Mémoires de 1729.

Page 403, ligne 9, pour 20° 6′ d'Aries, *lisés* 20° 6′ du Taureau.

